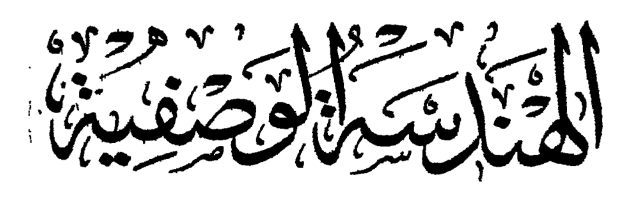
الجامعة المصرية

كليتا الهندسة والعلوم



الهندسة الوصفية

تأليف

دكتور علي مصطفى مشرفه
استاذ الرياضة التطبيقية
بكلية العلوم

محمد الهامي الكرداني
مدرس الهندسة الوصفية
بكلية الهندسة

مطبعة بول باربيه
٨ حارة فايد بشارع ابراهيم باشا بمصر
١٩٣٧

الجامعة المصرية

كليتا الهندسة والعلوم

الهندسة الوصفية

تأليف

دكتور علي مصطفى مشرفة
استاذ الرياضة التطبيقية
بكلية العلوم

محمد الهامي الكرداني
مدرس الهندسة الوصفية
بكلية الهندسة

مطبعة بول باربيه
٨ حارة فايد بشارع ابراهيم باشا بمصر
١٩٣٧

مقدمة

تعتبر الهندسة الوصفية بحق من العلوم الاساسية للمهندس فان تعريفها كعلم يبحث فى طرق الاسقاط المختلفة وفى استخدام هذه الطرق لتمثيل مختلف المنحنيات والسطوح والاجسام تمثيلا بيانياً — هذا التعريف يرسم للعلم حدوداً واسعة بعيدة المدى هى فى نفس الوقت حدود واضحة صريحة فى الدلالة على مبلغ حيويته بالنسبة للرجل الفنى ولقد قيل قديماً « إن الهندسة الوصفية هى اللغة التى يتخاطب بها الفنيون » . على أن أهمية هذا العلم ليست قاصرة على هذه الناحية العملية فقط فان له أيضاً أهميته وخطره عند المهندس والرياضى على السواء من الناحيتين الثقافية والعلمية لما له من أثر بعيد فى توسيع المدارك وتربية ملكة التصور وفائدة كبيرة فى تحقيق النظريات الفراغية تحقيقاً عملياً . وعلى الرغم من ذلك نجد عدد المؤلفات فى الهندسة الوصفية فى بعض اللغات الحديثة كاللغة الانجليزية مثلا قليلا ولا يفى بالحاجة مع أننا فى الوقت نفسه نستطيع أن نلاحظ كثرة ملموسة فى عدد الكتب التى وضعت لهذا العلم فى اللغات الاخرى .

وفى الكتاب الذى نقدمه اليوم للقراء أردنا أن نجمع بين بحث المبادىء الهندسية الاساسية التى تبنى عليها عمليات التمثيل الوصفى وبين شرح أهم هذه العمليات والتطبيق عليها وقد افترضنا معرفة طريقة الاسقاط على مستويين متعامدين مع الاستفادة من خط الارض وهى الطريقة الابتدائية المشروحة فى كثير من المؤلفات الشائعة كما افترضنا أيضاً أن القارىء ملم باهم النظريات المتعلقة ببعض السطوح الاساسية مثل كثيرات الاوجه المستوية والكرة والسطحين المخروطى والاسطوانى . ولم نتعرض فى الكتاب لطريقتى الاسقاط الا كسنمترى والاسقاط المتوازى المائل وذلك رغبة فى الايجاز الذى لا نعتقد أن له مساساً بالموضوع .

أما عن المصطلحات المستخدمة فى الكتاب فإن الكثير منها قدصار شائعاً ومتفقاً عليه فى المؤلفات الرياضية غير أن البعض اجتهادى لا يزال قابلا للنقد والتمحيص وقد راعينا عند التعبير عن المعانى الهندسية بالفاظ جديدة أن تكون هذه الالفاظ متمشية مع روح اللغة وروح العلم فى آن واحد كما أننا لم نحاول أن نحاكى أية لغة أجنبية بالذات محاكاة شكلية بان ننقل المعنى عنها نقلا بل جعلنا اللفظ معبراً عن المعنى الذى يريد المؤلف العربى أن يعبر عنه بطريقة طبيعية بسيطة . أما نقل اللفظ ذاته فقد استبحناه لانفسنا فى بعض الحالات التى أجمعت فيها اللغات الاجنبية الشائعة على اقتباسه من أصل إغريقى أو لاتينى ووجدنا من المناسب أن ننقله الى لغتنا . ونرجو أن يجد القارىء فائدة فى القاموس الذى ذيلنا به الكتاب مشتملا على المعانى الانجليزية والفرنسية والالمانية لاهم المصطلحات المستعملة .

ولم يكن هناك بد من استخدام الحروف الاغريقية للدلالة على الخطوط والمستويات ولانرى غضاضة فى ذلك إذ أن اللغة الاغريقية مرتبطة ارتباطاً متيناً بتاريخنا وثقافتنا والحروف الاغريقية ذاتها لا تختلف كثيراً عن الحروف القبطية . وقدرأينا تسهيلا للقارىء أن نثبت الابجدية الاغريقية فى الصفحة التالية للمقدمة ونرى واجباً علينا أن نشير هنا الى أن معظم الحروف الاغريقية على وجه الخصوص تختلف بعض الشىء فى الاشكال والرسومات عنها فى نص الكتاب على أنا نرجو ألا يكون هذا الاختلاف البسيط حائلا بين القارىء وبين فهمه لهذه الاشكال .

أما عن التمارين فيجد القارىء بعضاً منها فى أماكن متفرقة من الكتاب وكذا فى نهايته ويهمنا أن نوجه نظر القارىء بهذه المناسبة الى ضرورة استخدام اللوحة والمسطرة لحل التمارين نظرية كانت أو عملية حلا دقيقاً كاملا إذ أن هذه هى الطريقة الاكيدة المؤدية الى تفهم نظريات الهندسة الوصفية . ومن المفيد أن يكثر القارىء بصفة خاصة من حل المسائل العملية المتعلقة بتقاطع السطوح ورسم الظلال

والصور المنظورية الخفان مثل ـه المسائل من شأنها أن تربى فيه ملكة التصور العملية فيصبح بعد قليل قادرا على قراءة الرسومات الفنية قراءة صحيحة وعلى التعبير عما يريد التعبير عنه من مختلف السطوح والانشاءات ؟

ديسمبر سنة ١٩٣٥

استدراك

تسربت بعض الاخطاء المطبعية الى قليل من صفحات الكتاب وإنا لا نشك فى أن معظم هذه الاخطاء إن لم تكن كلها هى مما يستطيع القارىء تصحيحه بنفسه بسهولة ولذا نقتصر على الاشارة الى بعضها فيما يلى :

صفحة	سطر	خطأ	صواب	صفحة	سطر	خطأ	صواب
١٨٠	٢٠	سه	$\overline{\text{سه}}$	٣١٣	٨	ن′∞ =	ن′ = ∞
١٩٢	٨	و′ ص′∞	و′ ر′∞	٣٩٩	٣	٨و٠	٧و٠

كذلك يجد القارىء فى أمكنة متفرقة من الكتاب لفظة « ائتلاف مطلق » للدلالة على علاقة هندسية كالتى توجد بين شكلين أحدهما المسقط المتوازى غير المباشر للآخر فنرجو دفعاً لما عساه أن يتبادر الى الذهن من أن هذا النوع من الائتلاف هو نفسه الائتلاف الذى أطلقنا عليه اسم ائتلاف إسقاطى أو ائتلاف عام — أن تقرأ اللفظة المشار اليها أينما وجدت هكذا : « ائتلاف متوازى مطلق » باعتباره أطلق من قيد عدم المباشرة فى الاسقاط المتوازى .

حروف الابجدية الاغريقية

Ν	ν	Ni	نى	Α	α	Alpha	ألفا
Ξ	ξ	Xi	اكسى	Β	β	Bita	بيتا
Ο	ο	Omikron	أوميكرون	Γ	γ	Gamma	جامّا
Π	π	Pi	پى	Δ	δ	Delta	دلتا
Ρ	ϱ	Rho	رو	Ε	ε	Epsilon	أبسيلون
Σ	σ	Sigma	سيجما	Ζ	ζ	Zita	زيتا
Τ	τ	Tau	طو	Η	η	Ita	إيتا
Υ	υ	Ypsilon	إيبسلون	Θ	ϑ	Thita	ثيتا
Φ	φ	Phi	فى	Ι	ι	Iota	يوتا
Χ	χ	Chi	خى	Κ	ϰ	Kappa	كاپّا
Ψ	ψ	Psi	ابسى	Λ	λ	Lambda	لمدا
Ω	ω	Omega	أوميجا	Μ	μ	Mi	مى

فهرس

الباب الثالث

منحنيات الدرجة الثانية أو المقاطع المخروطية

الباب الرابع

السطوح الدورانية

الباب الخامس

السطوح اللولبية

صفحة بند

الباب السادس

السطوح المسطرة

الباب السابع

سطوح الدرجة الثانية غير المسطره

الباب الثامن

الاسقاط الرقمى

الباب التاسع

السطوح الطبوغرافية

الباب العاشر

الاسقاط المركزى أو المنظور

الباب الحادى عشر

المبادىء الاساسية لعلم الفوتوغرامتريا

الباب الثانى عشر

الخرائط الجغرافية

تمهيد

تبحث *الهندسة الوصفية* فى تمثيل الاشكال الهندسية الفراغية (النقط والخطوط والسطوح والاجسام) تمثيلا بيانياً على سطح مستو [1] . وتستخدم

(١) لا يعرف على وجه التحديد التاريخ الذى بدأ الانسان فيه بالتعبير بواسطة الرسم عما يريد التعبير عنه من مجسمات ومنشئات وغير ذلك من اشكال متعلقة بالفنون والصناعات . وأغلب الظن أن يكون هذا التاريخ مقارباً لتاريخ الفن نفسه حيث فتقت الحاجة للفنان عن هذه الرسومات « الوصفية » . وتدل الرسومات التى اكتشفت بين آثار قدماء المصريين والتى كانت مصحوبة بالابعاد والمقاييس ليس فقط على أن « فن » الهندسة الوصفية كان معروفاً لدى هؤلاء المصريين القدماء بل أيضاً على تقدمهم فى هذا الفن لدرجة الالمام بطريقة الاسقاط العمودى . ولقد تعرض المهندس المعمارى المشهور ڤتروڤيوس M. Vitruvius المعاصر للمسيح عليه السلام فى كتابه عن فن العماره De architectura للبحث فى طريقة الاسقاط على مستويين متعامدين .

أما جاسبار مونچ Gaspard Monge الذى ينسب اليه دائماً الفضل فى وضع أسس الهندسه الوصفيه كعلم فقد بدأ بجمع وترتيب تلك الطرق المصطلح عليها والتى استعملت لتمثيل الاشكال الهندسية الفراغية فى رسومات العصور المختلفه ثم نسقها تنسيقاً علمياً منظماً . وقد بدأ مونچ عام ١٧٩٥ بالقاء محاضراته عن الهندسة الوصفية فى مدرسة École normale وبعدذلك فى مدرسة الهندسه بباريس École Polytéchnique . والى هذه المحاضرات القيمة التى جمعها مونچ فى كتاب أصدره عام ١٧٩٨ يرجع الفضل فى تلك المكانة العالية التى تبوأها هذا العلم فى زمن قصير سواء فى هذه المدرسة أو فى مدارس الهندسة التى أنشئت بعدها فى الدول الاخرى — والتى ظل يشغلها للآن . هذا وقد ولد مونچ عام ١٧٤٦ وتوفى عام ١٨١٨ واضطهد كثيراً أثناء حياته لمبادئه السياسية وتعلقه بأنصار الثورة الفرنسية ونابليون .

لهذا الغرض طرق [١] مختلفة يراعى فيها جميعاً أن يكون تمثيل أية مجموعة فراغية بواسطة شكل مستو يعبر عنها من حيث الهيئة والوضع تعبيراً دقيقاً ويسمح باستنباط وقياس أبعادها الحقيقية [٢].

والفكرة الأساسية التى تنبنى عليها هذه الطرق هى فكرة « الاسقاط » وذلك بأن نفترض نقطة ثابتة فى الفضاء تسمى *مركز الاسقاط* ونصل هذا المركز بمستقيمات الى نقط المجموعة الفراغية المراد تمثيلها فاذا تقاطعت هذه المستقيمات التى يطلق عليها اسم *الاشعة الاسقاطية* مع مستو معلوم يسمى *مستوى الاسقاط* فان نقط التقاطع يتألف منها الشكل البيانى المطلوب الممثل للمجموعة والذى يسمى لذلك *مسقط* المجموعة الفراغية من المركز المعلوم على المستوى المعلوم .

فاذا كان مركز الاسقاط على بعد نهائى محدود أطلق على هذه الطريقة اسم *طريقة الاسقاط المركزى* أو *المنظور* [٣] . أما اذا تصورنا ابتعاد المركز الى

(١) توجد طرق تمثيليه أخرى غير الرسومات المستوية مثل عمل النماذج الصغيرة للمنشئات وغيرها . غير أن هذه الطرق التى تستخدم فى بعض الأحوال التصويرية كما فى المعارض والمدارس وفى بعض الشئون الفنية لعمل التجارب واختبار المواد — ليست موضوع البحث فى هذا الكتاب .

(٢) من هنا نشأ تقسيم المسائل المتعلقة بالاشكال الفراغية الى مسائل وضعية ومسائل قياسية (بند ٦) فالقسم الأول يبحث فى بيان القواعد الأساسية « لرسم » أية مجموعة هندسية يراد تمثيلها وكذا « قراءة » رسم معين معبر عن مثل هذه المجموعة . أما القسم الثاني فيبحث فى كيفية استنباط المقاييس والابعاد الحقيقية للمجموعة من الشكل المستوى المبين لها .

(٣) هذه الطريقة هى أيضاً قديمة جداً ويغلب على الظن أنها كانت معروفة لدى قدماء الأغريق والرومان . على أن استعمالها فى صورة منتظمة بدأ فى ايطاليا فى القرن الخامس عشر حيث ظهر عام ١٤٣٦ أول كتاب عن المنظور باسم Della pictura libri tre لمؤلفه النابغة المشهور ليون باتيستا البرتي Leon Battista Alberti .

ما لا نهاية فان الاشعة الاسقاطية تؤول الى مستقيمات توازى جميعاً اتجاهاً ثابتاً ويسمى الاسقاط فى هذه الحالة **اسقاطاً متوازياً** كما يسمى الاتجاه الثابت **اتجاه الاسقاط**. ويكون الاسقاط المتوازى **مائلا** أو **عمودياً** على حسب كون اتجاه الاسقاط مائلا أو عمودياً على مستوى الاسقاط .

والمنظور هو أعم طرق الاسقاط المستعملة فى الهندسة الوصفية واكثرها بلاغة فى التعبير عن المجسمات الفراغية المراد تمثيلها ولكنه فى الوقت نفسه أقلها سهولة فى تعيين الابعاد الحقيقية . أما أسهل طرق الاسقاط فى تعيين الابعاد الحقيقيـة فهى طريقة **الاسقاط العمودى** . ولهـذا السبب يلجأ المهندس الى استخدام الاسقاط العمودى (طريقة مونج وطريقة الاسقاط الرقمى) فى رسوماته الفنية «**كلغة**» يتخاطب بها مع غيره من المهندسين والفنيين . أما اذا أراد عمل رسومات تصويرية توضيحية لغير الفنيين من الصناع والعمال فانه يستخدم لذلك تلك **الطرق التصويرية** كالمنظور والاسـقاط المتوازى المـائل والاسـقاط الاكسنمترى [1] . ويلاحظ أن **الاشكال والصور التوضيحية** التى سنستعملها فى المستقبل لشرح بعض المواضيع والمسائل الفراغية (أنظر مثلا شكل ١٤ أو ٣٧) ما هى إلا مساقط متوازية مائلة .

(١) هو إسقاط عمودى على مستو مائل على المستويات الرئيسية الثلاثة فى طريقة مونج (وهى المستوى الافقى والمستوى الرأسى والمستوى العمودى على خط الارض) وقد يكون الاسقاط مائلا على هذا المستوى فيسمى فى هذه الحالة «بالاسقاط الاكسمترى المائل» . والاسقاط الاكسنمترى من الطرق التصويرية المهمة ـــ خصوصاً فى الهندسة الميكانيكية ـــ التى لم يتسع نطاق الكتاب للبحث فيها .

الباب الاول

طريقة الاسقاط على مستويين متعامدين مع حذف خط الارض

الفصل الاول

حذف خط الارض

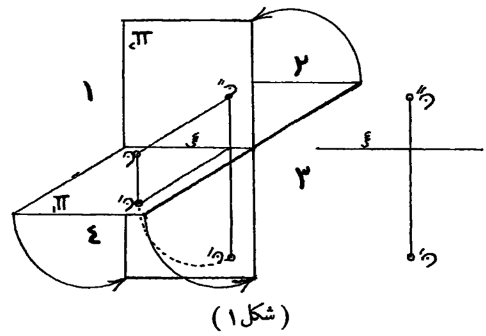
بند ١ : كلمة تمهيدية وتعاريف

معلوم أن المسقط العمودى لنقطة فى الفراغ على مستو هو موقع العمود النازل منها على المستوى . ولكل نقطة فى الفراغ مسقط [1] واحد على مستو معلوم . غير أن مسقط نقطة ما مثل ﻫ لا يحدد وضعها فى الفراغ إلا اذا علم بعدها عن مستوى الاسقاط . وهذا البعد يمكن تحديده إما بكتابته بجانب المسقط الذى يسمى فى هذه الحالة بالمسقط المرقوم وهى طريقة للاسقاط سنفرد لها باباً خاصاً فيما يأتى . أو باعطاء مسقط النقطة على مستو آخر عمودى على المستوى الاول . فاذا أسمينا المسقط الاول ﻫ′ والثانى ﻫ″ (شكل ١) فان بعد ﻫ″ العمودى عن خط تقاطع المستويين يساوى البعد المطلوب تحديده للنقطة ﻫ عن المستوى الاول. فالنقطة اذن يتحدد وضعها فى الفراغ اذا علم مسقطاها على مستويين متعامدين .

---

(١) لما كانت طريقة الاسقاط العمودى هى اكثر طرق الاسقاط استعمالا فى الرسوم الهندسية فكلمة « مسقط » أو «إسقاط» بغير تعريف تستعمل غالباً للدلالة على المسقط أو الاسقاط العمودى فقط إلا اذا كان سياق الكلام ينصرف الى غير ذلك .

يطلق عليهما اسم مستويي الاسقاط ويختار أحدهما غالباً أفقياً ويسمى المستوى الافقي والآخر رأسياً ويسمى المستوى الرأسي وسنرمز لهذين المستويين بالرمزين Π_1 ، Π_2 على التوالى . ويسمى خط تقاطعهما ع خط الارض كما تسمى م' بالمسقط الافقي ، م'' بالمسقط الرأسي للنقطة م . ولرسم المسقطين معاً على مستو واحد — هو مستوى الورقة — نتصور دوران أحد مستويي الاسقاط حول خط الارض الى أن ينطبق تماماً على الآخر ويكون ذلك إما بادارة Π_1 فى الاتجاه المبين فى (شكل ١) الى أن ينطبق على Π_2 أو بادارة Π_2 فى الاتجاه المضاد للاتجاه المبين فى (شكل ١) الى أن ينطبق على Π_1 أى بحيث ينطبق النصف الأعلى من Π_2 على النصف الخلفى من Π_1 وينطبق النصف الأسفل من Π_2 على النصف



(شكل ١)

الأمامى من Π_1 وبذا نحصل على المسقطين م' ، م'' للنقطة م وقد أمكن رسمهما فى مستو واحد ويكون بعد م عن Π_1 أو Π_2 مساوياً لبعد م'' أو م' عن خط الارض ع على التوالى ويسمى المستقيم م' م'' العمودى على خط الارض بخط التناظر .

ويقسم المستويان الرئيسيان للاسقاط Π_1 ، Π_2 الفراغ الى أربعة زوايا زوجية هى المبينة فى (شكل ١) بالارقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ وعلى حسب ما تكون النقطة واقعة

داخل أحد هذه الزوايا الزوجية يكون بعداها عن Π_1 ، Π_2 : (+ ، +) ، (+ ، –) ، (– ، –) ، (– ، +) على التوالى . واذا فرضنا نقطة مثل ب داخل الزاوية الزوجية الثانية أو الرابعة بحيث يكون بعداها عن Π_1 ، Π_2 متساويين فى المقدار ومختلفين فى الاشارة فانه يحدث عند تطبيق أحد مستوى الاسقاط على الآخر كما تقدم — أن ينطبق مسقطا النقطة بحيث يكون ب′ = ب″ (قارن شكل ٦) .

والمحل الهندسى لكل نقطة فى الفراغ يكون بعداها عن Π_1 ، Π_2 متساويين فى المقدار ومختلفين فى الاشارة وذلك مثل النقطة ب السالفة الذكر — هو المستوى المنصف للزاويتين الزوجيتين الثانية والرابعة . ويطلق على هذا المستوى اسم *مستوى الائتلاف*[1] .

هذه الطريقة للاسقاط المسماة *بطريقة الاسقاط على مستويين متعامدين أو طريقة مونج* نسبة الى واضعها « *جاسبار مونج* »[2] الذى يرجع اليه الفضل فى وضع أسس الهندسة الوصفية كعلم هى الطريقة التى نريد فيما يلى أن ندخل عليها بعض التعديل فارضين أن الطالب قد ألم بمبادئها الاساسية .

بند ٢ : معنى حذف خط الارض وتأثيره والاسباب الداعية لذلك

(شكل ٢) يبين مسقطى نقطة مثل ه على مستوى الاسقاط الرئيسيين Π_1 ، Π_2 المتقاطعين فى خط الارض ع . فاذا فرضنا أن خط الارض قد تحرك موازياً لنفسه حتى أخذ الوضع ع̅ المبين بالشكل وأن مسقطى النقطة لم يغيرا وضعيهما فمعنى ذلك أن بعد النقطة عن المستوى الافقى Π_1 قد زاد بمقدار ع — وهى

---

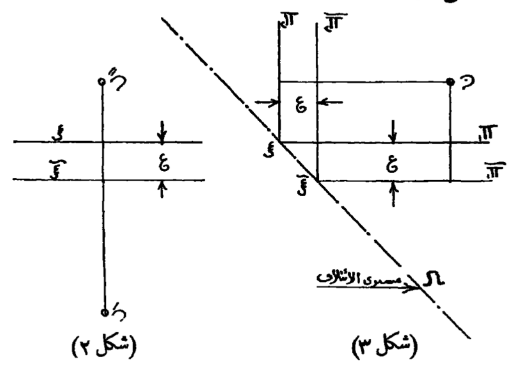
(١) سمى كذلك بالنظر الى العلاقة الائتلافية بين المسقطين الافقى والرأسى لأى شكل مستو (قارن بند ١٤) .

(٢) راجع هامش التمهيد .

المسافة التى تحركها خط الارض موازياً لنفسه — بينما بعدها عن المستوى الرأسى Π_2 قد نقص فى الوقت ذاته بنفس المقدار ع .

فاذا كانت النقطة ى ثابتة فى الفراغ فان معنى ذلك أن مستويى الاسقاط قد تحركا معاً واتخذا الوضعين $\bar{\Pi}_1$ ، $\bar{\Pi}_2$ كما هو مبين فى (شكل ٣) بحيث يبقى خط الارض موجوداً فى مستوى الائتلاف Ω الذى لا يتأثر لهذا السبب بتلك الحركة الانتقالية لخط الارض .

ومعنى هذا أن مستوى الائتلاف ثابت لجميع اوضاع مستويى الاسقاط بفرض ثبوت اتجاهى هذين المستويين وثبوت المسقطين ى′ ، ى″ فى (شكل ٢) لنقطة ثابتة فى الفراغ مثل ى .



(شكل ٢) (شكل ٣)

أو بعبارة اخرى كل إتجاه معين لخط الارض — وبالتالى لخطوط التناظر — يحدد مستوى ائتلاف ثابت يحتوى جميع نقط الفراغ التى ينطبق حينئذ المسقطان الافقى والرأسى لكل منها على بعضهما . فاذا تغير الاتجاه تغير المستوى .

ولنأخذ الآن مثلا صغيراً عن ايجاد البعد الحقيقى بين النقطتين ا ، ب

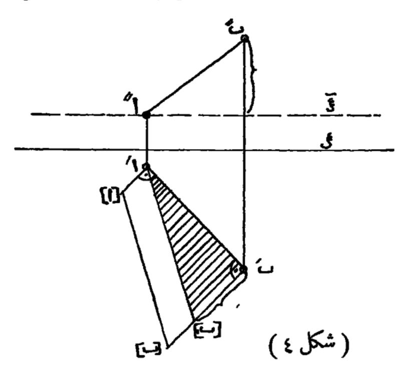
فى (شكل ٤) المعلومة كل منهما بمسقطيها الافقى والرأسى.

فهذا البعد يمكن ايجاده باحدى طريقتين :

(١) نطبق شبه المنحرف ب ا اَ بَ على المستوى الافقى بأن نأخذ اَ [ا] ، بَ [ب] مساويين لارتفاع ا ، ب عن المستوى الافقى على التوالى ومقيسين من المسقط الرأسى فيكون البعد الحقيقى هو [ا] [ب]

(٢) نرسم المثلث المظلل [ب١] بَ اَ الذى فيه الضلع بَ [ب١] عمودى على اَ بَ ومساو للفرق بين ارتفاعى ب ، ا عن المستوى الافقى فيكون البعد الحقيقى المطلوب هو اَ [ب١].

وهذا المثلث يمكن اعتباره تطبيقاً للمستوى المسقط(١) أفقياً للمستقيم ا ب على مستو افقى مار بالنقطة ا أو يمكن اعتباره تطبيقاً للمستوى المسقط على المستوى الافقى نفسه اذا تخيلنا أن خط الارض ع قد انتقل موازياً لنفسه حتى أخذ الوضع عَ .



(شكل ٤)

فاذا استعملنا الطريقة الثانية وهى الأسهل ظهر لنا امكان الاستغناء عن خط الارض كلية أعنى نفس الخط أما الاتجاه فلا بد أن يكون معلوماً لانه دائماً

---

(١) المستوى المسقط (بضم الميم وكسر القاف) لمستقيم على مستو مثل II هو المستوى المعين بالمستقيم والعمود النازل من احدى نقطه على المستوى II فالمستوى المسقط أفقياً لمستقيم هو المستوى المعين بالمستقيم نفسه ومسقطه الافقى.

عمودى على خطوط التناظر وهذا الاتجاه هو الذى يحدد اتجاه مستويى الاسقاط الرئيسيين Π_1 ، Π_2 .

والذى ينتج من حذف خط الارض هو ألا يكون لدينا مستويان ثابتان للاسقاط أو بمعنى آخر أن تصبح أبعاد النقط عن مستويى الاسقاط (اذا افترضنا وجودهما) غير معروفة . أما العلاقة بين النقطتين ا ، ب مثلا فى (شكل ٥) فهى لا تتأثر بحذف خط الارض وكذلك نقطة تقابل المستقيم ا ب مع مستوى الائتلاف وهى النقطة ھ التى مسقطاها فى (شكل ٥) هما ھ′ = ھ″ حيث يتقابل المسقطان الافقى والرأسى للمستقيم — هذه النقطة ثابته ولا تتأثر هى الأخرى بحذف خط الارض ويطلق على النقطة ھ اسم أثر المستقيم ا ب مع مستوى الائتلاف ويلاحظ أن آثار المستقيمات والمستويات مع مستوى الائتلاف هى الآثار الوحيدة التى يجوز أن يكون لها وجود بعد حذف خط الارض . اذ لا معنى للكلام على الأثر الافقى لمستقيم مثلا أى نقطة تقابله مع المستوى الافقى فى حين أن هذا المستوى ليس له وجود وكل ما يعرف عنه أنه يوازى وضعاً خاصاً .

(شكل ٥)

يؤخذ مما تقدم أن العلاقة بين أوضاع النقط والمستقيمات والمستويات تحدد تماماً بمعرفة المسقطين مع حذف خط الارض .

أما أوضاع النقط والمستقيمات والمستويات بالنسبة الى مستويات الاسقاط

فلا يمكن تحديدها فى هذه الحالة . ومما لاشك فيه أن هذا النقص ليس له أدنى تاثير على ما يراد تمثيله من الاشكال الهندسية .

ومن المسلم به أن خط الارض الذى تعودنا فى الماضى على استعماله ما هو إلا مستقيم اختيارى أقحم على رسوماتنا عند بدأ الدراسه لغرض واحد هو توضيح طريقة مونج الأصلية للاسقاط وليس له فى الواقع وجود ولذلك تجب المبادرة الى حذفه بعد أن أدى وظيفته .

وسنرى فوق هذا أن هذا الحذف يساعد على تسهيل حل المسائل لأنه يحررنا من التقيد بمستويات ثابتة للاسقاط .

الفصل الثانى

تمثيل النقطة والخط المستقيم والمستوى وتقسيم المسائل المتعلقة بها الى مسائل وضع ومسائل قياس

بند ٣ : النقطة

يتحدد وضع النقطة فى الفراغ كما قدمنا بمعلومية مسقطيها مثل النقطة ا فى (شكل ٦) حيث يحدد خط التناظر ا′ ا″ إتجاه خط الارض وبالتالى إتجاه مستوى الاسقاط . ويجوز أن يكون المسقط الرأسى لنقطة ما فوق أو تحت المسقط الافقى على أننا لانستطيع أن نفرق الآن بين نقط الزاوية الزوجية الاولى أو الثانيـة الخ لانه لا وجود لمستويات أسقاط ثابتة .

وإذا انطبق مسقطا أى نقطة على بعضهما مثل النقطة ب فى (شكل ٦) فهذا معناه أن النقطة واقعة فى مستوى الائتلاف .

ا″

ب′ = ب″

ا′

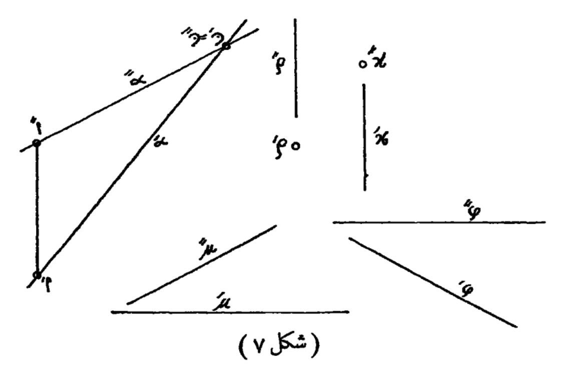
(شكل ٦)

بند ٤ : الخط المستقيم

يتحدد وضع المستقيم كذلك بمعلومية مسقطيه الممتدين الى ما لا نهاية (لأن المقصود دائماً بالخط المستقيم أنه غير محدود الطول أما المستقيم المحدد بنقطتين من نقطه فيعبر عنه بأنه «جزء» من مستقيم).

ويسمى المستوى المعين بالمستقيم ومسقطه الافقى بالمستوى المُسقِط (بضم الميم وكسر القاف) أفقياً للمستقيم . ومثل ذلك يقال عن المستوى المسقط رأسياً للمستقيم أو المستوى المسقط للمستقيم على المستوى الرأسى .

ولابد بجانب المسقطين من معرفة اتجاه خطوط التناظر . ويتعين هذا الاتجاه اذا حددنا مسقطى نقطة واحدة مثل ا من نقط المستقيم α فى (شكل ٧) . فاذا أهملنا تعيين هذا الاتجاه كما هو الحال فى المستقيم μ مثلا فمعنى ذلك أننا نفرض أن هذا الاتجاه رأسى وقد جرت العادة على الأخذ بهذا الفرض إلا اذا غيرنا وضع مستويات الاسقاط (بند ١٩) .



(شكل ٧)

والمستقيمات ϱ ، $\varkappa$ ، μ ، φ المبينة فى (شكل ٧) ذوات أوضاع خاصة بالنسبة لمستويى الاسقاط . فالمستقيم ϱ رأسى أى عمودى على اتجاه المستوى الافقى والمستقيم $\varkappa$ عمودى على المستوى الرأسى والمستقيم μ مواز للمستوى الرأسى ويسمى مستقيماً أمامياً والمستقيم φ مواز للمستوى الافقى ويسمى لذلك مستقيماً أفقياً [١] .

(١) يلاحظ هنا أننا نقصد بقولنا « عمودى على المستوى الرأسى » أو « مواز للمستوى الافقى » الخ هو أن نقول « عمودى على اتجاه المستوى الرأسى » و « مواز لاتجاه المستوى الافقى » الخ وسيجد القارىء هذا الاصطلاح كثيراً فى المستقبل مستعملا فى المعنى المتقدم .

بند ٥ : المستوى

يتحدد وضع المستوى فى الفراغ بمعلومية مسقطى ثلاث نقط من نقطه أو نقطة وخط مستقيم أو مستقيمين متقاطعين أو متوازيين وهذه الحالات الأربع مبينة (فى شكل ٨).

ولابد من التنبيه هنا مرة أخرى أنه لا يمكن تمثيل المستوى فى هذه الطريقة للاسقاط بأثريه مع مستويى الاسقاط لأن مستويات الاسقاط ليس لها هنا وجود فعلى والأثر الوحيد الممكن رسمه هنا هو أثر المستوى مع مستوى الائتلاف وهو الخط الواصل بين نقطتى تقابل أى مستقيمين من مستقياته مع مستوى الائتلاف (بند ٢) وفى (شكل٨) يمثل المستقيم $\sigma'=\sigma''$ الذى يصل النقطتين ا'=ا" ، ب'=ب" (حيث ا ، ب نقطتا تقاطع المستقيمين α ، β مع مستوى الائتلاف على التوالى) أثر المستوى Γ مع مستوى الائتلاف.

وهناك بعض أوضاع خاصة للمستوى مبينه فى (شكل٩) فالمستوى K عمودى على المستوى الرأسى والمستوى P عمودى على المستوى الافقى والمستوى Φ مواز للمستوى الافقى والمستوى Y عمودى على كل من المستويين الافقى والرأسى أى عمودى على اتجاه خط الارض.

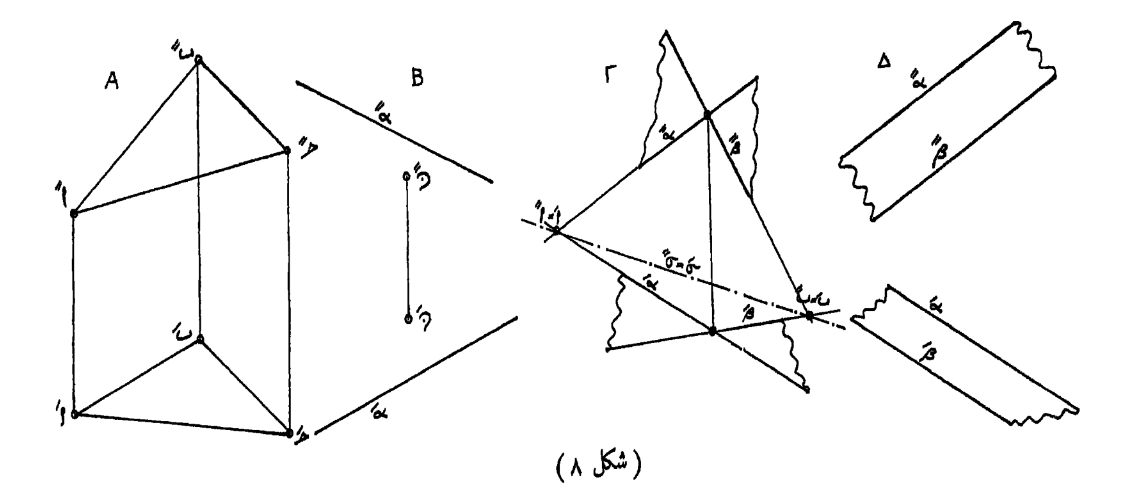
بند ٦ : المسائل المتعلقة بالنقطة والخط المستقيم والمستوى

يمكن تقسيم المسائل التى تتناول النقطة والخط المستقيم والمستوى فى اية طريقة من طرق الاسقاط فى الهندسة الوصفيه الى قسمين رئيسين :—

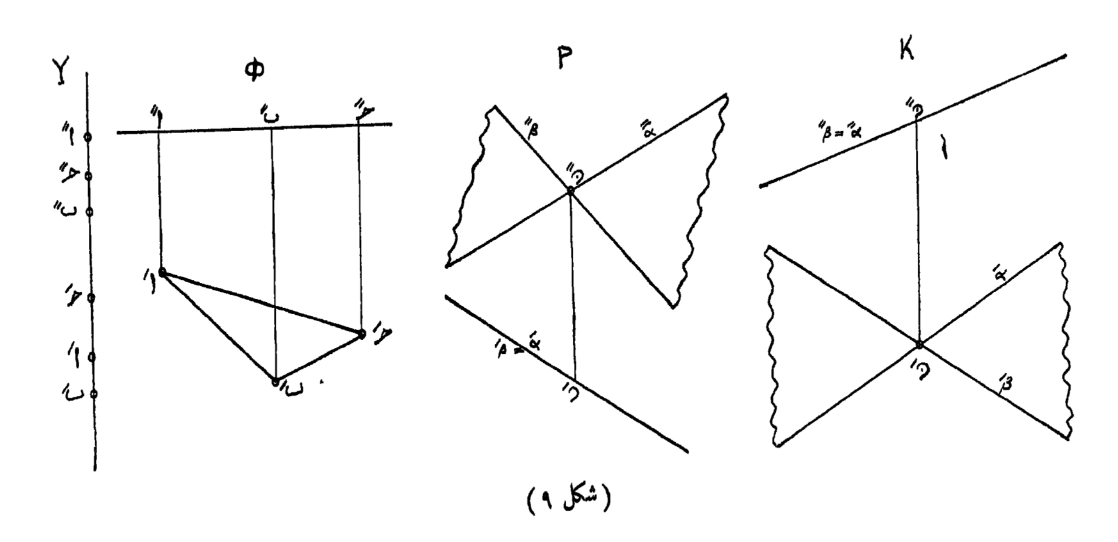
مسائل على الوضع أو مسائل وضعية ، مسائل قياس أو قياسية

فالأول منهما يبحث فى العلاقة بين النقطة والخط المستقيم والمستوى ووضع كل منها بالنسبة للآخر ويشمل :

المسألة الأولى : (ا) متى تقع النقطة أو الخط المستقيم فى المستوى أو بتعبير



(شکل ۸)



(شكل ٩)

أوضح اذا علم أحد مسقطى نقطة أو خط مستقيم واقع فى مستو معلوم فالمطلوب ايجاد المسقط الآخر

(ب) تعيين المستقيمات المهمة ذوات الأوضاع الخاصة بالنسبة لمستوى الاسقاط وهى المستقيمات الأفقية والأمامية والمستقيمات ذوات الميل الأعظم .

المسألة الثانية : اذا علم مستو ونقطة خارجة عنه فالمطلوب تعيين المستوى المار بهذه النقطة موازياً للمستوى المعلوم .

المسألة الثالثة : ايجاد خط متقاطع مستويين معلومين .

المسألة الرابعة : ايجاد نقطة تقاطع مستقيم معلوم مع مستو معلوم .

أما القسم الثانى أى *مسائل القياس* فيبحث فى كيفية تعيين الابعاد الحقيقية وقياس الزوايا وتحديد الاشكال الحقيقية . . الخ . ويشمل :—

المسألة الأولى : (ا) اذا علم مستو ونقطة فالمطلوب تعيين العمود على المستوى من هذه النقطة .

(ب) اذا علم مستقيم ونقطة فالمطلوب ايجاد المستوى المار بالنقطة عمودياً على المستقيم .

المسألة الثانية : وهى عملية تطبيق مستو ليصبح موازياً لأحد مستويات الاسقاط .

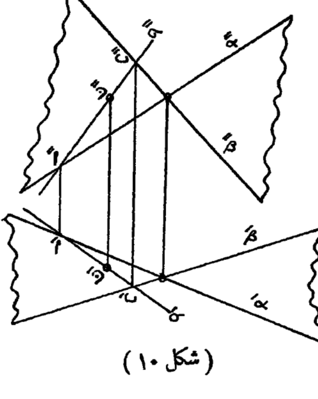
وليلاحظ القارىء أننا سنراعى هذا التقسيم للمسائل فى المستقبل عند الكلام على الاسقاط الرقمى والمركزى .

الفصل الثالث

مسائل الوضع

بند ٧ : المسألة الاولى

(أ) اذا علم أحد مسقطى مستقيم σ (وليكن المسقط الرأسى σ″) واقع بتمامه فى مستو A معلوم بالمستقيمين المتقاطعين α ، β فالمطلوب ايجاد مسقطه الآخر (شكل ١٠).



(شكل ١٠)

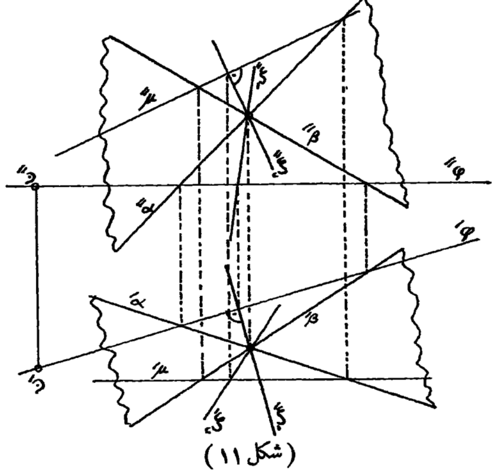
لما كان المستوى A غير محدود وممتداً الى ما لا نهاية فالمسقط الرأسى المعلوم σ″ للمستقيم يجوز أن يأخذ أى وضع ومن حيث أن المستقيم σ واقع فى المستوى A فهو يقطع كل مستقيم آخر موجود معه فى هـــذا المستوى أو يوازيه. فاذا قطع المسقط الرأسى σ″ للمستقيم المسقطين الرأسيين α″ ، β″ للمستقيمين المعينين للمستوى A فى النقطتين ا″ ، ب″ على التوالى فان المسقطين الافقيين ا′ ، ب′ للنقطتين ا ، ب يوجدان على α′ ، β′ وحينئذ يكون المسقط الافقى المطلوب σ′ هو المستقيم الواصل بين ا′ ، ب′ .

واذا كان المعلوم هو أحد مسقطى نقطة مثل ﻫ موجودة فى مستو معلوم مثل A فان من السهل ايجاد مسقطها الآخر بأن نمر بها مستقيما واقعاً فى

المستوى A ونعين مسقطه المجهول كما تقدم فيكون المسقط المطلوب تعيينه للنقطة ף موجوداً على هذا المسقط الاخير كما هو ظاهر فى (شكل ١٠). على أنه يحسن أن يختار المستقيم المار بالنقطة إما أفقياً أو أمامياً كما سيأتى بيانه :

(ب) المستقيمات المهمة فى المستوى ذوات الاوضاع الخاصة (شكل ١١)

المستقيمات المهمة فى مستو معلوم A إما مستقيمات افقية مثل φ أو امامية مثل μ أو مستقيمات ذوات ميل اعظم مثل ع، ع١ ع٢

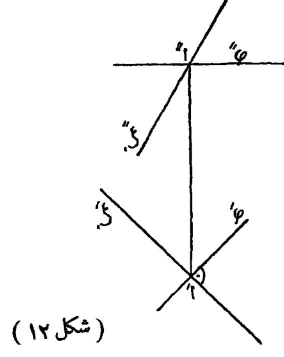


(شكل ١١)

فالمستقيمات الأفقية والأمامية هى مستقيمات واقعة فى المستوى A بحيث توازى الأولى المستوى الافقى وتوازى الثانية المستوى الرأسى . وعلى ذلك فالمسقط الرأسى φ″ لمستقيم أفقى والمسقط الأفقى μ′ لمستقيم أمامى يوازى كل منهما اتجاه خط الارض وبذا يتحدد وضع أى واحد منهما لأن المسقط الآخر يمكن الحصول عليه كما بينا فى الجزء (ا) من هذه المسألة .

أما المستقيمات ذوات الميل الأعظم فهى إما ذوات ميل أعظم ع١ بالنسبة للمستوى الافقى . والمسقط الافقى ع١′ لأى واحد من هذه المستقيمات يكون عمودياً على المسقط الافقى φ′ لاى مستقيم أفقى فى المستوى A (قارن شكل ١١) وذلك لأن ع١ ، φ متعامدان فى الفراغ . وسميت هذه المستقيمات كذلك لأن ميلها على المستوى الافقى كما هو معلوم أكبر من ميل أى مستقيم آخر فى المستوى ويساوى ميل المستوى A نفسه على المستوى الافقى .

و إما مستقيمات ذوات ميل أعظم ع٢ بالنسبة للمستوى الرأسى . والمسقط الرأسى ع٢″ لأى واحد من هذه المستقيمات يكون عمودياً على المسقط الرأسى μ″ لاى مستقيم أمامى فى المستوى A وميل هذه المستقيمات على المستوى الرأسى يساوى ميل المستوى A نفسه على المستوى الرأسى .



(شكل ١٢)

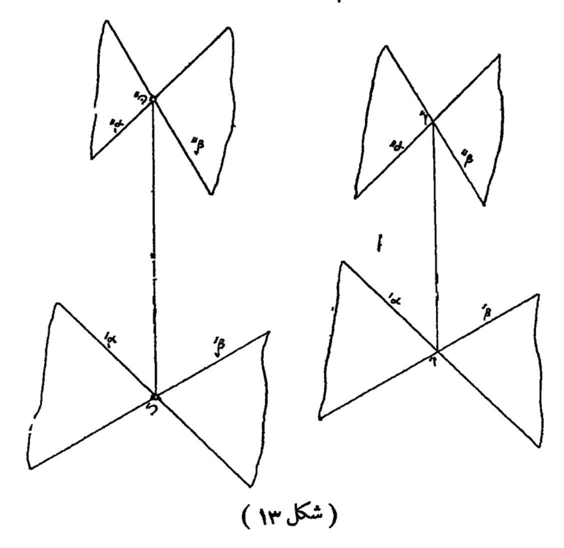
ولحل المسألة المشار اليها فى آخر الجزء (ا) وهى تعيين المسقط الافقى ه′ مثلا لنقطة واقعة فى مستو معين ومعلوم مسقطها الرأسى ه″ فانه يحسن أن نمر بالنقطة المستقيم الافقى φ الواقع فى المستوى والذى يمكن رسم مسقطه الرأسى φ″ بغير عناء لانه المستقيم المار بالمسقط المعلوم ه″ موازياً لخط الارض ثم نجد المسقط الافقى φ′ لهذا المستقيم فتكون ه′ واقعة عليه وهذا الحل مبين أيضاً فى (شكل ١١) .

<u>ملحوظ هامة</u> : يتعين المستوى تمام التعيين بمعلومية أحد مستقيمات ذوات الميل الاعظم لأنه اذا فرضنا فى (شكل ١٢) أن هذا المستقيم ع١ ذو ميل أعظم بالنسبة

للمستوى الافقى II، ورسمنا فى المسقط الرأسى مستقيما φ" موازياً لخط الارض وقاطعاً ع، " فى ا" واعتبرنا φ" المسقط الرأسى لمستقيم أفقى φ واقع فى المستوى فأنه يمكن ايجاد مسقطه الافقى φ' إذ هو العمود المقام من ا' على ع،' . فالمستقيمان ع، ، φ يحددان المستوى .

بند ٨ : المسألة الثانية

اذا علم مستو A ونقطة خارجة عنه مثل ن فالمطلوب تعيين المستوى A، المار بالنقطة ن موازياً للمستوى المعلوم A (شكل ١٣)



(شكل ١٣)

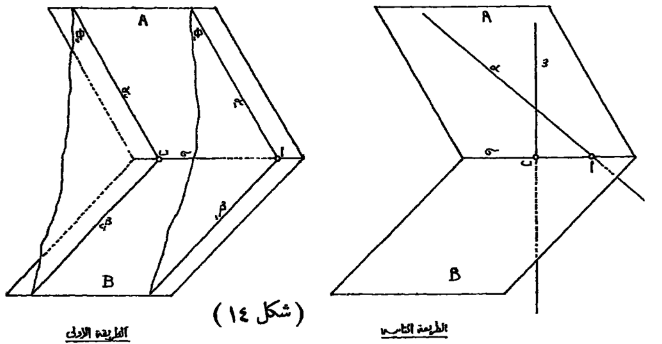
لحل هذه المسألة نرسم من النقطة المعلومة مستقيمين يوازيان أى مستقيمين متقاطعين وموجودين بتمامهما فى المستوى المعلوم . فاذا كان المستوى A معلوماً

بالمستقيمين المتقاطعين α ؟ β فاننا نمد من ✓ المستقيمين α_1 ؟ β_1 الموازيين الى α ؟ β على التوالى ومعنى ذلك أن نرسم من ✓'' المسقطين الرأسيين α_1'' ؟ β_1'' موازيين الى α'' ؟ β'' ومن ✓' المسقطين الافقيين α_1' ؟ β_1' موازيين الى α' ؟ β' على التوالى . وبذا يتحدد المستقيمان α_1 ؟ β_1 المتقاطعان فى ✓ واللذان يعينان المستوى المطلوب A_1 .

بند ٩ : المسألة الثالثة

المطلوب ايجاد خط تقاطع مستويين معلومين A ؟ B .

هناك طريقتان لحل هذه المسألة وهما مبينان معاً فى (شكل ١٤)



(شكل ١٤)

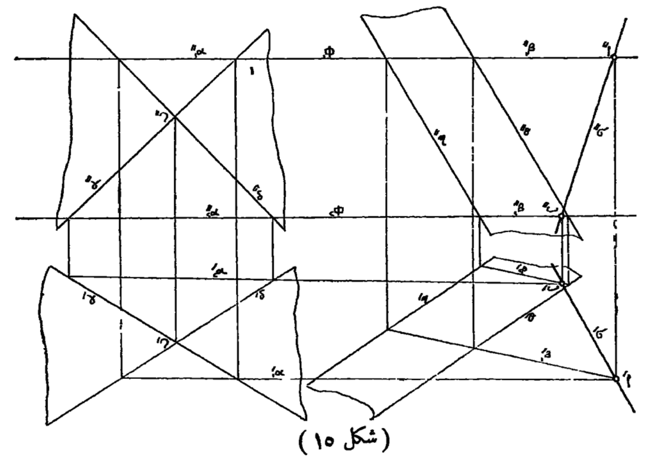
الطريقة الأولى — الطريقة الثانية

فالطريقة الأولى تتلخص فى استعمال مستويين مساعدين Φ_1 ؟ Φ_2 يختاران فى أوضاع خاصة بسيطة . فالمستوى Φ_1 يقطع كلا من المستويين المعلومين A ؟ B فى مستقيمين α_1 ؟ β_1 يتقاطعان فى النقطة ا من نقط خط التقاطع المطلوب σ وبالمثل يعطينا المستوى Φ_2 المستقيمين α_2 ؟ β_2 المتقاطعين فى النقطة ب فيكون خط التقاطع σ هو المستقيم ا ب .

أما الطريقة الثانية فتتلخص كما يتضح من (شكل ١٤) أيضـــاً فى رسم أى

مستقيمين α ، β فى أحد المستويين وليكن A ثم تعيين نقطتى تقاطعهما ا، ب مع المستوى الآخر B فيكون خط التقاطع المطلوب σ هو المستقيم اب وسنتكلم عن هذه الطريقة بعد الفراغ من حل المسألة الرابعة أما الآن فسنشرح حل المسألة إسقاطياً بالطريقة الاولى :

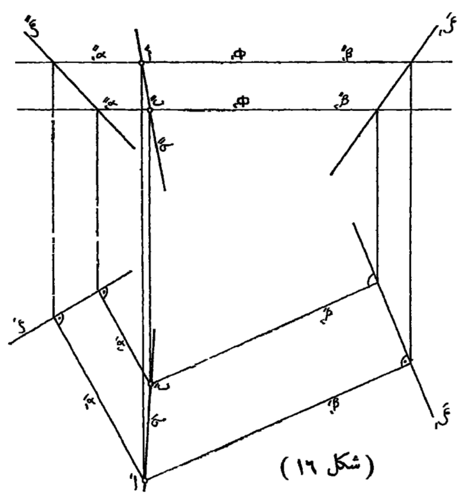
ليكن المستوى A معلوماً (شكل ١٥) بالمستقيمين γ ، δ المتقاطعين فى ج والمستوى B معلوماً بالمستقيمين المتوازيين η ، ϑ .



(شكل ١٥)

فلما كان وضع المستويين المساعدين Φ_1 ، Φ_2 إختيارياً فالأسهل هنا أن نختارهما فى أوضاع موازية لأحد مستويى الاسقاط وليكن المستوى الافقى فالمسقطان الرأسيان لخطى تقاطع المستوى المساعد الاول Φ_1 مع المستويين المعلومين A ، B ينطبقان فى هذه الحالة على نفس المستقيم الافقى الذى يمثل المستوى المساعد Φ_1 أما المسقطان الافقيان α'_1 ، β'_1 لخطى التقاطع α_1 ، β_1

فاننا نجدهما بالطريقة التى سبق بيانها فى (بند٧) . فاذا تقاطع هذان المسقطان فى ا′ كانت هى المسقط الافقى للنقطة ا فى (شكل١٤) . أما مسقطها الرأسى ا″ فموجود على كل من خط التناظر المرسوم من ا′ والمستقيم الافقى الممثل للمستوى المساعد Φ_1 فيكون إذن نقطة تقاطعهما . وبالمثل نجد المسقطين ب′ ، ب″ للنقطة الثانية ب وبذا يتحدد مسقطا خط التقاطع المطلوب : σ' = ا′ ب′ ، σ'' = ا″ ب″ .



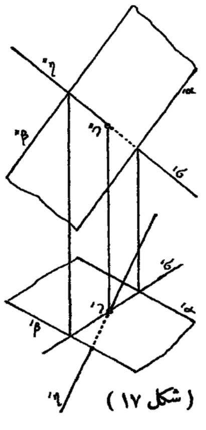
(شكل ١٦)

واذا كان كل من المستويين A ، B معلوماً بمستقيم ذى ميل أعظم : ع ، ع$_1$ بالنسبة للمستوى الافقى مثلا فان العمل يكون أبسط اذ أن المسقطين الافقيين α_1' ، β_1' للمستقيمين α_1 ، β_1 يكونان كما هو مبين فى (شكل ١٦) عموديين على المسقطين الافقيين ع′ ، ع$_1'$ لكل من ع ، ع$_1$ على التوالى . وبالمثل يمكن ايجاد α_2'' ، β_2'' ثم نعين المسقطين σ' ، σ'' لخط التقاطع كما تقدم .

بند ١٠ : المسألة الرابعة

اذا علم مستقيم η ومستو A فالمطلوب ايجاد نقطة تقاطعهما ℘ .

لحل هذه المسألة فراغياً نمر بالمستقيم المعلوم η مستوياً مساعداً ويحسن للسهولة أن يكون أحد المستويين المسقطين للستقيم (بند ٤) . ثم نجد خط التقاطع σ بين المستوى المساعد والمستوى الاصلى A فتكون ℘ هى نقطة تقاطع المستقيمين η ، σ .



(شكل ١٧)

و (شكل ١٧) يمثل المستوى المعلوم A بالمستقيمين المتوازيين α ، β فاذا كان η' ، η'' هما مسقطا المستقيم η المطلوب ايجاد نقطة تقاطعه ℘ مع المستوى A وأمررنا بهذا المستقيم المستوى المسقط له على المستوى الرأسى فانه يقطع المستوى A فى مستقيم σ ينطبق مسقطه الرأسى σ'' على المسقط الرأسى η'' للستقيم المعلوم . وحيث إن σ مستقيم واقع فى المستوى A وقد علم مسقطه الرأسى σ'' فمن السهل ايجاد مسقطه الافقى σ' كما قدمنا فى (بند٧) .

فاذا قطع σ' المسقط الافقى η' للستقيم المعلوم فى ℘' كانت ℘' هى المسقط الافقى لنقطة التقاطع ℘ التى يقع مسقطها الرأسى ℘'' على المسقط الرأسى η'' للستقيم المعلوم .[١]

---

(١) لتعيين الجزء المشاهد والجزء المختفى (المرموز له بخطوط متقطعه) وراء المستوى من المستقيم η انظر بند ٢٧ .

والآن نشرح فى ايجاز الطريقة الثانية المبينة فى (شكل ١٤) لايجاد خط تقاطع مستويين .

فلنفرض لذلك فى (شكل٣٦) أن المطلوب ايجاد خط تقاطع مستوى المثلث ا ب حـ مع مستوى متوازى الاضلاع م ل و هـ فان المسألة تؤول الى ايجاد نقطتى تقابل أى ضلعين من أضلاع المثلث مثل ا ب ، ا حـ مع مستوى متوازى الاضلاع . فاذا أسمينا نقطتى التقاطع ى$_1$ ، ى$_2$ كان خط التقاطع المطلوب هو ى$_1$ى$_2$.

الفصل الرابع

الائتلاف المتوازى والائتلاف المطلق

بند ١١ : الائتلاف المتوازى

اذا افترضنا وجود علاقة هندسية بين شكلين مستويين سه ، سه′ بحيث أن كل نقطة فى أحد الشكلين تناظرها نقطة أو اكثر فى الشكل الآخر فانه يطلق على هذه العلاقة عادة اسم *مناظرة بين النقط* . وتوصف هذه المناظرة على الخصوص بانها *مناظرة الفرد للفرد* اذا لم توجد سوى *نقطة واحدة* فى أحد الشكلين مناظرة لكل نقطة فى الشكل الآخر(١) .

فاذا كانت العلاقة الهندسية بين الشكلين *خطية* فوق كونها مناظرة الفرد للفرد بمعنى أن كل مستقيم فى أحد الشكلين يناظره مستقيم (واحد) فى الشكل الآخر(٢)ـــ وكثيراً ما توصف مثل هذه العلاقة على سبيل الاختصار بأنها *مناظرة الفرد للفرد بين نقط ومستقيمات الشكلين* — قيل للشكلين إنهما *مؤتلفان* أو

---

(١) اذا كانت ا ، ا′ نقطتين متغيرتين فى المستويين A ، A′ على التوالى وكان (س ، ص) احداثيي ا بالنسبة الى محورين متعامدين مرسومين فى المستوى A ، (س′ ، ص′) احداثيي ا′ بالنسبة الى محورين آخرين فى المستوى A′ قيل إن ا′ تناظر ا اذا كانت س′ = د١ (س ، ص) ، ص′ = د٢ (س ، ص) حيث د١ ، د٢ دالتان حيثما اتفق للمقادير المحصورة بين الاقواس . فاذا كان كل منهما دالة من الدوال ذوات القيمة الواحدة كانت المناظرة « مناظرة الفرد للفرد » .

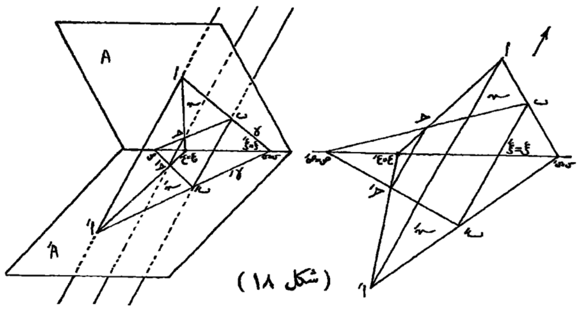
(٢) لا ينتج من مناظرة الفرد للفرد بين نقط شكلين مستويين أن المستقيم يناظره مستقيم ولذا كان هذا الشرط ضرورياً لتعريف الائتلاف . وإنما يستنتج من مناظرة الفرد للفرد أنه اذا كانت العلاقة خطية أيضا كان كل مستقيم فى أحد الشكلين يناظره مستقيم واحد فقط فى الشكل الآخر .

مؤتلفان اسقاطياً (بند ٥٦) وقد يكون هذا الائتلاف مركزياً (بند ٦٣) أو متوازياً . ويعتبر الائتلاف المتوازى حالة خاصة من الائتلاف المركزى (بند ٦٩) .

ويجب أن يتوافر الشرطان الآتيان فى شكلين مؤتلفين ليكون بينهما ائتلاف متواز :—

أولا : أن المستقيمات التى تصل أزواج النقط المتناظرة توازى جميعاً اتجاهاً ثابتاً

ثانياً : أن المستقيمات المتناظرة تتقابل جميعاً على مستقيم ثابت .



(شكل ١٨)

وهناك حالتان يجب التمييز بينهما : الحالة التى يكون فيها الشكلان سه ، سه' فى مستويين مختلفين وهى حالة الاسقاط المتوازى . والحالة التى يكون فيها الشكلان سه ، سه' فى مستو واحد ويطلق عليها اسم الحالة المستوية للائتلاف المتوازى (شكل ١٨) .

وفى الحالة الاولى يدرك القارىء بسهولة أن كلا من الشرطين السابقين مترتب على الآخر .

واذا أسقطنا الشكلين سه ، سه' فى الحالة الأولى إسقاطاً متوازياً فى اتجاه واحد على مستو ثالث مثل B فمن الواضح أن مسقطيهما يكون بينهما ائتلاف متوازى من النوع المبين فى الحالة الثانية .

وكذلك اذا أمكن الحصول على شكلين سه، سه' كمسقطين فى اتجاه واحد وعلى مستو واحد لشكلين مستويين من النوع المبين فى الحالة الأولى فانه فى هذه الحالة أيضاً يكون الشرطان السابقان معبرين عن شرط واحد . ولما كان هذا ليس ظاهراً بالبداهة فى الحالة الثانية دائماً وهى الحالة المستوية — وإن كنا سنبرهن على صحته ضمناً فى بند ٦٢ حيث يمكن اعتبار النقطة الثابتة «م» نقطة فى اللانهايه — كان من الضرورى فى الوقت الحاضر اشتراط كل من الشرطين السابقين على حده .

ويسمى المستقيم الثابت *محور الائتلاف* وهو المحل الهندسى لكل نقطة تنطبق على المناظرة لها أو بتعبير آخر كل نقطة تناظر نفسها — كما يسمى اتجاه المستقيمات التى تصل أزواج النقط المتناظره *باتجاه الائتلاف* . ويسمى الائتلاف المستوى *عمودياً* أو *مائلا* حسبما تكون الزاوية التى يصنعها اتجاه الائتلاف مع المحور مساوية أو غير مساوية لزاوية قائمة .

ويتعين الائتلاف فى كلتا الحالتين المذكورتين آنفاً اذا علم المحور ع=ع' وزوج واحد من النقط المتناظرة مثل ا، ا' [1] لأنه اذا أريد بعد هذا ايجاد النقطة حـ' مثلا فى الشكل سه' المناظرة لنقطة ما مثل حـ فى الشكل سه نصل احـ ونمده الى أن يقطع المحور ع=ع' فى ع ثم نصل ا' ع فيكون هو المستقيم الذى يناظر ا ع . والنقطة المطلوبة حـ' تقع على ا' ع بحيث يكون حـ حـ' موازياً الى ا ا' وبذا تتعين حـ' (شكل ١٨) . واذا كانت ب إحدى نقط مستقيم مثل γ فى الشكل سه وكانت ب' النقطة المناظرة (وقد أمكن تعيينها كما تقدم) فى الشكل سه' كان المستقيم γ' المناظر الى γ هو المستقيم المار بالنقطة ب' ونقطة تقاطع γ مع المحور ع=ع' .

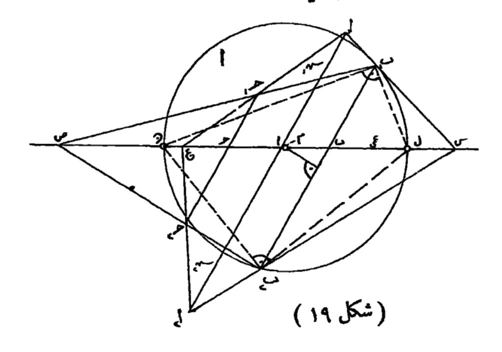
(١) أو ما يعادل هذه المعالم ويؤدى اليها مثل زوج من النقط المتناظرة وزوج من المستقيمات المتناظرة .

وبذا نستطيع ايجاد المستقيم فى أحد الشكلين الذى يناظر مستقيما معلوماً فى الشكل الآخر .

واذا طبقنا الطريقة السابقة على مستقيمين متوازيين فى أحد الشكلين وجدنا أن المستقيمين المناظرين لهما فى الشكل الآخر متوازيان أيضاً أى أن *خاصية التوازى تبقى محفوظة فى الائتلاف المتوازى* وهى نتيجة يمكن الحصول عليها مباشرة من تعريف الائتلاف المتوازى .

بند ١٢ : الحالة المستوية للائتلاف المتوازى

ينشأ عن وجود شكلين مؤتلفين $س_١$ ، $س_٢$ موجودين فى مستو واحد بعض النظريات والخواص نشير اليها فيما يلى (شكل ١٩) :—



(شكل ١٩)

(١) النسبة $\frac{ا_١}{ا_٢} = \frac{ا}{ا} = \frac{ب_١ ب}{ب_٢ ب} = \frac{ح_١ ح}{ح_٢ ح} = \ldots$ = مقداراً ثابتاً مثل ك

يسمى *نسبة الائتلاف المتوازى* وهذه النسبة تكون سالبة أو موجبة على حسب ما اذا كان أى زوج من النقط المتناظرة مثل $ا_١$ ، $ا_٢$ فى جهتين مختلفتين أو فى جهة واحدة على التوالى بالنسبة الى محور الائتلاف .

(٢) النسبة بين مساحتى أى شكلين مؤتلفين مثل س١، س٢ تساوى نسبة الائتلاف ك [١].

(٣) ولو أن الزوايا المتناظرة لا تكون على وجه العموم متساوية إلا أننا اذا رسمنا الدائرة التى مركزها م على محور الائتلاف والتى تمر بأى نقطتين متناظرتين مثل ب١، ب٢ (م هى نقطة تقاطع المحور مع العمود المقام على ب١ب٢ من منتصفه) فقطعت المحور فى ل، ى فمن الواضح أن الزاوية القائمة ل ب١ ى فى مجموعة الشكل س١ تناظرها الزاوية ل ب٢ ى فى مجموعة الشكل س٢ وهى قائمة أيضاً. واذا أريد تعيين مثل هاتين الزاويتين القائمتين المتناظرتين بحيث يكون رأساهما نقطتين جديدتين متناظرتين مثل ا١، ا٢ فانه بناء على خاصية التوازى المذكورة فى البند السابق يجب أن يكون ضلعا الزاوية القائمة التى رأسها ا١ موازيين الى ب١ل، ب١ ى وأن يكون ضلعا الزاوية القائمة المناظرة لها والتى رأسها ا٢ موازيين الى ب٢ ل، ب٢ ى ومعنى هذا انه *يوجد فى كل ائتلاف متوازى زوج واحد على وجه العموم* [٢] *من الزوايا القائمة المتناظرة رأساه نقطتان متناظرتان* وتبقى اتجاهات أضلاع هذه الزوايا ثابتة لجميع النقط المتناظرة الاخرى فى الائتلاف.

(٤) *اذا أُسقط شكل مستو اسقاطاً متوازياً فى اتجاهين مختلفين على مستو واحد مثل* II *فان المسقطان شكلين مؤتلفين ائتلافاً متوازياً* [٣]. وذلك لأن المستقيمات

---

(١) نترك للقارىء البرهنة على صحة هذه النظرية.

(٢) اذا كانت نسبة الائتلاف ك = —١ واتجاه الائتلاف عمودياً على محوره أى اذا كان س١، س٢ متماثلين عموديا بالنسبة للمحور فمن الواضح أن كل زاوية قائمة فى هذه الحالة وحدها رأسها احدى نقط الشكل س١ تناظرها زاوية قائمة أيضا رأسها النقطة المناظرة فى الشكل س٢.

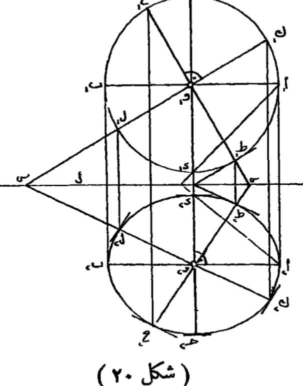
(٣) الصورة العامة لهذه النظرية هى:
اذا ائتلف شكل مستو مع شكلين آخرين وجب أن يكون هذان الشكلان فيما بينهما مؤتلفين.

التى تصل ازواج النقط المتناظرة مناظرة الفرد للفرد فى المسقطين توازى جميعاً فى هذه الحالة خط تقاطع المستوى II مع المستوى المعين بشعاعى الاسقاط المارين بنقطة واحدة من نقط الشكل المستوى كما أن المستقيمات المتناظرة فى المسقطين تتقابل جميعاً على مستقيم واحد هو خط تقاطع II مع مستوى الشكل .

بند ١٣ : القطع الناقص

(١) بعض الخواص

اذا أسقطنا دائرة إسقاطاً متوازياً كان المسقط قطعاً ناقصاً (انظر الباب الثالث) . *فالقطع الناقص يمكن اعتباره اذن منحنياً مؤتلفاً مع الدائرة ائتلافاً متوازياً* . ونورد هنا كمثال تطبيقى على الائتلاف المتوازى بعض خواص القطع الناقص التى يمكن استنتاجها من هذا الاعتبار .



(شكل ٢٠)

فلنفرض لذلك (شكل ٢٠) أن الائتلاف المتوازى العمودى فى مستوى الورقة معلوم بالمحور ع وزوج من النقط المتناظرة $و_١$، $و_٢$ وأنه يراد رسم المنحنى المؤتلف مع الدائرة التى مركزها $و_١$ فانه ينتج من هذا الائتلاف حيث كل نقطة من نقط الدائرة وكل مماس فيها يناظرهما نقطة على القطع ومماس له فيها —

اولا : ان القطع الناقص متماثل بالنسبة الى النقطة $و_٢$ التى تناظر $و_١$ فالنقطة $و_٢$ هى إذن مركز القطع .

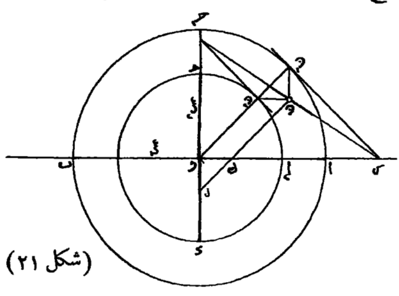
ثانياً : يقال لأى قطرين فى القطع الناقص مثل ح٢ ط٢ ، ك٢ ل٢ يناظران قطرين متعامدين ح١ ط١ ، ك١ ل١ فى الدائرة إنهما قطران مترافقان وينتج من خاصية التوازى المذكورة فى (بند ١١) أن مماسى القطع الناقص فى نهايتى أى قطر يوازيان القطر المرافق وأن الاوتار الموازية لأحد القطرين فى القطع الناقص ينصفها القطر المرافق له .

ثالثاً : أن القطع الناقص متماثل عمودياً بالنسبة لكل من قطرين متعامدين ا٢ ب٢ ، ح٢ ى٢ يطلق عليهما اسم *المحورين الاكبر والاصغر* وهما القطران المترافقان الوحيدان اللذان يحصران بينهما زاوية قائمة .

ويمكننا الآن أن نقرر النظرية الآتية : —

ازا رسمت دائرة قطرها أحد اقطار قطع ناقص فان المنحنيان مؤتلفين ائتلافاً متوازياً حيث محور الائتلاف هو القطر المشترك ويكون قطر الدائرة العمودى على القطر المشترك مناظراً لقطر القطع الناقص المرافق للقطر المشترك .

وذلك لامكان اعتبار القطع مسقطا متوازيا لكل دائرة مرسومة على أحد أقطاره .



(شكل ٢١)

(ب) كيفية رسم القطع الناقص بواسطة الائتلاف اذا علم محوراه

القطع الناقص بمقتضى النظرية السابقة مؤتلف ائتلافا عموديا مع كل من الدائرتين اللتين قطراهما المحور الاكبر والمحور الاصغر حيث محور الائتلاف فى الحالة الأولى هو المحور الاكبر ع١ والنقطتان ح ، ح١ نقطتان متناظرتان وفى الحالة الثانية

يكون محور الائتلاف هو المحور الاصغر ع$_2$ وتكون النقطتان ا$_1$ ، ا$_2$ نقطتين متناظرتين (شكل ٢١) .

فاذا رسم مستقيم مار بالمركز المشترك «و» فقطع الدائرة الكبرى فى ه$_1$ والصغرى فى ه$_2$ فانه يمكن بسهولة إثبات أن كلا من هاتين النقطتين تناظر نقطة واحدة ه من نقط القطع الناقص[1] . فالنقطة ه موجودة إذن على كل من المستقيمين المرسوم أحدهما من ه$_1$ عمودياً على ع$_1$ (باعتبار الائتلاف مع الدائرة الكبرى) وثانيهما من ه$_2$ عمودياً على ع$_2$ (باعتبار الائتلاف مع الدائرة الصغرى) فهى نقطة تقاطعهما . ومماس القطع الناقص فى ه هو المستقيم المناظر لمماس الدائرة الكبرى فى ه$_1$ (والمناظر أيضاً لمماس الدائرة الصغرى فى ه$_2$) وهذان المماسان يتقابلان كما هو مبين بالشكل فى النقطة س على ع$_1$. وهكذا يمكن تعيين ورسم أى عدد من نقط القطع بالمماسات فيها .

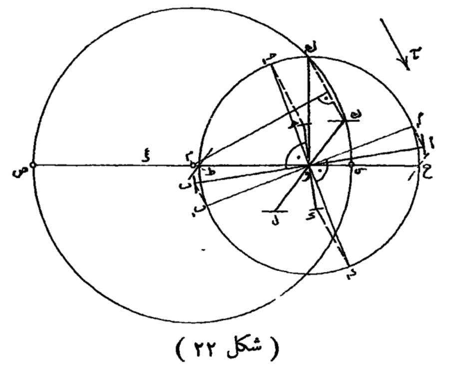
وهناك طريقة أخرى لرسم القطع الناقص يمكن استنتاجها بسهولة من (شكل ٢١) . ذلك أنه اذا رسم من ه مواز الى المستقيم و ه$_1$ فقطع المحور الاكبر فى ك والاصغر فى ل فان ه ل = و ه$_1$ = نصف المحور الاكبر ، ه ك = و ه$_2$ = نصف المحور الاصغر . فاذا أخذت على حافة شريط من الورق نقطة اختيارية مثل ه وقيس منها على الحافة البعدان ه ل ، ه ك فى اتجاه واحد بحيث يساوى ه ل نصف المحور الاكبر ويساوى ه ك نصف المحور الاصغر ثم أخذنا فى تحريك الشريط بحيث تقع ل دائماً على المحور الاصغر وتقع ك على المحور الاكبر فالنقطة ه ترسم القطع الناقص المطلوب .

(١) نلفت نظر القارىء الى أن نسبة الائتلاف بين القطع الناقص والدائرة الكبرى تساوى النسبة بين المحورين الاصغر والاكبر وبينه وبين الدائرة الصغرى تساوى النسبة بين المحورين الاكبر والاصغر .

وبالعكس يمكن بسهولة تعيين طول أحد محورى قطع ناقص اذا علم منه المحور الآخر ونقطة عليه .

(حـ) *كيفية رسم القطع الناقص اذا علم منه قطراه مترافقاه*

اذا كان القطران المترافقان المعلومان هما ح ط ، ك ل (شكل ٢٢) ورسمنا دائرة على أحدهما وليكن ح ط ثم رسمنا فى هذه الدائرة نصف القطر و ك١ عمودياً على ح ط كانت هذه الدائرة (راجع الفقرة ١) مؤتلفة مع القطع الناقص ائتلافاً متوازياً وكان و ك ، و ك١ نصفى قطرين متناظرين فى الائتلاف . ويمكن استخدام هذا الائتلاف المتعين بالمحور ع وهو القطر المشترك ح ط وبزوج من



(شكل ٢٢)

النقط المتناظرة هما ك ، ك١ فى رسم أى عدد من نقط القطع الناقص ومماساته وأى عدد من أزواج الاقطار المترافقة المناظرة لأزواج الاقطار المتعامدة فى الدائرة . أما محورا القطع فهما كما قدمنا القطران المترافقان المتعامدان فمن حيث إنهما يناظران قطرين متعامدين أيضاً فى الدائرة فيكون تعيينهما إذن بناء على النظرية الثالثة فى (بند ١٢) وذلك بتعيين الزاويتين القائمتين المتناظرتين اللتين

رأساهما نقطتان متناظرتان مثل ك ، ك١ . فاذا كانت س ، ص هما نقطتا تقاطع محور الائتلاف ع مع الدائرة المارة بالنقطتين ك ، ك١ والتى مركزها م على محور الائتلاف فان محورى القطع الناقص يوازيان ك س ، ك ص مرسومين من « و » . أما المستقيمان المرسومان من « و » موازيين الى ك١ س ، ك١ ص فهما قطرا الدائرة (المتعامدان) المناظران الى المحورين . فاذا قطع الموازيان الاخيران الدائرة فى حـ١ ، ى١ ، ا١ ، ب١ كانت النقط المناظرة لها حـ ، ى ، ا ، ب هى رؤوس القطع الناقص .

(ى) حل بعض مسائل القطع الناقص بواسطة الائتلاف

كثير من المسائل المتعلقة بالقطع الناقص يمكن حلها بسهولة بواسطة الائتلاف اذا علم القطع بمحوريه أو بزوج من الاقطار المترافقة وذلك باختبار دائرة مؤتلفة معه ثم تعيين الائتلاف بالمحور وزوج من النقط المتناظرة . مثال ذلك لنفرض أنه يراد رسم مماسين من نقطة مثل ن لقطع ناقص معلوم بقطرين مترافقين مثل ع ط ، ك ل (قارن شكل ٢٢) فاننا نتبع الخطوات الآتية :—

الخطوة الاولى — نختار دائرة مؤتلفة مع القطع كالدائرة المرسومة على ع ط فيكون ع ط محور الائتلاف .

الخطوة الثانية — نرسم و ك١ العمودى على ع ط فتكون النقطتان ك ، ك١ نقطتين متناظرتين فى القطع والدائرة على التوالى .

الخطوة الثالثة — نعين النقطة ن١ فى مجموعة الدائرة المناظرة للنقطة المعلومه ن فى مجموعة القطع الناقص (بند ١١) .

الخطوة الرابعة — نرسم من ن١ مماسين للدائرة .

الخطوة الخامسة — نعين المستقيمين المناظرين للمماسين السالفى الذكر فيكون هذان المناظران هما المماسان المطلوبان (ويجب أن يتقاطعا فى ن) .

وبمثل هذه الطريقة يمكن مثلا تعيين نقطتى تقاطع مستقيم مع قطع ناقص معلوم بمحوريه أو بقطرين مترافقين .

بند ١٤ : العلاقة الائتلافية بين المسقطين الافقى والرأسى لشكل مستو

نظرية : —

المسقطان الافقى والرأسى سـ' ، سـ" لشكل مثل سـ واقع فى مستو A هما شكلان مؤتلفان ائتلافاً متوازياً فى مستوى الورقة حيث محور الائتلاف هو المستقيم الذى يمثل خط تقاطع المستوى A مع مستوى الائتلاف وحيث اتجاه الائتلاف هو اتجاه خطوط التناظر .

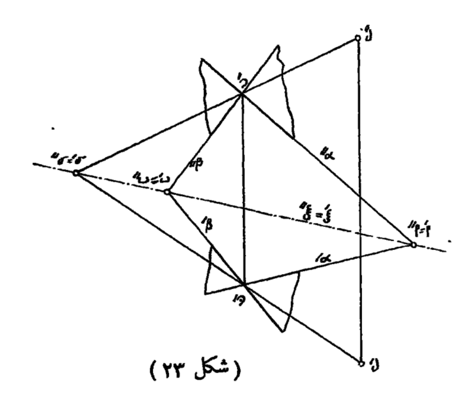
وذلك لأن العلاقة الهندسية بين نقط ومستقيمات المسقطين باعتبارهما شكلين سـ' ، سـ" موجودين فى مستو واحد (مستوى الورقة) هى مناظرة الفرد للفرد ولأن المستقيمات — خطوط التناظر — التى تصل أزواج النقط المتناظرة فى الشكلين توازى جميعاً الاتجاه العمودى على خط الارض .

فاذا فرضنا (شكل ٢٣) أن المستوى A معلوم بالمستقيمين α ، β المتقاطعين فى النقطة م ومددنا المسقطين α' ، α" ليتقابلا فى النقطة ا' = ا" والمسقطين β' ، β" ليتقابلا فى النقطة ب' = ب" كان المستقيم ع' = ع" الذى يصل النقطتين ا' ، ب' هو المستقيم الذى يمثل خط تقاطع المستوى A مع مستوى الائتلاف (بند ٥) وهو كما قدمنا المحل الهندسى لكل نقطة فى المستوى A ينطبق مسقطاها الافقى والرأسى أى تناظر نفسها فى هذا الائتلاف . فالمستقيم ع' = ع" هو إذن محور الائتلاف بين المسقطين وعليه تتقابل المستقيمات المتناظرة فيهما .

ويلاحظ أن الائتلاف بين مسقطى أى شكل مستو هو على وجه العموم ائتلاف متوازى مائل إلا اذا كان المستوى A موازياً لخط الارض ففى هذه الحالة

يصير المستقيم ع موازياً الى خط الارض والمستقيم ع' == ع'' عمودياً على خطوط التناظر ويؤول الائتلاف المائل الى ائتلاف عمودى .

واذا علم المستوى A (شكل ٢٣) وأمكن تعيين الائتلاف بين المسقطين كما



(شكل ٢٣)

تقدم بالمحور ع'==ع'' وبنقطتين متناظرتين مثل ه' ، ه'' وعلم المسقط الافقى ل' لاحدى نقط المستوى A كان من السهل تعيين مسقطها الرأسى ل'' بتعيين النقطة المناظرة الى ل' فى هذا الائتلاف (بند ١١) وذلك بأن نصل ل' ه' ونمده ليقطع المحور ع' == ع'' فى النقطة س'==س'' ثم نصل س'' ه'' ونمده ليقطع خط التناظر المرسوم من ل' فى المسقط الرأسى المطلوب ل'' . وبنفس الطريقة يمكن تعيين ل' إذا علمت ل'' وكذا تعيين أحد مسقطى مستقيم واقع فى المستوى A اذا علم مسقطه الآخر .

وهذا حل جديد للمسألة الأولى من مسائل الوضع (بند ٧) .

بند ١٥ : الائتلاف المطلق

(ا) تعريف

اذا كان سه ٩ سه$_1$ شكلين واقعين فى مستويين مثلA ٩ A_1 على التوالى (شكل ٢٤) ووجدت مناظرة الفرد للفرد بين نقطهما ومستقيماتهما بحيث تكون النسبة (البسيطة) بين أى بعدين فى أحد الشكلين مساوية للنسبة بين البعدين المناظرين فى الشكل الآخر (مثلا $\frac{\text{ب ء}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{ب}_1\text{ء}_1}{\text{حـ}_1\text{ء}_1}$) قيل إن بين الشكلين سه ٩ سه$_1$ ائتلافاً مطلقاً . وبمقارنة بند ٥٦ نجد أن الائتلاف المطلق حالة خاصة من الائتلاف العام أو الاسقاطى [1] . وأقرب مثال على الائتلاف المطلق هو العلاقة الهندسية بين شكل مستو وبين مسقطه المتوازى غير المباشر على مستو جديد الذى يمكن الحصول عليه باسقاط الشكل الاصلى إسقاطا متوازياً عدة مرات متعاقبه فى اتجاهات مختلفة حيث إن النسبة البسيطة لا تتغير بالاسقاط المتوازى مهما تعاقب .

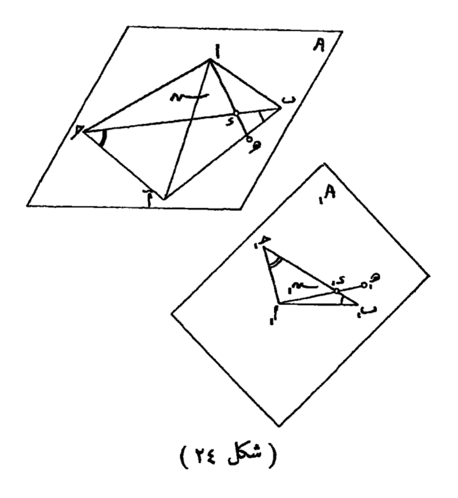
ويؤخذ من هذا أن الائتلاف المتوازى حالة خاصة من الائتلاف المطلق .

(ب) متى يتعين الائتلاف المطلق

يتعين الائتلاف المطلق بين الشكلين سه ٩ سه$_1$ (شكل ٢٤) اذا علم فى مستويهما مثلثان متناظران مثل ا ب حـ ٩ ا$_1$ ب$_1$ حـ$_1$ لانه اذا أريد بعد هذا

(١) بينما يطلق على صفين (بند ٥٣) متناظرين من النقط فى حالة الائتلاف الاسقاطى العام اسم صفين « مؤتلفين » أو « اسقاطيين » فانهما يكونان فى حالة الائتلاف المطلق « متشابهين » . ففى الحالة الأولى حيث تناظر النقط التى فى اللانهاية نقطا على بعد نهائى تكون النسبة المضاعفة (بند ٥٣) لاى أربع نقط على مستقيم مساوية للنسبة المضاعفة للنقط الأربع المناظرة (بند ٥٦) . ويمكننا أن نقول إن الائتلاف الاسقاطى العام يؤول الى ائتلاف مطلق اذا ناظرت النقط التى فى اللانهاية نقطاً فى اللانهاية أيضا .

ايجاد النقطة هـ١ مثلا فى الشكل س١ المناظرة الى هـ فى الشكل س نصل هـ بأحد رؤوس المثلث مثل ا فيقطع ا هـ الضلع ب حـ فى ى ثم نعين فى المستوى A_1 النقطة المناظرة ى١ التى تقسم ب١ حـ١ بنفس النسبة المعلومة التى تقسم بها ى المستقيم ب حـ ونصل ا١ ى١ . فالنقطة المطلوبة هـ١ تقع على ا١ ى١ بحيث تكون النسبة (ا١ هـ١) / (ى١ هـ١) مساوية للنسبة المعلومة (ا هـ) / (ى هـ) وبذا تتعين هـ١.



(شكل ٢٤)

وينتج من ذلك أن أى مثلثين مرسومين حيثما اتفق فى المستويين A ، A_1 يمكن اعتبارهما محددين لائتلاف ما مطلق بين النقط والمستقيمات فى المستويين ولكن اذا تحدد هذان المثلثان فان أى نقطة رابعة مثل هـ فى أحد المستويين يكون لها نقطة واحدة مناظرة فى المستوى الآخر يمكن تعيينها كما تقدم .

(حـ) الزوايا القائمة المتناظرة

ظاهر أن الزوايا المتناظرة فى المثلثين ا ب حـ ، ا١ ب١ حـ١ المحددين للائتلاف فى (شكل ٢٤) غير متساوية على وجه العموم (أو ليس من الضرورى أن تكون متساوية) ولكن اذا فرض وصادف أن كانت الزوايا المتناظرة فى المثلثين متساوية أو اذا اخترنا المثلثين المحددين للائتلاف بحيث كانت الزوايا المتناظرة متساوية فان الائتلاف يؤول فى هذه الحالة الى تشابه بحيث تكون كل زاوية فى أحد المستويين تناظرها زاوية مساوية لها فى المستوى الآخر [١].

واذا رسم فى المستوى A زاوية قائمة رأسها ا فالزاوية المناظرة لها فى الائتلاف المتعين بالمثلثين ا ب حـ ، ا١ ب١ حـ١ التى رأسها النقطة ا١ فى المستوى A١ لا تكون على وجه العموم قائمة . غير أنه يوجد فى كل ائتلاف مطلق كما هو الحال فى الائتلاف المتوازى (النظرية الثالثة بند ١٢) زوج واحد على وجه العموم من الزوايا القائمة المتناظرة رأساه نقطتان متناظرتان . وللحصول على هذا الزوج فى (شكل ٢٤) نرسم فى المستوى A مثلثاً آ ب حـ مشابها للمثلث ا١ ب١ حـ١ ومشتركا مع المثلث ا ب حـ فى القاعدة ب حـ فتكون العلاقة الهندسية بين نقط ومستقيمات المستويين A ، A١ التى يحددها المثلثان المتشابهان آ ب حـ ، ا١ ب١ حـ١ فى هذه الحالة علاقة تشابه . ولكن المثلثين ا ب حـ ، آ ب حـ الموجودين فى المستوى A مؤتلفان ائتلافا متوازيا حيث ب حـ هو محور الائتلاف وحيث ا ، آ نقطتان متناظرتان فاذا عينا فى هذا الائتلاف المتوازى المستوى الزاوية القائمة الوحيدة التى رأسها ا والتى تناظرها زاوية قائمة أيضا رأسها آ (بند ١٢) ووجدنا بواسطة التشابه (أو الائتلاف المطلق) الزاوية المناظرة للاخيرة منهما والواقعة فى المستوى A١ ورأسها

(١) ويؤول الائتلاف الى تساو أو تطابق اذا كان المثلثان المحددان للائتلاف متساويين . وبديهى أنه فى هذه الحالة أيضا تكون الزوايا المتناظرة متساوية .

النقطة $ا_1$ كانت هذه الزاوية قائمة أيضا وهى مع الزاوية القائمة فى المستوى A التى رأسها ا تكونان زوج الزوايا القائمة المتناظرة فى هذا الائتلاف .

فاذا كانت ا مركزاً لدائرة واقعة فى المستوى A_1 كانت $ا_1$ مركزاً لقطع ناقص وفى هذه الحالة يعين ضلعا الزاوية القائمة التى رأسها $ا_1$ والتى بينا الآن كيفية ايجادها اتجاهى محورى القطع الناقص .

(ى) الانتقال من الائتلاف المطلق الى الائتلاف المتوازى

بواسطة رسم المثلث آ ب حـ المشابه الى المثلث $ا_1 ب_1 حـ_1$ تتعين كما قدمنا علاقة تشابه بين نقط ومستقيمات المستويين A ، A_1 وتكون النسبة بين أى بعدين متناظرين مساوية الى $\frac{ب حـ}{ب_1 حـ_1}$ فاذا عينا على المستقيم ب حـ وهو محور الائتلاف المتوازى بين المثلثين ا ب حـ ، آ ب حـ فى المستوى A — النقطة ى بحيث أن $\frac{آ ى}{ا ى}$ = النسبة المعلومة $\frac{ب حـ}{ب_1 حـ_1}$ (ويمكن الحصول على النقطة ى برسم الدائرة فى A التى قطرها البعد بين النقطتين اللتين تقسمان المستقيم آ ا من الداخل والخارج بهذه النسبة فتكون ى إحدى نقطتى تقاطع هذه الدائرة مع ب حـ) وكانت $ى_1$ هى النقطة فى A_1 المناظرة الى ى فمن الواضح أن ا ى يكون فى هذه الحالة مساويا $ا_1 ى_1$ لان كلا منهما يساوى آ ى × $\frac{ب_1 حـ_1}{ب حـ}$ فاذا حركنا الشكل $س_1$ ووضعناه على الشكل س بحيث ينطبق المستقيمان المتناظران المتساويان $ا_1 ى_1$ ، ا ى أمكننا بذلك أن نحول الائتلاف المطلق بين الشكلين المذكورين الى ائتلاف متوازى محوره ا ى ≡ $ا_1 ى_1$ (١)

(١) يلاحظ أنه قد يتعذر ايجاد نقطة مثل ى بحيث يكون ا ى = $ا_1 ى_1$ وذلك اذا لم تتقاطع الدائرة المشار اليها آنفا مع ب حـ . ففى هذه الحالة يكون تحويل الائتلاف المطلق الى ائتلاف متوازى غير ممكن .

(هـ) الائتلاف المطلوب بين شكلين موجودين فى مستو واحد

اذا أسقطنا الشكلين س٢ س١ (شكل ٢٤) معاً إسقاطاً متوازياً على مستو جديد مثل II حصلنا فيه على شكلين جديدين س٢َ س١َ بينهما ائتلاف مطلق ويكون مسقطا المثلثين ا ب حـ ، ا١ ب١ حـ١ هما المثلثان المحددان لهذا الائتلاف المستوى.

وغنى عن البيان أن ما تقدم ذكره عن تحويل الائتلاف المطلق الى ائتلاف متوازى وكذا تعيين النقط والمستقيمات والزوايا القائمة المتناظرة فى حالة وجود الشكلين فى مستويين مختلفين — ينطبق على هذه الحالة أيضاً.

تمارين :

(١) اذا علم من مثلث ا ب حـ مسقطه الافقى اَ بَ حَ والمسقط الرأسى ا" للنقطة ا فالمطلوب ايجاد المسقط الرأسى ا" ب" حـ" للمثلث بحيث يكون الشكل الحقيقى للمثلث ا ب حـ مشابها لمثلث آخر معلوم مثل ا١ ب١ حـ١

(٢) المطلوب ايجاد مستو يقطع منشوراً ثلاثياً فى مثلث يكون مشابهاً لمثلث آخر معلوم (هناك على وجه العموم وضعان لمثل هذا المستوى متماثلان بالنسبة الى المقطع العمودى للمنشور).

الفصل الخامس

مسائل القياس

بند ١٦ : المسألة الاولى

(ا) اذا علم مستو مثل A ونقطة مثل $\mathfrak{P}$ فالمطلوب تعيين العمود ν المار بالنقطة على المستوى .

حل هذه المسألة متوقف على النظرية المعروفة :ـــ

اذا تعامد مستقيم ν ومستو A فان مسقط المستقيم ν على أى مستو آخر مثل Π عمودياً على خط تقاطع المستويين وعلى مسقط أى مستقيم مثل φ فى المستوى A يكون موازياً للمستوى Π .

وذلك لأننا اذا فرضنا أن المستقيم ν يقابل المستوى A فى $\mathfrak{P}_1$ فانه لما كان هذا المستقيم عمودياً على المستوى فهو عمودى على كل مستقيم واقع فى المستوى A وعمودى بصفة خاصة على المستقيم φ المرسوم فى المستوى A من $\mathfrak{P}_1$ موازياً الى المستوى Π . فالزاوية المحصورة بين ν ، φ قائمة وحيث إن أحد ضلعيها φ مواز بالعمل للستوى Π فيكون مسقطها على Π هو نفسه زاوية قائمة أيضاً .

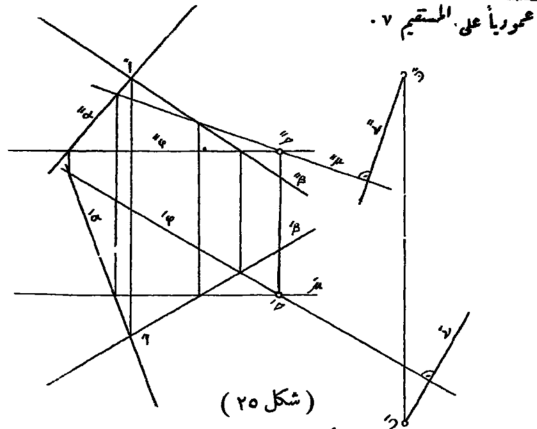
وبناء على النظرية السابقة يكون المسقط الرأسى ν'' للعمود المطلوب عمودياً على المسقط الرأسى μ'' لاى مستقيم أمامى ويكون كذلك المسقط الافقى ν' عمودياً على المسقط الافقى φ' لاى مستقيم أفقى فى المستوى A .

ففى (شكل ٢٥) لتعيين العمود ν النازل من النقطة الخارجة $\mathfrak{P}$ (أو المقام منها اذا كانت $\mathfrak{P}$ واقعة فى المستوى A) على المستوى A المعلوم بالمستقيمين

α ، β المتقاطعين فى ا نعين أولا (بند ٧ ب) مسقطى أى مستقيم أمامى μ وكذا أى مستقيم أفقى φ فى المستوى A . فيكون المسقط الرأسى ν'' للعمود المطلوب هو المستقيم المرسوم من ﻫ″ عمودياً على μ'' ويكون المسقط الافقى ν' لهذا العمود هو المستقيم المرسوم من ﻫ′ عمودياً على φ'. وبذا يتعين العمود المطلوب.

واذا كانت ﻫ١ (غير مبينة بالشكل) نقطة تقابل ν مع المستوى A (بند ١٠) كان البعد الحقيقى بين النقطتين ﻫ ، ﻫ١ (بند ٢) هو بعد النقطة ﻫ عن المستوى A .

(ب) اذا علم مستقيم ν ونقطة ح فالمطلوب تعيين المستوى A المار بالنقطة ح عمودياً على المستقيم ν .



(شكل ٢٥)

الطريقة لحل هذه المسألة عكس الطريقة السابقة . فاذا رسمنا فى (شكل ٢٥) من ح″ مستقيما μ'' عمودياً على ν'' ومن ح′ مستقيما μ' موازياً لخط الارض فان المسقطين μ' ، μ'' يعينان مستقيما أماميا μ فى المستوى A . وبالمثل اذ رسمنا

من ح′ العمودى φ′ على ٧′ ومن ح″ المستقيم φ″ موازياً لخط الارض فان φ′، φ″ يعينان مستقيما افقياً φ واقعاً بتمامه أيضا فى المستوى المطلوب A .
وعلى ذلك يتعين المستوى A بالمستقيمين μ ، φ المتقاطعين فى ح .

بند ١٧ : المسألة الثانية

المطلوب تطبيق مستو معلوم على مستو مواز لأحد مستوى الاسقاط أى المطلوب تطبيق المستوى ليصبح موازياً لأحد مستوى الاسقاط الرئيسيين .

هذه المسألة من أهم المسائل فى الهندسة الوصفية ولابد من التعرض لها كلما أردنا ايجاد الشكل الحقيقى لكثير أضلاع أو منحن واقع فى مستو معلوم أو ايجاد المقدار الحقيقى للزاوية المحصورة بين مستقيمين متقاطعين الخ . ولابد لحل هذه المسألة من فهم ما يأتى جيداً :

(١) معنى التطبيق موقع النقطة والشكل المستوى — العلاقة الائتلافية بين مسقط شكل مستو وموقعه

المعنى الأصلى لتطبيق مستو محدود A على آخر II هو حمل المستوى A فى الفضاء ووضعه بحيث ينطبق تماما على المستوى II أى بحيث تتحد نقط المستوى A مع نقط المستوى II جميعا . وهذه العملية يمكن اعتبارها مؤلفة من حركتين مستقلتين الواحدة منهما عن الأخرى : الأولى *حركة دوران* للمستوى A حول مستقيم فيه مواز للمستوى II — محور دوران — بحيث يصبح المستوى A موازيا للمستوى II . والثانية *حركة انتقال* للمستوى A فى وضعه الجديد بعد الدوران حتى ينطبق تماماً على المستوى II . فاذا افترضنا امتداد كل من المستويين A ، II الى مالا نهاية فان هاتين الحركتين يؤولان الى حركة واحدة : هى حركة دوران فقط حول خط تقاطع المستويين فى حالة تقاطعهما أو حركة انتقال فقط فى حالة توازيهما .

ولما كان المستويان الرئيسيان للاسقاط Π_1 ، Π_2 — وهما المستويان اللذان تطبق عادة المستويات الاخرى على أحدهما — غير محددين من حيث وضعهما فى الفضاء وإنما كان المحدد هو اتجاه كل منهما (انظر بند ٢) فان عملية التطبيق المشار اليها آنفاً تقتصر على الحركة الأولى وهى حركة الدوران التى يتحول بها مسقط أى شكل مرسوم فى المستوى A الى شكله الحقيقى . وكثيراً ما سنستخدم العبارة « تطبيق مستو A على أحد مستويى الاسقاط » بمعنى « تطبيقه على مستو يوازى اتجاه أحد مستويى الاسقاط » أو « إدارة المستوى A الى الوضع الذى يوازى فيه أحد مستويى الاسقاط » .

ويسمى محور الدوران السالف الذكر — وهو إما أحد المستقيمات الأفقية أو الأماميه فى المستوى A — *محور الانطباق* . ويسمى الوضع الجديد (ͻ) لأية نقطة ͻ فى المستوى بعد تطبيقه *بموقع النقطة* ͻ كما يسمى الوضع الجديد (سه) لأى شكل فى المستوى بعد تطبيقه *بموقع الشكل* سه . ويرمز لموقع النقطة ͻ بالرمز [ͻ] اذا كان المستوى A — الواقعة فيه النقطة ͻ — عمودياً على المستوى Π . فمثلا فى (شكل ٤) المستوى المسقط ب ا ا′ ب′ عمودى على المستوى الافقى Π_1 فبعد تطبيق ذلك المستوى على Π_1 رمزنا للوضع الجديد للنقطة ا وهو موقعها بالرمز [ا] .

ويكفى للوصول الى العلاقة الحقيقية بين نقط ومستقيمات مستو مثل A أن يطبق المستوى بالمعنى المتقدم على أحد المستويين الرئيسيين للاسقاط Π_1 أو Π_2 أما اختيار أحد هذين المستويين فى أية مسألة بالذات فيترك لظروف هذه المسألة .

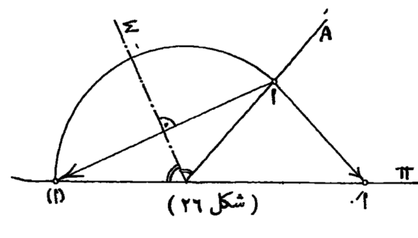
نظرية :

المسقط المتوازى لاى شكل مستو على مستو مثل Π مؤتلف ائتلافاً متوازيا مع موقعه على هذا المستوى . ويكون هذا الائتلاف عمودياً أو مائلا (بند ١١)

حسبما يكون اتجاه الاسقاط عمودياً أو مائلا على خط تقاطع المستويين [١] .

وذلك لأنه اذا كانت ا إحدى نقط الشكل سه الموجود فى المستوى A (شكل ٢٦) وكانت ا' مسقطها المتوازى على المستوى Π فانه يمكن اعتبار موقعها (ا) على Π مسقطاً لها على نفس المستوى Π فى الاتجاه العمودى على المستوى Σ المنصف لأحدى الزاويتين الزوجيتين المحصورتين بين المستويين A ، Π . وبمقتضى النظرية الرابعة (بند ١٢) يكون بين المسقط سه' والموقع (سه) للشكل سه ائتلاف متوازى حيث محور الائتلاف هو خط تقاطع المستويين .

وواضح أنه اذا كان سه' المسقط العمودى للشكل سه على المستوى Π فان خط تقاطع المستويين A ، Π أى



(شكل ٢٦)

محور الائتلاف يكون فى هذه الحالة عمودياً على المستوى ا ا' (ا) وبالتالى على المستقيم ا' (ا) وهو اتجاه الائتلاف ومعنى هذا أن الائتلاف المتوازى بين سه' ، (سه) يكون فى هذه الحالة ائتلافا عمودياً . وهذا صحيح أيضاً اذا كان سه' المسقط المتوازى المائل للشكل سه على Π فى اتجاه عمودى على خط تقاطع المستويين .

(ب) الخطوات الرئيسية فى عملية تطبيق مستو على أحد مستويى الاسقاط فى حالة الاسقاط العمودى

الخطوة الاولى : تحديد المستوى المراد تطبيقه وهو المستوى المراد

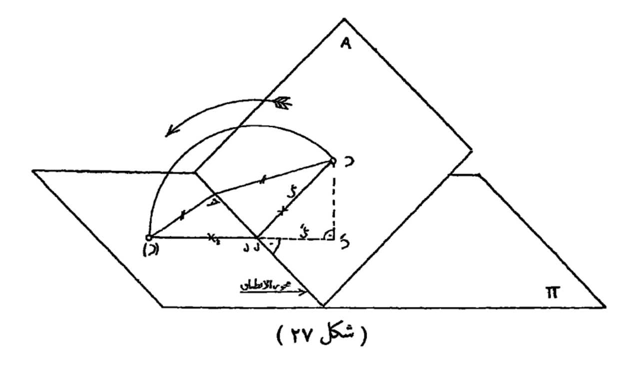
---

(١) معنى هذا أن الائتلاف عمودى حتما اذا كان الاسقاط عموديا . أما فى حالة الاسقاط المائل فهو يتوقف على اتجاه الاسقاط .

تعيين العلاقات الهندسية الحقيقية بين أجزاء الشكل المرسوم فيه .

الخطوة الثانية : تحديد المستوى المراد إجراء عملية التطبيق عليه وكل ما يشترط فى هذا المستوى أن يكون موازيا إما الى Π_1 أو Π_2 . وينتج من ذلك تعيين محور الانطباق الذى هو خط تقاطع هذا المستوى مع مستوى الشكل الاصلى .

الخطوة الثالثة : اختيار نقطة ما مثل ء فى مستوى الشكل وتعيين موقعها (ء) لذلك نفرض فى (شكل ٢٧) أن A مستوى الشكل ، Π هو المستوى



(شكل ٢٧)

المراد إجراء عملية التطبيق عليه وأن ء إحدى نقط المستوى A ، ء′ مسقطها العمودى على Π [1] ويراد تعيين موقعها (ء) .

فاذا رسمنا فى المستوى A المستقيم ذا الميل الاعظم ع المار بالنقطة ء وفرضنا انه يقابل محور الانطباق فى النقطة ل ≡ ل′ كان مسقطه ع′ على Π وهو المستقيم

---

(١) لما كان Π موازياً الى Π_1 أو Π_2 كما قدمنا كانت المساقط العمودية للنقط والمستقيمات على Π منطبقة على مساقطها الافقية أو الرأسية على التوالى .

ن′ ل′ عمودياً على محور الانطباق . ولما كانت النقطة ن ترسم أثناء دوران المستوى A حول محور الانطباق دائرة مركزها ل ونصف قطرها ل ن ولما كانت هذه الدائرة واقعة فى المستوى المرسوم من ن عمودياً على محور الانطباق فان مسقط ن على Π أثناء الدوران يقع دائماً على المستقيم ن′ ل′ أو امتداده لأن هذا المستقيم يمثل أيضا مسقط الدائرة المشار اليها على Π . وينتج من ذلك أن الموقع (ن) للنقطة ن يوجد على المستقيم المرسوم من ن′ عمودياً على محور الانطباق بحيث يكون الطول ل′ (ن) مساوياً للطول ل ن وهذا الأخير يساوى كما يؤخذ من الشكل وتر المثلث ن ن′ ل′ القائم الزاوية فى ن′ والذى أحد أضلاعه ن′ ل′ أى المسقط المعلوم على Π للمستقيم ن ل وضلعه الآخر ن′ ن أى ارتفاع النقطة ن أو بعدها عن المستوى Π . وهذا الارتفاع ن′ ن معلوم أيضاً ويمكن قياسه من المسقط الرأسى اذا كان Π موازيا الى Π_1 أو من المسقط الأفقى اذا كان Π موازيا الى Π_2 [1] .

فللحصول إذن على الموقع المطلوب (ن) للنقطة ن يقاس وتر المثلث المشار اليه آنفا على العمود النازل من ن′ على محور الانطباق ابتداء من ل فى إحدى جهتيه حسبما يكون التطبيق فى اتجاه السهم المبين فى (شكل ٢٧) أو فى الاتجاه الآخر ولا فرق بين الحالتين فى حلول المسائل .

ويجب أن يلاحظ أن ل′ (ن) لا يمكن أن يكون أصغر من ل′ ن′ وأن هذين البعدين يتساويان فى حالة واحدة فقط وهى توازى المستويين A ، Π وفى هذه الحالة تؤول كما قدمنا حركة الدوران الى حركة انتقال .

ويمكن الحصول على الموقع (ن) بطريقة أخرى : نصل ن بأية نقطة على محور الانطباق مثل ح (شكل ٢٧) ثم نعين الطول الحقيقى للمستقيم ن ح الواقع فى

(١) فى حالة اختيار Π موازيا الى Π_2 يوضع ن″ ، ل″ الخ بدلا من ن′ ، ل′ الخ

المستوى A . فاذا ركزنا فى حـ التى تبقى ثابتة أثناء الدوران وبفتحة تساوى ء حـ قطعنا العمود النازل من ء′ على محور الانطباق فى (ء) كانت (ء) هى الموقع المطلوب للنقطة ء .

الخطوة الرابعة : استخدام الائتلاف المتوازى العمودى المشار اليه فى النظرية السابقة بين المسقط والموقع فى ايجاد موقع أية نقطة أخرى أو أى مستقيم فى المستوى A اذا علم المسقط على II وبالعكس فى ايجاد المسقط اذا علم الموقع وذلك بالطريقة المبينة فى (بند ١١) حيث أصبح الائتلاف الآن معلوماً بالمحور وهو محور الانطباق — وزوج من النقط المتناظرة ء′ ، (ء) .

بند ١٨ : مثال

اذا علم مثلث ا ب حـ ومستو A وكانت م مركز الدائرة المارة برؤس المثلث فالمطلوب ايجاد بعد م عن المستوى A .

خطوات العمل المستنتجة من الحل الفراغى لهذه المسألة هى :

أولا : ايجاد م

ثانياً : ايجاد العمود v النازل من م على المستوى A

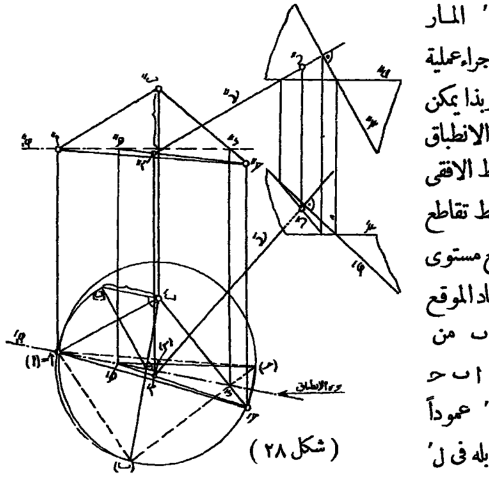
ثالثاً : تعيين نقطة تقابل v مع A ولتكن ء

رابعاً : قياس البعد م ء فيكون هو البعد المطلوب

ويلاحظ أن الخطوات الاولى والثانية والرابعة هى من مسائل القياس فى حين أن الخطوة الثالثة هى مسألة على الوضع .

ولتطبيق هذا الحل إسقاطياً نفرض فى (شكل ٢٨) أن المثلث معلوم بسقطيه الافقى والراسى ا′ ب′ حـ′ ، ا″ ب″ حـ″ وأن المستوى A معلوم بالمستقيمين المتقاطعين φ ، μ ونفرض تسهيلا للعمل أن الأول منهما مستقيم أفقى والثانى مستقيم أمامى :—

الخطوة الأولى : للحصول على مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث أى للحصول على المسقطين الافقى والرأسى م′، م″ للنقطة م يلزم تطبيق المستوى ا ب حـ على مستو يوازى أحد مستويى الاسقاط وقد اخترنا فى الشكل المستوى Φ الموازى للمستوى الافقى Π_1 والمار بالنقطة ا والذى يمثله فى المسقط الرأسى المستقيم φ_1″ المار بالنقطة ا″ لاجراء عملية التطبيق عليه وبذا يمكن تعيين محور الانطباق لأنه هو المسقط الافقى φ_1′=ا′ ء′ لخط تقاطع المستوى Φ مع مستوى المثلث. ولايجاد الموقع (ب) للنقطة ب من نقط المستوى ا ب حـ نـنزل من ب′ عموداً على ا′ ء′ فيقابله فى ل′



(شكل ٢٨)

(وقد سقطت سهواً من شكل ٢٨ فلم تبين عليه) ثم نقيس على هذا العمود البعد ل′ (ب) = ل′ [ب] = وتر المثلث [ب] ب′ ل′ القائم الزاوية فى ب′ والذى أحد أضلاعه ب′ ل′ (وهو المسقط الافقى للمستقيم ب ل) وضلعه الآخر [ب] ب′ مساو لارتفاع ب عن المستوى Φ [1] وهذا الارتفاع يمكن قياسه من المسقط الرأسى

(١) يلاحظ أن المثلث [ب] ب′ ل′ يمكن اعتباره تطبيقاً للمثلث ب ب′ ل′ الواقع فى المستوى المسقط أفقياً للمستقيم ب ل′ ذى الميل الاعظم — على المستوى Φ . فالزاوية [ب] ل′ ب′ هى لذلك زاوية ميل ب ل وكذا ميل المستوى ا ب حـ على المستوى الافقى Π_1 (قارن شكل ٢٧ حيث ضع ب بدلا من ن) .

فهو يساوى بعد ب″ عن φ_1″ . وباستخدام الائتلاف المتوازى العمودى بين المسقط الافقى لأى شكل فى مستوى المثلث ا ب حـ وبين موقعه حيث المحور هو محور الانطباق φ_1′ وحيث ب′ ، (ب) هما زوج من النقط المتناظرة - نعين الموقع (حـ) للنقطة حـ . أما (ا) فتنطبق فى هذه الحالة على ا′ لأن محور الائتلاف يمر بها . ثم نرسم الدائرة المارة برؤس الموقع (ا) (ب) (حـ) للمثلث فيكون مركزها (م) هو موقع مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب حـ . وباستخدام الائتلاف بطريقة بطريقة عكسية نجد م′ وذلك بأن نصل (م) (حـ) مثلا ونمده ليقابل φ_1′ فى هـ′ ثم نصل هـ′ حـ′ ليقابل المستقيم المرسوم من (م) عمودياً على محور الائتلاف فى م′ . أما المسقط الرأسى م″ للنقطة م فيمكن تعيينه كما سبق بيانه فى (بند ٧ ا) لأن م نقطة فى المستوى ا ب حـ معلوم مسقطها الافقى م′ (خط التناظر المرسوم من هـ′ يقطع φ_1″ فى هـ″ . وتكون م″ هى نقطة تقاطع هـ″ حـ″ مع خط التناظر المرسوم من م′) .

الخطوة الثانية : المطلوب هنا تعيين v' ، v'' للعمود v النازل من م على المستوى A (بند ١٦ ا) . فحيث إن هذا المستوى معلوم للسهولة بالمستقيمين الأفقى والأمامى : (φ' ، φ'') ، (μ' ، μ'') فان v' ، v'' هما العمودان النازلان من م′ ، م″ على φ' ، μ'' على التوالى .

الخطوة الثالثة : تعيين المسقطين الأفقى والرأسى ء′ ، ء″ لنقطة تقابل v مع المستوى A (بند ١٠) وبذا تتحدد النقطة ء .

الخطوة الرابعة : تعيين البعد الحقيقى بين النقطتين م ، ء (بند ٢ شكل ٤) وهذه العملية غير مبينة فى (شكل ٢٨) بقصد التخفيف عنه .

تمارين مباشرة :

(١) المطلوب ايجاد المقدار الحقيقى للزاوية بين مستقيمين متقاطعين معلومين .

(٢) المطلوب ايجاد المقدار الحقيقى للزاوية بين مستقيم ومستو معلومين [١].

(٣) المطلوب ايجاد المقدار الحقيقى للزاوية الزوجية بين مستويين معلومين [٢] وكذا تعيين المستوى المنصف للزاوية الزوجية.

(٤) المطلوب ايجاد أقصر بعد بين مستقيمين معلومين غير متقاطعين.

(٥) المطلوب تعيين المستقيم الذى يقابل مستقيمين معلومين غير متقاطعين بحيث يمر بنقطة معلومة أو بحيث يكون موازياً لاتجاه معلوم.

(٦) المطلوب ايجاد بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم.

(٧) اذا علم مستقيم ومستوى فالمطلوب تعيين النقطة على المستقيم المتساوية البعد عن مستقيمين آخرين معلومين وواقعين فى المستوى.

ملحوظة : لحل هذه التمارين وأمثالها يجب أولا تحديد خطوات العمل المستنتجة من الحل الفراغى فقط (بدون تفكير فى مستويات الأسقاط) ثم تطبيق مسائل الوضع والقياس تطبيقاً مباشراً كماسبق بيانه فى المثال المتقدم . ويراعى عند البدء بالحل الاسقاطى أن تمثل المعالم بواسطة المسقطين الأفقى والرأسى كما هو مبين فى (بند ٣ ، ٤ ، ٥) ولا تعتبر المسألة محلولة الا بعد رسم المطلوب وتمثيله كما جاء فى هذه البنود.

---

(١) هى الزاوية المحصورة بين المستقيم ومسقطه العمودى على المستوى.

(٢) تقاس الزاوية الزوجية كما هو معلوم بالزاوية المحصورة بين العمودين المقامين — كل فى أحد المستويين — على خط التقاطع من نقطة عليه . أو بالزاوية المحصورة بين العمودين النازلين على المستويين من أية نقطة فى الفراغ.

الفصل السادس

تغيير مستوى الاسقاط أو المساقط المساعدة

بند ١٩ : معنى تغيير مستوى الاسقاط والغرض من ذلك

اذا فرضنا فى (شكل ١) مستوى إسقاط ثابتين Π_1 ، Π_2 متقاطعين فى خط الارض ع فان وضع أية نقطة ن فى الفراغ يتحدد كما ذكرنا اذا علم مسقطاها العموديان ن′ ، ن″ على المستويين . وقد بينا فى (بند ١) أن كل ما يشترط فى هذه الطريقة للاسقاط هو أن يكون المستويان Π_1 ، Π_2 متعامدين وإنما اصطلح فقط على اختيار أحدهما أفقياً والآخر رأسياً . فلنفرض الآن أننا ثبتنا المستوى الافقى Π_1 وغيرنا وضع Π_2 مع بقائه عمودياً على Π_1 ورمزنا الى الوضع الجديد للمستوى الرأسى Π_2 بالرمز Π_3 — وهو رأسى أيضاً — والى خط الارض الجديد وهو خط تقاطع Π_1 ، Π_3 بالرمز ع$_1$ وأخيراً الى « المسقط الرأسى الجديد » للنقطة ن على المستوى Π_3 بالرمز ن‴ فمن ثم أن وضع النقطة ن فى الفراغ يتحدد أيضاً بمعلومية ن′ ، ن‴ . والمسقط الافقى ن′ يبقى فى هذه الحالة ثابتاً لا يتغير وكذلك يبقى ثابتاً ارتفاع النقطة الثابتة ن عن المستوى الافقى Π_1 . أما المسقط الجديد ن‴ فيمكن رسمه فى مستوى الورقة بتطبيق Π_3 على Π حول خط الارض الجديد ع$_1$ — وذلك كما سبق لنا تطبيق Π_2 على Π_1 حول ع (بند ١) للحصول على ن″ — ثم إنزال عمود من ن′ على ع$_1$ فتكون ن‴ واقعة على هذا العمود — الموازى لخطوط التناظر الجديده — بحيث تبعد عن خط الارض الجديد ع$_1$ يبعد مساو للارتفاع الثابت للنقطة ن عن Π_1 أى مساو فى المقدار والاشارة لبعد المسقط الرأسى القديم ن″ عن خط الارض القديم ع .

وبالمثل يجوز تثبيت المستوى الرأسى Π_2 وتغيير المستوى الأفقى Π_1 مع الاحتفاظ به عمودياً على Π_2 فيكون « المسقط الافقى الجديد » ه'''' للنقطة ه على المستوى الافقى فى وضعه الجديد — ولنرمز له بالرمز Π_4 — وقعاً على العمود النازل من ه'' على خط الارض الجديد $ع_2$ وهو خط تقاطع Π_2 ، Π_4 بحيث يكون بعد ه'''' عن $ع_2$ مساوياً فى المقدار والاشارة لبعد ه' عن خط الارض الاصلى ع لأن كلا من البعدين يساوى فى هذه الحالة البعد الثابت للنقطة ه عن المستو الرأسى الثابت Π_2 (1) .

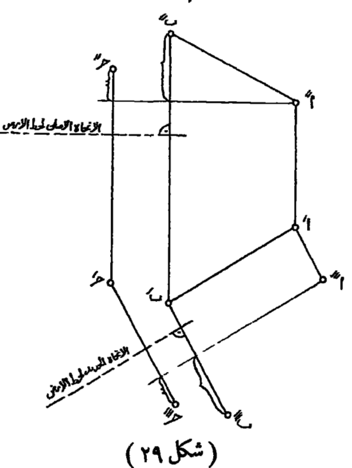
وقد تقضى ظروف المسألة — كما سنرى — بتكرار العملية السابقة أكثر من مرة فهذا التكرار لا يؤثر مطلقاً فى القواعد الاساسية المذكورة . فمثلا بعد تثبيت Π_1 وتغيير وضع Π_2 الى Π_3 فانه يمكن اعتبار Π_1 ، Π_3 المستويين الرئيسيين للاسقاط واعتبار ه' ، ه''' المسقطين الأصليين للنقطة ه أى المسقطين الافقى والرأسى على التوالى . فاذا غيرنا بعد ذلك وضع Π_1 الى Π_5 مثلا مع بقائه عموديا على Π_3 فان الحصول على « المسقط الافقى الجديد » للنقطة ه على Π_5 يتم فى هذه الحالة بنفس الطريقة التى شرحناها سابقا للحصول على ه'''' . وبعد ذلك يمكننا اعتبار Π_5 ، Π_3 المستويين الرئيسيين للاسقاط واعتبار مسقطى النقطة عليهما المسقطين الأصليين الافقى والرأسى فيجوز على هذا الأساس تثبيت أحدهما وتغيير وضع الآخر مرة أخرى وهكذا .

ويجوز تفسير العمليات السابقة بأنها اختيار مستويات إسقاط جديدة Π_3 ، Π_4 الخ مع الاحتفاظ بالمستويين الرئيسيين الاصليين Π_1 ، Π_2 ولذلك فانه يطلق على تلك المستويات اسم مستويات اسقاط مساعدة كما يطلق على المساقط ه''' ، ه'''' الخ للنقطه ه على تلك المستويات اسم المساقط المساعدة .

(1) المرجو من القارىء رسم شكل يبين هذه العمليات .

ويؤخذ مما تقدم أن المستويات المساعدة للاسقاط يجب أن تكون دائماً عمودية على أى المستويين الرئيسين للاسقاط أو — فى حالة تكرار العملية كما تقدم — على أى المستويين اللذين يجوز لنا اعتبارهما على الأساس السابق مستوى الاسقاط الرئيسيين .

ولنفرض الآن أننا حذفنا خطوط الأرض السابقة ع ، ع١ ، ع٢ الخ واكتفينا بمعلومية اتجاهاتها التى تحدد فى كل مرة اتجاهات مستويات الاسقاط فبديهى أن المساقط المساعدة لنقطة واحدة لا يمكن عندئذ تحديدها لأن إبعاد هذه النقطة عن « مستويات الاسقاط » تصبح فى هذه الحالة غير معروفة (بند ٢) . ولكن اذا علمت نقطتان فاكثر كان من الممكن رسم مساقطها المساعدة . ففى (شكل ٢٩) لنفرض أنه يراد رسم المساقط المساعدة ا‴ ، ب‴ ، حـ‴ للنقط ا ، ب ، حـ المعلومة كل منها بمسقطيها الافقى والرأسى مع حذف خط الارض : (ا′ ، ا″) ، (ب′ ، ب″) ، (حـ′ ، حـ″) وذلك على « المستوى الرأسى الجديد » Π_3 الذى يتحدد اتجاهه بمعلومية الاتجاه الجديد المبين لخط الارض . فمن الواضح للسبب المذكور آنفاً أن المسقط المساعد ا‴ للنقطة الاولى ا يجوز أن يكون أية نقطة حيثما اتفق على خط التناظر الجديد المرسوم من ا′ عمودياً



(شكل ٢٩)

على الاتجاه الجديد لخط الارض . فاذا تم اختيار ا‴ وجب أن يكون بعد ب‴ فى الاتجاه الجديد لخطوط التناظر عن المستقيم المرسوم من ا‴ موازياً للاتجاه الجديد لخط الارض — مساوياً لبعد ب″ فى الاتجاه القديم لخطوط التناظر عن المستقيم المرسوم من ا″ موازياً للاتجاه القديم لخط الارض لأن كلا من هذين البعدين يساوى الفرق الثابت بين ارتفاعى النقطتين ب ، ا عن المستوى الافقى Π_1 الذى لم يتغير اتجاهه . ويلاحظ هنا أنه يستوى قياس البعد المشار اليه بحيث تكون ب‴ كما هو مبين فى (شكل ٢٩) أو فى الجهة الاخرى بالنسبة للمستقيم المرسوم من ا‴ موازياً للاتجاه الجديد لخط الارض ولكن بعد تثبيت ا‴ ، ب‴ يكون المسقط الجديد حـ‴ لأية نقطة أخرى مثل حـ قد تحدد تمام التحديد . وغنى عن البيان أنه كان من الممكن اختيار ب‴ أو حـ‴ أولا ثم تعيين المسقطين المساعدين للنقطتين الأخريين على النحو السابق .

واذا كان الاتجاه الجديد لخط الارض موازياً الى ا′ ب′ فان معنى هذا أننا اخترنا المستوى الرأسى الجديد Π_3 ليكون موازياً الى المستقيم ا ب ويحدد مسقطه الجديد ا‴ ب‴ على Π_3 فى هذه الحالة البعد الحقيقى بين النقطتين ا ، ب [1] .

واذا اعتبرنا الآن المسقطين ا′ب′ ، ا‴ ب‴ (وهذا الأخير غير مرسوم فى شكل ٢٩ وإن كان محدداً بالنقطتين ا‴ ، ب‴) للمستقيم ا ب على Π_1 ، Π_3 حيث Π_3 يوازى المستقيم وغيرنا اتجاه Π_1 بحيث يصبح عمودياً على المستقيم فانه يكون فى هذه الحالة عمودياً على Π_3 ويمكن لذلك اعتباره فى هذا الوضع الجديد مستوياً افقياً جديداً Π_4 ويكون الاتجاه الجديد لخط الارض — خط تقاطع

(١) يلاحظ انه اذا اخترنا ا‴ واقعة على ا′ نفسها أمكن اعتبار العملية السابقة تطبيقاً للمستوى المسقط أفقياً للمستقيم ا ب — على المستوى الافقى Π_1 واعتبار ا‴ ب‴ موقع المستقيم ا ب بعد التطبيق . وفى هذه الحالة تتفق هذه الطريقة فى المبنى — وإن اختلفت فى المعنى — مع الطريقة المبينة فى (شكل ٤) .

Π_3 ، Π_4 — عمودياً على ا‴ ب‴ وبذا يؤول المسقط الاخير ا'''' ب''''
للمستقيم ا ب على Π_4 الى نقطة . أى أنه يلزم على وجه العموم تغييران لمستوى
الاسقاط الرئيسيين لجعل مستقيم ما عمودياً على أحدهما .

والغرض من المساقط المساعدة إما تسهيل حل المسائل النظرية كما رأينا فيما
تقدم وكما سنرى فى المثال الآتى أو إظهار معالم الأجسام وجعلها أكثر وضوحاً
اذا كانت موضوعة فى أوضاع خاصة بالنسبة لمستوى الاسقاط الرئيسين .
فالمسقطان الافقى والرأسى للهرم المبين فى (شكل ١٧٨) مثلا لا يعطيان لقارىء
الرسم فكرة واضحة عن هيئة الهرم وشكله لأن محوره عمودى على المستوى الافقى
فى حين أن مسقطه الافقى المساعد على مستو جديد عمودى على المستوى الرأسى
ومائل على هذا المحور يساعد كثيراً على إظهار معالمه وتقريبه للذهن .

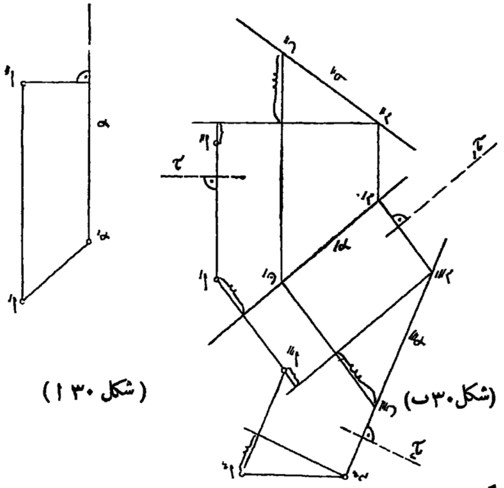
بند ٢٠ : مثال

المطلوب ايجاد البعد الحقيقى لنقطة معلومة ا عن مستقيم معلوم α
الخطوات اللازمة لحل هذه المسألة حلا مباشراً هى :
(أولا) نعين المستوى المار بالنقطة عمودياً على المستقيم (بند ١٦)
(ثانياً) نجد نقطة التقاطع ه لهذا المستوى مع المستقيم (بند ١٠)
(ثالثاً) نجد البعد الحقيقى بين النقطتين ا ، ه (بند ٢) فيكون هو البعد
المطلوب .

وهناك حل آخر لهذه المسألة بأن نطبق المستوى المعين بالمستقيم α والنقطة ا
على أحد مستوى الاسقاط الرئيسيين (بند ١٧) فاذا أنزلنا من الموقع (ا)
للنقطة ا عموداً على (α) فقابله فى (ه) كان (ا) (ه) هو البعد المطلوب .

غير أننا نريد الآن أن نبين طريقة حل هذه المسألة باستخدام المساقط
المساعدة فنقول :

لو أن المستقيم كان عمودياً على أحد مستويي الاسقاط لكان العمود النازل من النقطة عليه موازياً لهذا المستوى ولأمكن لذلك قياس البعد الحقيقي بين النقطة والمستقيم مباشرة من مسقط العمود على هذا المستوى . فالمستقيم α في (شكل ٣٠ ا) عمودي على المستوى الافقي Π_1 ولذا كان البعد المطلوب



(شكل ٣٠ ا)

(شكل ٣٠ ب)

مساوياً في هذه الحالة المسقط الافقي للعمود النازل من النقطة على المستقيم أي مساوياً البعد ا′ α' .

فاذا كان المستقيم المعلوم مائلا على مستويي الاسقاط الرئيسيين كما هو مفروض في رأس المسألة[1] (شكل ٣٠ ب) وأمكننا تغيير مستويي الاسقاط بحيث

(١) اذا قيل « مستقيم معلوم » فمعنى ذلك أنه يجب اختيار هذا المستقيم في وضع عام أي مائلا بالنسبة لمستويي الاسقاط الرئيسيين أما اذا اريد التخصيص فيجب أن ينص على ذلك في رأس المسألة فيقال مثلا « المعلوم مستقيم أفقي » او « عمودي على Π_2 » الخ .

يصبح أحدهما عمودياً على المستقيم فانا نحصل على الحالة الخاصة المذكورة آنفاً.

وللوصول الى هذا الوضع يلزم — كما قدمنا — تغييران لمستويى الاسقاط الرئيسيين أو بمعنى آخر يجب استخدام مستويى إسقاط مساعدين Π_3 ، Π_4 [1]. وقد اخترنا فى (شكل ٣٠ ب) أولهما Π_3 عمودياً على المستوى الافقى Π_1 وموازياً للمستقيم وبذا يكون الاتجاه الجديد τ_1 لخط الارض موازياً الى المسقط الافقى α' للمستقيم فاذا فرضنا نقطتين حيثما اتفق م ، هـ على المستقيم α وعينا المساقط المساعدة م''' ، هـ''' ، ا''' للنقط الثلاث م ، هـ ، ا على Π_3 وذلك بالطريقة المشروحة فى (بند ١٩) كان $\alpha''' \equiv$ م''' هـ''' ، ا''' المسقطين الرأسيين الجديدين للمستقيم α والنقطة ا . والآن نعتبر Π_1 ، Π_3 مستويى الاسقاط الرئيسين ونختار ثانى مستويى الاسقاط المساعدين Π_4 عمودياً على المستقيم فيكون عمودياً على Π_3 وبذا يكون الاتجاه الأخير τ_2 لخط الارض عموديا على α''' ويؤول مسقط المستقيم على Π_4 الى النقطة α^4 (حيث يدل الرقم «٤» على عدد الشروط) التى يجوز أن تكون أية نقطة على α''' أما المسقط الأخير ا^4 للنقطة ا فيقع على العمود المرسوم من ا''' على τ_2 بحيث يكون بعد ا^4 عن المستقيم المرسوم من α^4 موازياً الى τ_2 مساوياً لبعد ا' عن α'. فالبعد المطلوب هو إذن البعد بين النقطتين α^4 ، ا^4 [2].

ملحوظ : اذا كان الاتجاه الجديد τ_1 لخط الارض عمودياً على الاتجاه الاصلى τ الذى يكون عادة أفقيا فان مستوى الاسقاط الجديد يكون عمودياً على كل من

---

(١) اذا كان المستقيم موازيا لأحد مستويى الاسقاط الرئيسيين فانه يكفى مستوى مساعد واحد.

(٢) المطلوب استخدام الشكل فى رسم المسقطين الافقي والرأسى η' ، η'' للعمود η النازل من النقطة على المستقيم.

المستويين الافقى والرأسى Π_1 ؟ Π_2 ويسمى فى هذه الحالة **بالمستوى الرأسى الثانى** كما يسمى المسقط عليه **بالمسقط الرأسى الثانى** وكثيراً ما يطلق على هذا المستوى مع Π_1 ؟ Π_2 اسم *المستويات الرئيسية الثلاثة للاسقاط* .

الفصل السابع

الظـــلال

تعاريف ومبادىء أولية — تطبيقات عملية لمسائل الوضع

بند ٢١ : ماهية الظلال والاغراض الرئيسية من رسمها

معلوم أنه اذا وقع جسم أوسطح فى طريق الأشعة المنبعثة من مصدر ضوء معين فانه ينشأ عن ذلك ما يعرف باسم **الظلال**.

فاذا علم جسم وأمكن — بعد افتراض وجود مصدر ضوء معين — تحديد هذه الظلال ورسمها أو محاكاتها فى مسقط الجسم (وتكون هذه المحاكاة عادة بواسطة التلوين أو التظليل) فاننا نحصل بذلك على رسم يكون أقرب الى الفهم واكثر بلاغة فى التعبير عن الجسم المبين.

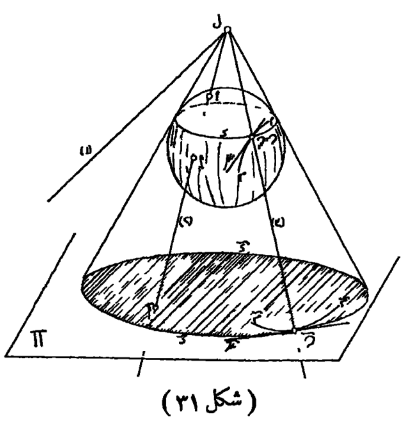
وإن هذه العملية لتعتبر من التمارين المهمة فى الهندسة الوصفية لما لها من فائدة عظمى فى تربية ملكة التصور عند المبتدىء وتعليمه قراءة الرسومات الهندسية لأن تحديد الظلال يتطلب منه دائماً أن يتصور هيئة الجسم المرسوم ووضعه فى الفضاء.

بند ٢٢ : تعاريف أساسية

اذا وضعنا كرة غير شفافة (شكل ٣١) أمام **نقطة مضيئة** ل وفرضنا أن الأشعة الضوئية تنبعث من هذه النقطة فى «خطوط مستقيمة» فانه يمكن تقسيم هذه الأشعة بالنسبة الى الكرة الى ثلاثة أقسام : قسم لا يقطع الكرة (فى نقط حقيقية) مثل الشعاع (١) وقسم مثـــل الشعاع (٢) يقطع الكرة فى نقطتين منفصلتين $ا^{٢}$ $ا_{١}$ حيث ا هى النقطة **المضاءة** $^{٢}ا_{١}$ هى النقطة **المظلمة**. أما القسم

الثالث والأخير فهو مجموعة الأشـــعة الضوئية التى تمس الكرة وتولد بذلك مخروطاً ضوئياً مرسومة داخله الكرة . فالشعاع (٣) مثلا وهو أحد رواسم المخروط المذكور يمس الكرة فى النقطة ه أو بتعبير آخر يقابل الكرة فى النقطتين المنطبقتين ه≡ه١ .

والمحل الهندسى للنقطة ه وهو دائرة التماس ى بين مخروط الضوء والكرة يسمى **خط الظل** ويفصل بين الجزء المضاء وبين الجزء المظلم أو **الواقع فى الظل** . وهذا الظل يسمى **بالظل الحقيقى** وذلك تمييزاً له من **الظل الظاهرى أو الظل الساقط** الذى يمكن الحصول عليه اذا قابلت الاشعة الضوئية فى طريقها بعد مغادرتها لسطح الكرة سطحاً آخر أو مستوياً مثل المستوى Π فى (شكل ٣١) .



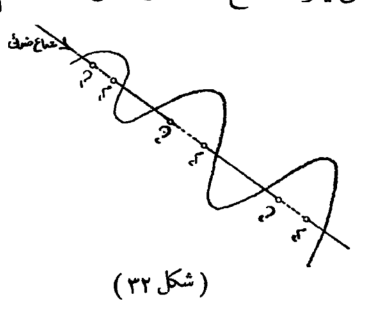
(شكل ٣١)

والمنحنى المقفل ى̃ الذى ينتهى به الظل الساقط هو المحل الهندسى للنقطة ه̃ حيث ه̃ هى ظل النقطة ه أى نقطة تقابل الشعاع الضوئى (٣) الذى يمس الكرة فى النقطة ه — مع المستوى Π الذى يستقبل الظل . فالمنحنى ى̃ بعبارة أخرى — وهو فى حالة الكرة مقطع مخروطى — هو دائماً **ظل خط الظل** ى . ولهذا السبب فان تعيين خط الظل يسبق فى اكثر المسائل المتعلقة بالظلال ايجاد الظل الساقط على سطح آخر أو مستوى .

ويصدق ما تقدم فى جوهره على أجسام كثيرة أخرى غير الكرة مثل الاسطوانة والمخروط وهى التى يقطع فيها الشعاع الضوئى الجسم فى نقطتين اثنتين وجميع سطوح الدرجة الثانية (انظر بند ٤٥) من هذا النوع ويصدق كذلك على الاجسام المحدودة بمستويات مثل المنشور والمكعب والهرم الخ. إلا أنه فى هذه الحالات يجوز أن يكون خط الظل وكذا الخط المحدد للظل الساقط خطاً منكسراً أو منحنياً على حسب نوع الجسم (انظر بند ٢٩).

بند ٢٣ : الظل الحقيقى والظاهرى فى حالة الاجسام الملتوية

أما بعض الاجسام التى يقابل فيها الشعاع الضوئى الجسم فى اكثر من نقطتين كما هو مبين فى (شكل ٣٢) ففى هذه الحالة يمكن دائماً التفرقة بين النقط $ه_١$ ، $ه_٢$ ، $ه_٣$ الخ وهى التى يكون الشعاع عندها داخلا فى مادة الجسم وبين النقط $م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$ الخ وهى النقط التى يكون الشعاع عندها خارجاً من مادة الجسم. فجميع النقط $م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$ الخ يقال إنها فى ظل حقيقى. أما النقط $ه_١$ ، $ه_٢$ ، $ه_٣$ الخ فهى إما مضاءة مثل النقطة الاولى $ه_١$ أو فى ظل ظاهرى مثل $ه_٢$ ، $ه_٣$ الخ فالفرق إذن بين $م_٢$ ، $ه_٢$ مثلا الموجودين

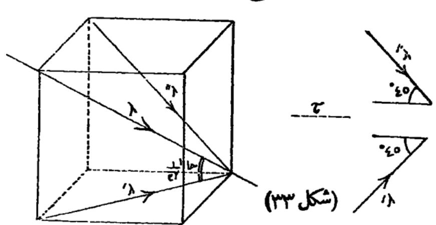


(شكل ٣٢)

فى ظل حقيقى وظاهرى على التوالى أن $م_٢$ تكون دائما مظلمة حتى ولو أزلنا الاجزاء المحيطة بها من الجسم ولا يمكن لذلك أن يقع عليها ظل ظاهرى فى حين أن $ه_٢$ تصبح مضاءة بمجرد إزالة جزء الجسم الذى يحجب عنها الضوء.

بند ٢٤ : الاضاءة

مصدر الضوء إما أن يكون « نقطة هندسية » موجودة على بعد محدود من الجسم وذلك مثل الشمعة أو المصباح الكهربائى (وهذا فرض نظرى لتسهيل الحل إذ من الواضح أن الاشعة الضوئية المنبعثة من شمعة مثلا لا تلتقى فى الحقيقة فى نقطة واحدة) ويطلق على الاضاءة فى هذه الحالة اسم الاضاءة المركزية — وإما أن تكون النقطة المضيئة بعيدة جداً بحيث تكتسب أشعتها خاصية التوازى مثل أشعة الشمس وفى هذه الحالة تكون الاشعة الضوئية كلها موازية لاتجاه معين بحيث يؤول مخروط الضوء المذكور فى (بند ٢٢) الى أسطوانة ضوء وتسمى الاضاءة عندئذ بالاضاءة المتوازية . وهذا النوع الأخير من الاضاءة هو المستعمل فى جميع الرسوم الفنية تقريباً بل إن الاتجاه ٨ الذى تكون الاشعة موازية له يؤخذ فى هذه الرسوم زيادة فى تسهيل رسم الظلال موازياً لقطر المكعب الذى توازى أوجهه الثلاثة مستويات الاسقاط الرئيسية (شكل ٣٣) لأن كلا من المسقط الافقى ٨' والرأسى ٨'' لهذا القطر يصنع فى هذه الحالة مع الاتجاه ع لخط الارض زاويه مقدارها ٤٥° ويسمى هذا النوع من الاضاءة المتوازية بالاضاءة القطرية كما تسمى



(شكل ٣٣)

الاشعة الضوئية بالاشعة ذات ال ٤٥°. ويجب أن يلاحظ أن زاوية ميل الأشعة فى هذه الحالة على المستوى الافقى أو الرأسى لاتساوى ٤٥° وإنما هى الزاوية التى جيبها يساوى $\frac{1}{\sqrt{3}}$ كما يتضح بسهولة من (شكل ٣٣) .

بند ٢٥ : الوجه المظلم والوجه المضاء لمستو أو سطح صغير معلوم

اذا تصورنا ضوءاً منبعثاً من نقطة مضيئة وواقعاً على مستو معين أو سطح صغير فمع أن كل شعاع يقطع المستوى أو السطح الصغير فى نقطة واحدة إلا أنه يمكن التمييز بين ناحيتين : الناحية التى يقع عليها الضوء وتسمى بالوجه المضاء والناحية الأخرى وتسمى بالوجه المظلم .

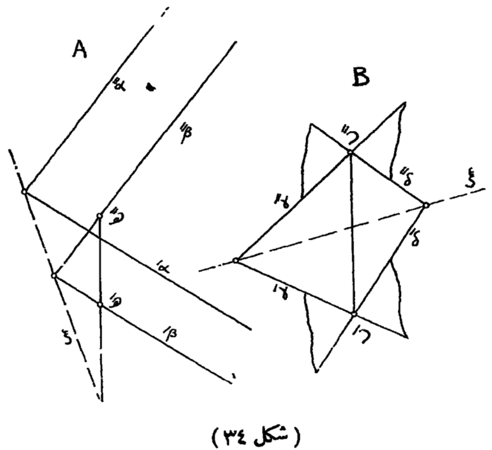
بند ٢٦ : ظل النقطة

الظل ~ن~ الذى تلقيه نقطة ما مثل ن على مستو هو نقطة تقاطع الوجه المضاء من المستوى مع شعاع الضوء المار بالنقطة ن . والظل الذى تلقيه النقطة ن على سطح ما مثل المبين فى (شكل ٣٢) هو النقطة الاولى ن من نقط تقابل الشعاع الضوئى مع السطح أو هو نقطة تقابل الشعاع مع الجزء المضاء من السطح .

بند ٢٧ : كيفية تمييز الوجه المضاء من الوجه المظلم لمستو معلوم فى المسقطين الافقى والرأسى

قبل أن نبين الطريقة لذلك نذكر أن أى مستو مائل على مستوى الاسقاط الافقى والرأسى Π_1 ، Π_2 يمكن أن يشغل بالنسبة لهما أحد وضعين رئيسيين A ، B (شكل ٣٤) . ففى الوضع A يكون محور الائتلاف ع أى خط تقاطع المستوى A مع مستوى الائتلاف (بند ٥) واقعاً فى جهة واحدة بالنسبة للمسقطين هـ' ، هـ'' لأية نقطة هـ من نقط المستوى وبذلك تكون نسبة الائتلاف بين مسقطى أى شكل مرسوم فى المستوى A (بند ١٤) موجبة . وفى الوضع الثانى B تكون هذه النسبة سالبة . ويختلف المستويان من حيث الوضع بالنسبة لمستويى الاسقاط فى أن الوجه الذى يرى فى المسقط الرأسى من المستوى A هو نفس الوجه الذى يرى فى المسقط الافقى فاذا كان الوجه مضاء فى المسقط الرأسى

كان كذلك أيضاً فى المسقط الافقى وبالعكس . أما المستوى B فبخلاف ذلك إذ أن الوجه الذى نراه فى المسقط الرأسى هو غير الوجه الذى نراه فى المسقط الافقى . ويمكن تلخيص هذه الظاهرة فيما يلى :—



(شكل ٣٤)

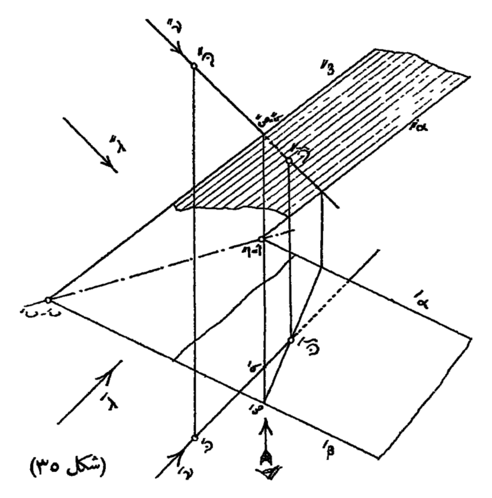
اذا كانت نسبة الائتلاف بين المسقطين الافقى والرأسى لمستو ما [١] موجبة وفرضنا نقطة خارج المستوى ونظرنا عموديا على المستوى الافقى ثم على الرأسى فانه هذه النقطة اما أن تكون فى الحالتين معاً ظاهرة أى واقعة أمام المستوى بالنسبة للناظر أو غير ظاهرة أى خلف المستوى . أما اذا كانت نسبة الائتلاف سالبة فانه النقطة تكون فى احدى الحالتين ظاهرة وفى الاخرى مختفية وراء المستوى .

ويمثل الآن (شكل ٣٥) مستويا A بمعلومية المستقيمين المتوازيين α ، β

(١) أى نسبة الائتلاف بين مسقطى أى شكل مرسوم فى المستوى .

فاذا علم أيضا اتجاه الاضاءة المتوازية λ فالمطلوب تمييز الوجه المضاء من الوجه المظلم فى كل من المسقطين .

أول ما يمكن معرفته من النظرة الأولى هو أن نسبة الائتلاف فى هذه الحالة سالبة لأن مسقطى أية نقطة من نقط المستوى A واقعتان فى جهتين مختلفتين بالنسبة الى محور الائتلاف ا′ ب′=ا″ب″ حيث ا′=ا″ هى نقطة تقاطع α′؟α″ وحيث ب′=ب″ هى نقطة تقاطع β′؟β″ .



(شكل ٣٥)

ثم نفترض نقطة مثل ى خارج المستوى ونمر بها الشعاع الضوئى ν بان نرسم من ى″ المسقط الرأسى ν″ لهذا الشعاع موازيا الى λ″ ونرسم من ى′ المسقط الافقى ν′ موازيا الى λ′ . ونجد نقطة تقابل ν مع المستوى A (بند ١٠) وهى النقطة ىَ فتكون هى ظل النقطة ى .

ولتعيين موضع النقطة ۏ من المستوى A فى المسقطين نختار فى المسقط الرأسى مثلا النقطة س" = ص" التى هى المسقط الرأسى المشترك لنقطتين: إحداهما س واقعة على الشعاع v والاخرى ص على المستقيم β ثم نجد المسقطين الافقيين س′ ، ص′ لكل من هاتين النقطتين (س′ على v′ ، ص′ على β′) وننظر فى اتجاه خطوط التناظر فى المسقط الافقى أى فى اتجاه السهم المبين فى (شكل ٣٥) والذى يمثل اتجاه النظر عمودياً على المستوى الرأسى . فلما كانت س أبعد عن الناظر من ص فان شعاع الضوء v الواقعة عليه النقطة س يكون فى هذا المكان خلف المستوى A بالنسبة الى الناظر عمودياً على المستوى الرأسى ويبقى كذلك حتى يقابل المستوى A فى النقطة ۏ فيظهر حينئذ أمامه . أى أن النقطة ۏ بالنسبة للناظر عموديا على المستوى الرأسى وراء المستوى A . وحيث إن نسبة الائتلاف سالبة كما قدمنا فان النقطة ۏ تكون بالنسبة للناظر عموديا على المستوى الافقى ظاهرة أى فوق المستوى A . وبذا يكون المسقطان الرأسى والافقى v" ، v′ للشعاع كما هو مبين بالشكل حيث تدل الاجزاء المرسومة بخطوط متقطعة منه على أنها غير منظورة هذا اذا فرضنا أن المستوى A محدود بالمستقيمين α ، β وليس ممتداً الى مالا نهايه .

وبمجرد تحديد هذه الاجزاء الظاهرة والمختفية من شعاع الضوء فى المسقطين يمكننا الاستنتاج بغير عناء بأن الوجه الظاهر من المستوى A فى المسقط الرأسى هو وجه مظلم فى حين أن الوجه الظاهر منه فى المسقط الافقى وجه مضاء .

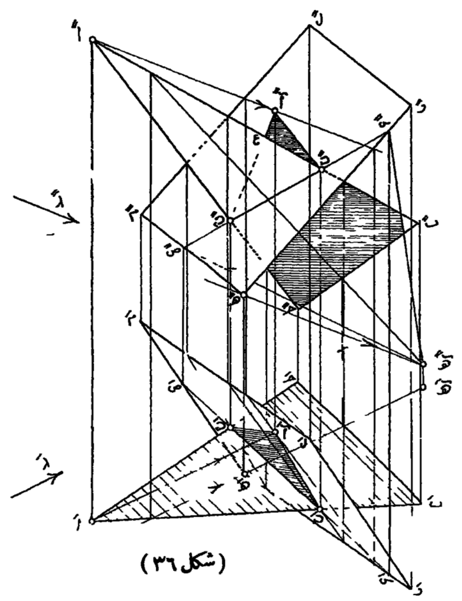
بند ٢٨ : مثال

المعلوم مثلث ا ب حـ فى المستوى A ومتوازى أضلاع و هـ م ل فى المستوى B (شكل ٣٦) والمطلوب تعيين ورسم الظلال الناتجة من وجود اضاءة متوازية

معلومة اتجاهها λ [١]

الخطوة الأولى : أوجد خط تقاطع المستويين: ﻫ١ ﻫ٢′ ، ﻫ١″ ﻫ٢″ (بند ١٠)

الخطوة الثانية : عين إشارة نسبة الائتلاف لكل من المستويين . ويلاحظ هنا أنه لا لزوم لرسم محور الائتلاف نفسه فى الحالين وإنما يكفى أن تتصور



(شكل ٣٦)

امتداد ل′ م′ ، ل″ م″ حتى يتقابلا وكذا امتداد و′ ﻫ′ ، و″ ﻫ″ لنعلم أن نسبة الائتلاف للمستوى B موجبة وبنفس الطريقة نجد أن هذه النسبة للمستوى A سالبة.

(١) يلاحظ أننا نفرض فى هذه المسألة عند الكلام عن المستويين A ، B أن كلا منهما محدود بالاضلاع المذكورة وليس ممتداً الى مالا نهاية .

الخطوة الثالثة : حدد الاجزاء الظاهرة والمختفية كما سبق بيـانه (فى بند ٢٧) ومن هذا التحديد يتضح أن الجزء ا ﻫ١ ﻫ٢ من المثلث فى المسقط الرأسى أمام المستوى B وأن الجزء ﻫ س ص من متوازى الاضلاع أمام المستوى A . وفى المسقط الافقى يكون الجزء ا ﻫ١ ﻫ٢ من المثلث ظاهراً فوق المستوى B والجزء ﻫ س ص من متوازى الاضلاع مختفيا تحت المستوى A .

الخطوة الرابعة : اوجد الظلين اَ ، ﻫَ للنقطتين ا ، ﻫ على المستويين B ، A على التوالى . فبتطبيق ما سبق ذكره فى (بند ٢٧) يمكن بسهولة إدراك أن ما يرى من المستوى B هو الوجه المضاء فى كل من المسقطين الافقى والرأسى . أما المستوى A فيرى منه الوجه المضاء كذلك فى المسقط الرأسى والوجه المظلم فى المسقط الأفقى وهذا الاخير هو الجزء الوحيد الواقع فى ظل حقيقى .

الخطوة الخامسة : الظلال الظاهرية . ففى المسقط الافقى لما كان وجه المثلث مظلما بطبيعته فهو لا يستقبل ظلا ظاهريا ويكون الظل الظاهرى الوحيد الذى يمكن رسمه فى المسقط الافقى هو ما يلقيه الجزء ا ﻫ١ ﻫ٢ من المثلث على المستوى B ولايجاد هذا الظل نصل اَ′ بكل من ﻫ′١ ، ﻫ′٢ فيكون اَ′ ﻫ′١ ، اَ′ ﻫ′٢ المسقطين الافقيين لظلى ا ﻫ١ ، ا ﻫ٢ على التوالى . ويكون اَ″ ﻫ″١ ﻫ″٢ هو المسقط الرأسى للظل الذى يلقيه الجزء ا ﻫ١ ﻫ٢ من المثلث على المستوى B إنما لا يظهر من هذا الظل سوى الجزء اَ″ ﻫ″١ ع لان الباقى منه يختفى وراء المثلث ا ﻫ١ ﻫ٢ . ولما كان وجه المثلث فى المسقط الرأسى مضاء فانه يستقبل الظل الذى يلقيه الجزء ﻫ س ص من متوازى الاضلاع لوجود هذا الجزء أمام المستوى A . ولتعيين هذا الظل نصل المسقط الرأسى ﻫَ″ لظل النقطة ﻫ على المستوى A بكل من س″ ، ص″ (حيث س ، ص هما نقطتا تقابل ﻫ و ، ﻫ م

مع المستوى A [١]) فيكون هـ" س"ص" هو الظل الظاهرى الذى يلقيه الجزء هـ س ص على المستوى A إنما لا يظهر منه سوى الجزء المبين بالشكل لأن باقى الظل يقع بعضه خارج المثلث ا ب حـ وبعضه لا يرى لأنه مختف وراء متوازى الاضلاع.

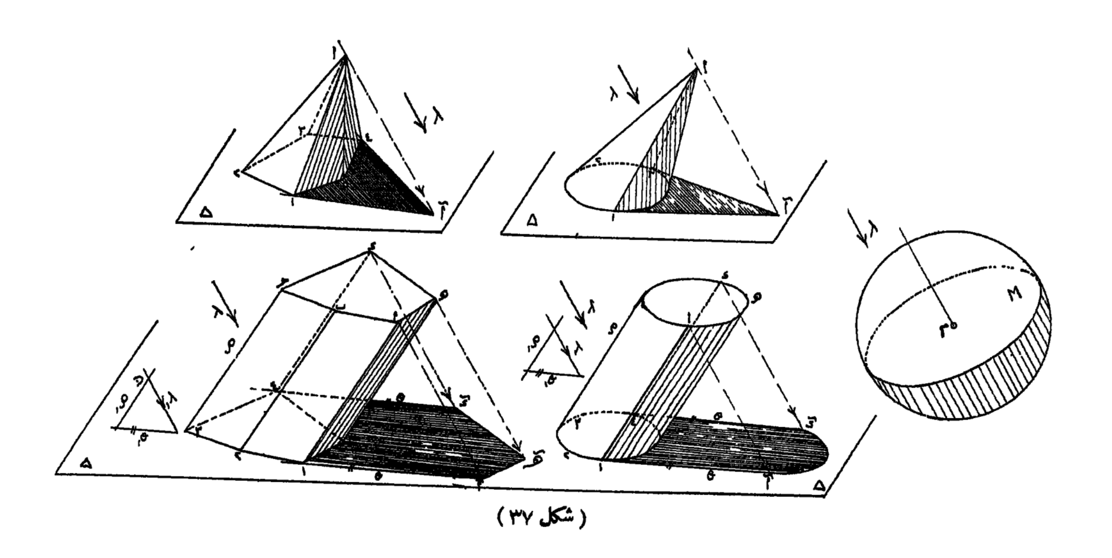
ملحوظة : رغبة فى جعل الرسومات المبينة بها الظلال اكثر وضوحا قد جرت العادة بتمييز الظلال الحقيقية من الظاهرية عند التعبير عنها فى الرسم ويكون ذلك بتظليل النوع الثانى تظليلا أثقل من الاول (قارن شكل ٣٦).

بند ٢٩ : ظلول بعض الاجسام البسيطة

نورد فيما يلى كيفية تعيين الظلال ورسمها للهرم والمنشور والمخروط والاسطوانة والكرة فى حالة الاضاءة المتوازية مقتصرين على الشرح الفراغى وتاركين للقارىء أن يتابع الحل الاسقاطى بنفسه (شكل ٣٧).

فلايجاد الظل الذى يلقيه الهرم المبين بالشكل على مستوى قاعدته Δ نمر برأسه ا شعاع الضوء الموازى لاتجاه الاضاءة λ ثم نجد نقطة تقابله آ مع Δ فتكون هى ظل النقطه ا على هذا المستوى. فاذا رسمنا من آ فى المستوى Δ المستقيمين الحرفيين آ ١ ، آ ٤ (اللذين يشترك كل منهما مع القاعدة فى نقطة واحدة فقط) فان هذين المستقيمين يحدان الظل الظاهرى آ ١ ٢ ٣ ٤ آ الساقط على المستوى Δ . ويكون خط الظل للهرم كما يتضح بسهولة من الشكل هو الخط المنكسر ١ ا ٢ ٣ ٤ ا حيث يفصل كل مستقيم من مستقيمات هذا الخطين وجهين أحدهما مضاء والآخر مظلم فمثلا المستقيم ا ١ يفصل بين الوجه المضاء ا ١ ٢ والوجه المظلم ا ١ ٥ والمستقيم ا ٢ يفصل بين الوجه المضاء ا ١ ٢ والقاعدة المظلمة وهكذا .

(١) يلاحظ أن هاتين النقطتين « نظريتان » وليس لهما وجود فعلى لاننا فرضنا أن المستوى A ينتهى بالمستقيمين ا ب ، ا حـ .



(شکل ۳۷)

وبالمثل تماما يمكننا تعيين الظل آ ١ ٢ ٣ ١ آ الذى يلقيه المخروط المبين بالشكل على مستوى قاعدته Δ وذلك برسم المماسين (بدلا من المستقيمين الحرفيين فى حالة المنشور) آ ١ ؟ آ ٣ للقاعدة من آ التى هى ظل الرأس ا على المستوى Δ . ويكون خط الظل فى هذه الحالة هو ا ١ ٢ ٣ ا .

أما فى حالتى المنشور والاسطوانة فتفترض نقطة فى الفراغ مثل ρ ويرسم منها مستقيمان λ_1 ؟ ρ_1 يوازيان على التوالى اتجاه الاضاءة λ وأحرف المنشور (أو رواسم الاسطوانة) ρ . فاذا تقاطع المستوى المعين بالمستقيمين λ_1 ؟ ρ_1 مع مستوى القاعدة Δ فى المستقيم ϑ_1 ورسم فى حالة المنشور المستقيمان الحرفيان (وفى حالة الاسطوانة المماسان للقاعدة) آ ١ ؟ ءَ ٤ الموازيان الى ϑ_1 فان هذين المستقيمين (أو المماسين) يحدان من الخارج الظل الظاهرى الذى يلقيه المنشور (أو الاسطوانه) على مستوى القاعدة . ويكون خط الظل فى حالة المنشور هو الخط المنكسر ا ١ ٢ ٣ ٤ ء ﻫ ا وفى حالة الاسطوانة الخط ا ١ ٢ ٣ ٤ ء ﻫ ا .

ويلاحظ أن الرواسم الفاصلة بين الاجزاء المضاءة والمظلمة فى حالتى المخروط والاسطوانة هى *رواسم التماس* بين كل منهما وبين المستويات المماسة له الموازية لاتجاه الاضاءة . كما يلاحظ أن هذه الرواسم قد تزيد فى كل حالة عن اثنين إذ أن هذا العدد يتوقف على عدد المماسات التى يمكن رسمها من آ الى القاعدة فلوكانت قاعدة المخروط أو الاسطوانة منحنياً من الرتبة الثالثة مثلا (انظر بند ٣٣) لأمكن على وجه العموم رسم ثلاث مماسات من آ الى القاعدة .

ويلاحظ أيضاً أنه اذا كان كل من المنشور والاسطوانة منتهياً من أعلا بمستو يوازى القاعدة كما هو مبين فى (شكل ٣٧) فان ﻫَ آ ؟ ﻫَ ءَ فى حالة المنشور يكونان موازيين الى ﻫ ا ؟ ﻫ ء ويكون ظل قوس الدائرة ا ﻫ ء على Δ فى حالة

الاسطوانة باعتبارها أسطوانة دائرية — هو قوس دائرة أخرى مساوية للاولى .

ولتعيين خط الظل فى حالة الكرة المبينة فى (شكل ٣٧) نجد المستوى M المار بالمركز م عمودياً على اتجاه الاضاءة λ فيقطع الكرة فى دائرة عظمى تكون هى خط ظل الكرة .

والظل الظاهرى الذى يلقيه جسم ما على مستو لوجود نقطة مضيئة أو إضاءة متوازية يمكن اعتباره على التوالى مسقطاً مركزياً للجسم (منظور) أو مسقطاً متوازياً مائلا له على هذا المستوى . وتعتبر النقطة المضيئة فى الحالة الاولى مركزاً للاسقاط كما يعتبر اتجاه الاضاءة فى الحالة الثانية اتجاه الاسقاط .

بند ٣٠ : نظريات وتمارين

النظريات الآتية المتعلقة بظلال المستقيمات فى حالة الاضاءة المتوازية مفيدة فى الاحوال العملية واكثرها واضح من نفسه لايحتاج الى برهان :

١) ظل الخط المستقيم على مستو هو خط مستقيم يمر بنقطة تقابله مع المستوى .

٢) ظل المستقيم على مستو يوازيه هو خط مستقيم مواز للمستقيم نفسه .

٣) اذا فرضنا نقطتين ا ، ب على المستقيم المذكور فى النظرية السابقة فان ظل ا ب على المستوى الموازى له وهو اَ بَ يساوى ويوازى ا ب . ومن ذلك نستنتج أن ظل الدائرة على مستو يوازى مستويها هو دائرة أخرى مساوية للاولى ومركزها هو ظل مركز الدائرة الأصلية على المستوى .

٤) ظلال المستقيمات المتوازية على مستو هى نفسها مستقيمات متوازية .

٥) ظلا خط مستقيم واحد على مستويين يتقابلان على خط تقاطع المستويين .

٦) ظلا خط مستقيم على مستويين متوازيين هما مستقيمان متوازيان [١] .

(١) المفروض فى النظريات الرابعة والخامسة والسادسة أن اتجاه الاضاءة واحد لكل منها .

٧) اذا فرضنا مستقيماً عمودياً على أحد مستويى الاسقاط وليكن Π_2 فان ظله على أى مستو يوازى Π_2 يكون موازياً للمسقط الرأسى λ'' لاتجاه الاضاءة .

٨) الظل الذى يلقيه المستقيم المذكور فى النظرية السابعة على أى جسم يكون مسقطه الرأسى خطاً مستقيماً موازياً للمسقط الرأسى λ'' لاتجاه الاضاءة .

تمارين

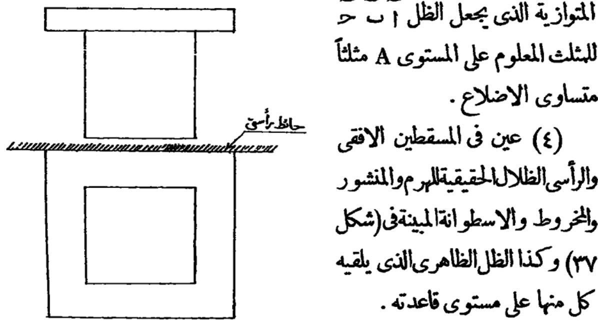
(١) اذا علم اتجاه الاضاءة أو نقطة مضيئة فاوجد الظل الذى يلقيه مستقيم معلوم على :

(ا) كرة (ب) اسطوانة دورانيه (حـ) مخروط دورانى

(٢) اذا علم اتجاه الاضاءة أو نقطة مضيئة فاوجد الظل الذى يلقيه كل من مستقيمين غير متقاطعين على الآخر .

(٣) المعلوم مثلث ا ب حـ ومستوى A والمطلوب ايجاد اتجاه الاضاءة المتوازية الذى يجعل الظل اَ بَ حَ للمثلث المعلوم على المستوى A مثلثاً متساوى الاضلاع .

(٤) عين فى المسقطين الافقى والرأسى الظلال الحقيقية للهرم والمنشور والمخروط والاسطوانة المبينة فى (شكل ٣٧) وكذا الظل الظاهرى الذى يلقيه كل منها على مستوى قاعدته .



(شكل ٣٨)

(٥) المطلوب تعيين ورسم الظلال الحقيقية للجسم المبين فى (شكل ٣٨) وكذا الظل الذى يلقيه هذا الجسم على الحائط الرأسى المبين وذلك عندما تكون الاضاءة قطرية .

الباب الثانى

المنحــــــنيات والسطوح

تعاريف ومبادىء أساسية

الفصل الاول

المنحنيات المستوية

بند ٣١ : تعاريف

يسمى المنحنى **مستوياً** اذا كانت جميع نقطه واقعة فى مستو واحد . ويمكن اعتباره **متولداً** إما عن تحرك نقطة فى المستوى بحيث يكون المنحنى **المحل الهندسى** لهذه النقطة أو عن تحرك مستقيم فى المستوى أيضاً بحيث يكون المنحنى ماساً لهذا المستقيم فى جميع أوضاعه ويطلق على المنحنى فى هذه الحالة اسم **غلاف المستقيم** .

وواضح أنه فى كل نقطة من نقط المنحنى باعتباره المحل الهندسى لنقطة متحركة يمكن رسم مماس له وهذه المماسات هى الاوضاع المختلفة لمستقيم يتحرك مغلفاً للمنحنى .

ولنفرض الآن أن $ن$ نقطة على منحن ما وأننا رسمنا مستقيما ماراً بها ليقطع المنحنى فى نقطة مثل $ن_1$ مجاورة للنقطة الاولى . فاذا أخذت $ن_1$ فى التحرك على المنحنى متجهة نحو $ن$ فان المستقيم القاطع $ن ن_1$ يدور فى المستوى حول $ن$ ويسمى **الوضع النهائى** له عند ما تنطبق $ن_1$ على $ن$ **بمماس المنحنى فى النقطة** $ن$ أو بعبارة أخرى :

المماس لمنحنى ما هو المستقيم الذى يصل نقطتين متجاورتين ومتقاربتين قرباً لانهائياً أى نقطتين « متتاليتين » من نقط المنحنى[1] .

واذا اعتبرنا المنحنى غلافاً لمستقيم متحرك فبنفس التفكير السابق نستطيع القول إن :

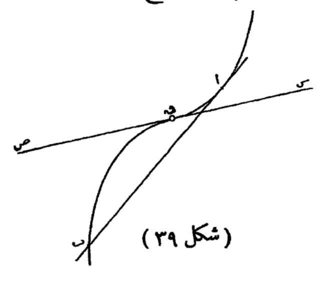
نقطة التماس هى نقطة تقاطع مماسين « متتاليين » من مماسات المنحنى .

ويسمى المستقيم المرسوم فى مستوى المنحنى من نقطة عليه عمودياً على المماس فيها **بعمودى المنحنى** فى هذه النقطة .

يتضح من التعاريف السابقة أنه فى كل نقطة « عادية » من نقط المنحنى يمكن رسم مماس واحد له كما أن لكل مماس عادى نقطة تماس واحده — نقول « عادية » لأن هناك حالات شاذه نبين بعضاً منها فيما يلى .

بند ٣٢ : النقط والمماسات الشاذة

مماس المنحنى فى نقطة عادية مثل ا (شكل ٣٩) يشترك مع المنحنى كما قدمنا فى نقطتين متتاليتين ومتحدتين فى النقطة ا . فاذا قطع هذا المماس المنحنى فى نقطة « ثالثة » مثل ب ثم أخذ فى التحرك مغلفا للمنحنى فان نقطة التقاطع ب تتحرك على المنحنى فاذا كانت هذه الحركة بحيث تقترب النقطتان ب ، ا — نقطة التقاطع ونقطة التماس — فانه يحدث فى بعض الأحايين أن يكون هناك وضع للمماس

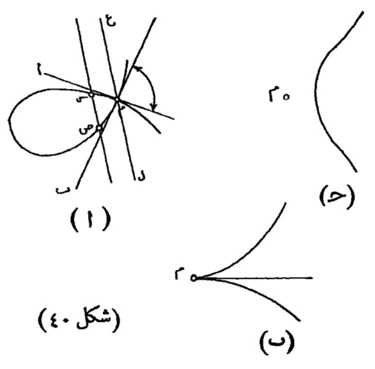


(شكل ٣٩)

(١) اذا كانت ن نقطة « عادية » على المنحنى فاننا نصل الى وضع نهائى واحد للمستقيم القاطع ن $ن_١$ سواء أخذنا $ن_١$ الى يمين النقطة ن أو الى يسارها .

تتحد فيه ب ، ا فى نقطة واحدة على المنحنى مثل ن . فهذه النقطة ن التى تجمعت فيها ثلاث نقط متقاربة : النقطتان المتتاليتان المتحدتان فى ا والنقطة الثالثة ب — هى نقطة شاذة وتسمى *نقطة انقلاب* . ويسمى المماس الشاذ س ص للمنحنى فى مثل هذه النقطة وهو يشترك مع المنحنى فى *ثلاث* نقط متحدة *مماس انقلاب* .

وكل واحدة من النقط المبينة فى (شكل ٤٠) تسمى *بالنقطة المزدوجة* لأن أى مستقيم مار بأية بنقطة مزدوجة م مثل المستقيم ع ل فى (شكل ٤٠ ا) يشترك مع المنحنى فى نقطتين متحدتين فى النقطة م وهذا الاتحاد ينتج من اقتراب المستقيم الذى يقطع المنحنى فى النقطتين القريبتين س ، ص — من المستقيم ع ل . ونوجه نظر القارىء الى أن النقطتين س ، ص لا يجوز اعتبارهما « متتاليتين » بالمعنى المذكور سابقا لأنهما واقعتان على فرعين مختلفين من المنحنى فى حين أن النقطتين المتتاليتين يشترط فيهما أن يكونا فى الاصل على فرع واحد مثل م س أو م ص . فالوضع النهائى لكل من المستقيمين القاطعين م س ، م ص هو مماس للمنحنى فى م ويشترك معه فى *ثلاث* نقط متحدة فى م اثنتان منها متتاليتان .



(شكل ٤٠)

ويطلق على النقطة المزدوجة فى (شكل ٤٠ ا) اسم *النقطة المعقودة أو العقدة* وعندها يمكن رسم مماسين حقيقيين م ا ، م ب للمنحنى .

أما النقطة المزدوجة م المبينة فى (شكل ٤٠ ب) فتسمى *نقطة رجوع* وعندها

ينطبق المماسان المذكوران آنفاً ويؤولان الى مماس واحد يشترك كما قدمنا مع المنحنى فى ثلاث نقط متحدة فى م . ويستطيع القارىء ان يحصل على مثل هذه النقطة برسم المنحنى $ص^٢ = س^٣$ فان نقطة الأصل التى هى إحدى نقط المنحنى هى نقطة رجوع .

وأخيراً يجوز أن يكون المماسان للمنحنى فى نقطة مزدوجة م تخيليين وذلك اذا كانت م إحدى نقط المنحنى ولكنها منفصلة عنه (شكل ٤٠ حـ) وتسمى لذلك النقطة المزدوجة فى هذه الحالة *بالنقطة المنعزلة* . فمثلا نقطة الأصل فى المنحنى $ص = س \sqrt{س - ١}$ هى نقطة منعزلة .

بند ٣٣ : أنواع المنحنيات المستوية

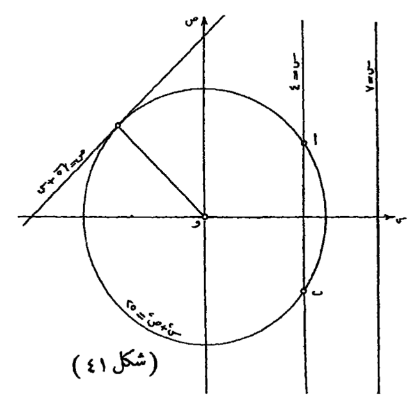
يسمى المنحنى المستوى قانونياً اذا نشأ عن تحرك نقطة أو مستقيم فى المستوى بكيفية خاصة وعلى حسب « قانون » معين . مثال ذلك المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى مستو بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين فى المستوى يساوى مقداراً ثابتاً هو منحن قانونى ويسمى كما هو معروف بالقطع الناقص .

وتنقسم المنحنيات القانونية الى *جبرية وغير جبرية*

فالمنحنى الجبرى هو المنحنى الذى يقطع أى مستقيم موجود فى مستويه فى عدد معين ثابت من النقط .

وبعض هذه النقط أو كلها يجوز أن تكون إما حقيقية منفصلة أو حقيقية متحدة أو تخيلية . فمثلا المنحنى $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ (شكل ٤١) هو منحن جبرى لأن أى مستقيم واقع فى مستويه يقطعه فى نقطتين اثنتين حيث نقطتا التقاطع فى حالة مستقيم مثل المستقيم الذى معادلته $س = ٤$ هما نقطتان حقيقيتان منفصلتان لأن جذرى المعادلة فى هذه الحالة حقيقيان وغير متساويين . ونقطتا التقاطع مع المستقيم الذى معادلته $ص = \sqrt{٥٠} + س$ مثلا حقيقيتان متحدتان أو منطبقتان لأن

جذرى المعادلة فى هذه الحالة يكونان حقيقيين ومتساويين فالمستقيم إذن مماس للدائرة . واخيراً يجوز أن تكون نقطتا التقاطع تخيليتين اذا كان جذرا المعادلة تخيليين كما هو الحال مثلا فى المستقيم الذى معادلته س = ٧ .



(شكل ٤١)

ويكون المنحنى غير جبرى اذا كان عدد نقط التقاطع حقيقية كانت أو تخيلية مع أى مستقيم — غير ثابت ويتوقف على وضع المستقيم فى المستوى . وذلك مثل المنحنى الجيبي ص = جاس فان عدد نقط تقاطع هذا المنحنى مع مستقيم ما فى المستوى حقيقية كانت أو تخيلية يختلف بين صفر ، ∞ .

ويسمى المنحنى الجبرى منحنياً من الدرجة النونية مثلا اذا كان كل مستقيم فى مستويه يقطعه فى ن من النقط حقيقية أو تخيلية فمثلا المنحنى السالف الذكر س² + ص² = ٢٥ هو منحن جبرى من الدرجة الثانية .

ويسمى المنحنى الجبرى منحنياً من الرتبة اللامية مثلا اذا أمكن رسم ل من الماسات حقيقية كانت أو تخيلية الى المنحنى من كل نقطة فى مستويه .

الدرجة والرتبة لمنحن جبرى غير متساويين على وجه العموم ولكنهما فى حالة الدائرة مثلا وكذا جميع منحنيات الدرجة الثانية متساويان .

ويمكن البرهنة تحليلياً على أن :

أى منحنيين جبريين أحدهما من الدرجة ن١ والثانى من الدرجة ن٢ يتقاطعان فى (ن١×ن٢) من النقط . وأن :

أى منحنيين جبريين أحدهما من الرتبة ل١ والثانى من الرتبة ل٢ يمكن رسم (ل١×ل٢) مماس مشترك لهما .

بند ٣٤ : الخواص الاسقاطية للمنحنيات

الخواص الهندسية التى لا تتغير بالاسقاط متوازياً كان أو مركزياً تسمى بالخواص الاسقاطية كما يسمى فرع الهندسة الذى يبحث فى هذه الخواص بالهندسة الاسقاطية (انظر بند ٧٩) .

فالدرجة والرتبة لمنحن جبرى هما من الخواص الاسقاطية لأن مسقط منحن من الدرجة النونية أو من الرتبة اللامية هو منحن جبرى من الدرجة النونية أو من الرتبة اللامية أيضاً [١] .

وكذلك التماس من الخواص الاسقاطية لأن مسقط المماس لمنحن فى إحدى نقطه هو نفسه مماس لمسقط المنحنى فى مسقط النقطة .

أما نصف قطر الانحناء (بند ٣٦) فلا يعتبر خاصة إسقاطية لأنه يتغير بالاسقاط .

ويتعين المنحنى المستوى فى طريقة مونج للاسقاط بمعلومية المستوى الموجود فيه المنحنى وأحد مسقطيه الافقى والرأسى .

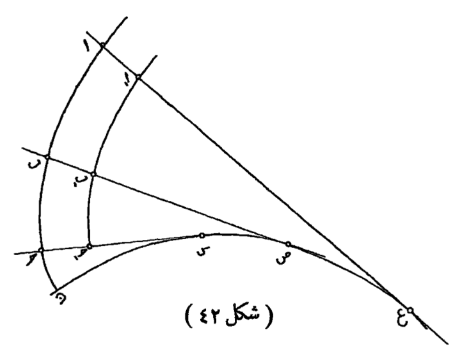
(١) اذا قطع مستقيم منحنياً مستوياً فى ن من النقط فان مسقطه على مستو ما يقطع مسقط المنحنى فى ن من النقط أيضاً هى مساقط النقط الأولى على هذا المستوى .

بند ٣٥ : غلاف العموديات ومعامد المماسات

اذا فرضنا فى (شكل ٤٢) أن ا ب حـ منحن مستو ورسمنا عموديات المنحنى فى عدة نقط متتالية من نقطه فان غلاف هذه العموديات هو منحن جديد س ص ع يسمى *غلاف العموديات للمنحنى* ا ب حـ .

ويرى من نفس الشكل أن المنحنى ا ب حـ عمودى على مماسات المنحنى ع ص س فى نقطه المختلفه . ويسمى المنحنى العمودى على مماسات منحن آخر *بمعامد المماسات* .

ويمكن تصور رسم منحن معامد ا ب حـ لمماسات منحن معلوم س ص ع بالطريقة الآتية :



(شكل ٤٢)

تتصور خيطاً ثابت الطول ع د أحد أطرافه ع مثبت فى نقطة من نقط المنحنى المعلوم د س ص ع ومنطبق بتمامه على المنحنى . فاذا تحرك الطرف الآخر د مبتعداً عن المنحنى س ص ع وظل الخيط مشدوداً فان د ترسم منحنياً معامداً حـ ب ا لمماسات المنحنى ع ص س . فالمنحنى ا ب حـ نشأ من «فرد» أو «بسط» الخيط ولهذا السبب يطلق عليه أحياناً اسم باسط أو فارد المنحنى س ص ع كما يطلق

على المنحنى س ص ع اسم مبسوط أو مفرود المنحنى ا ب حـ . ولو أن «الباسط» (وجمعها بواسط) شائعة الاستعمال فى التعبير عن معامد المماسات إلا أننا نفضل على وجه العموم التسمية التى اتخذناها عنواناً لهذا البند كلما أردنا التكلم عن المنحنيين معاً وذلك منعاً للبس .

ينتج مما تقدم :—

اولا : أن أى منحن مستو له غلاف واحد لعمودياته وعدد لا نهاية له من بواسطه أو معامدات مماساته .

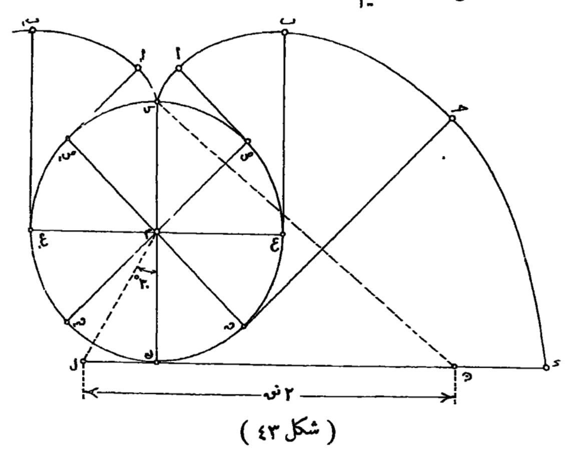
ثانياً : اذا اعتبرنا فى (شكل ٤٢) معامد المماسات ا ب حـ للمنحنى س ص ع فظاهر من عملية فرد الخيط السابق شرحها أن الفرق بين طول المماس ص ب للمنحنى س ص ع فى ص وبين طول المماس س حـ فى س يكون مساوياً لطول الجزء س ص من المنحنى .

ثالثاً : اذا أريد رسم أحد المعامدات ا ب حـ لمماسات منحن معلوم س ص ع (شكل ٤٢) فاننا نقسم المنحنى المعلوم الى عدة أقسام فى نقط متقاربة مثل س م١ ص م٢ ع . . . . فاذا قسنا على المماس فى كل نقطة من هذه النقط طولا مساوياً لطول المماس فى النقطة التى قبلها مباشرة زائداً طول جزء المنحنى المحصور بين النقطتين فان المحل الهندسى لنهايات هذه المماسات يكون المعامد المطلوب ا ب حـ لمماسات المنحنى المعلوم س ص ع وأى معامد جديد مثل ا١ ب١ حـ١ يكون موازياً للمعامد الأول ويمكن الحصول عليه بتغيير طول المماس فى النقطة الاولى للمنحنى المعلوم س ص ع .

فمثلا اذا أريد رسم المعامد المار بالنقطة س لمماسات الدائرة م فى (شكل ٤٣) أى رسم باسط الدائرة المار بالنقطة س — نقسم الدائرة الى عدة أجزاء فى النقط س م١ ص م٢ ع . . . ثم نرسم المماسات فيها للدائرة ونأخذ عليها الأبعاد ص ا م١ ع ب م٢

ن حـ ، ك ى . . . مساوية على التوالى لأطوال الأقواس ص س ، ع س ، ن س ، ك س . . . أى مساوية الى ط نق/٤ ، ٢ ط نق/٤ ، ٣ ط نق/٤ ، ٤ ط نق/٤ . . . حيث نق هو نصف قطر الدائرة . فالمنحنى س ا ب حـ ى . . . الذى يصل هذه النقط هو معامد المماسات المطلوب .

والطريقة البسيطة الآتية المعروفة باسم طريقة كوخانسكى [1] تسمح بقياس محيط الدائرة على خط مستقيم قياساً تقريبياً صحيحاً بقدر الامكان :



(شكل ٤٣)

نرسم (شكل ٤٣) مماسا حيثما اتفق للدائرة مثل ل ى ونرسم من المركز م المستقيم م ل ليقابل المماس فى ل صانعا معه زاوية مقدارها ٦٠° . ثم نقيس على المماس ابتداء من ل فى اتجاه نقطة التماس — البعد ل ف مساويا ثلاثة أمثال

(١) Kochansky

نصف قطر الدائرة ونصل ه س حيث س هي نقطة الدائرة المقابلة لنقطة التماس فيكون ه س مساويا نصف محيط الدائرة أي مساوياً ط نو تقريبا . ويستطيع القارىء أن يحقق هذه النتيجة بنفسه بعملية حسابية بسيطة .

رابعا : المنحنى المعامد لماسات منحن معلوم يتقاطع معه في نقطة رجوع . فالنقطة س في (شكل ٤٣) هي نقطة رجوع ويتألف المنحنى المعامد لماسات الدائرة في هذه الحالة من الفرعين الحلزونيين س ا ب حـ ء ... ، س $ا_١$ $ب_١$ $حـ_١$ $ء_١$ ... وهذه النتيجة تتضح من عملية فرد الخيط التي أشرنا اليها في أول هذا البند .

بند ٣٦ : نصف قطر الانحناء ودائرته

معلوم أن الدائرة منتظمة « الانحناء » في جميع نقطها وأن هذا الانحناء يقاس بمقلوب نصف القطر فاذا كان هذا صغيراً قيل إن انحناء الدائرة كبير وبالعكس .

فاذا فرضنا الآن منحنياً مستوياً مثل المنحنى س ص ه ل ك المبين في (شكل ٤٤) فلا شك أن مثل هذا المنحنى لا يمكن اعتباره كالدائرة منتظم الانحناء في جميع نقطه إذ من الواضح أن مقدار الانحناء عند النقطة س مثلا غيره عند ك .

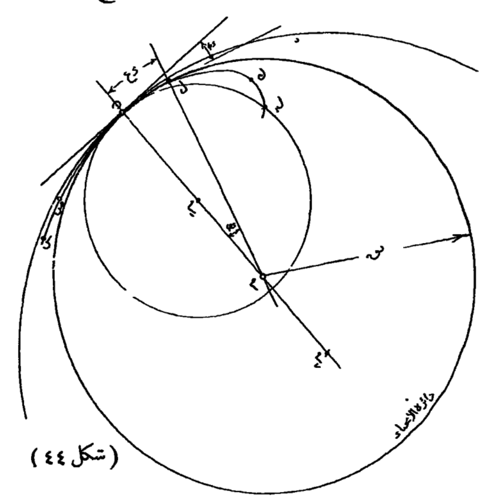
فاذا كانت ه إحدى نقط المنحنى وأريد قياس انحنائه عندها فاننا نفرض نقطة مثل ل على المنحنى قريبة من النقطة الاولى ونعتبر الجزء ه ل من المنحنى قوساً من دائرة مركزها م هو نقطة تقابل عمودي المنحنى في ه ، ل . فاذا كانت ل قريبة جداً من ه بحيث يمكن اعتبار ه ، ل نقطتين متتاليتين فان م تسمى في هذه الحالة مركز الانحناء وتسمى الدائرة التي تشترك مع المنحنى في الجزء ه ل والتي مركزها م بدائرة الانحناء ويعطينا مقلوب نصف قطرها نو المسمى بنصف قطر الانحناء مقياساً لانحناء المنحنى عند ه . فاذا رمزنا الى جزء المنحنى ه ل بالرمز ء ع والى الزاوية الصغيرة بين مماسي المنحنى في ه ، ل بالرمز ء φ وهي تساوي الزاوية بين العموديين المتتاليين للمنحنى في ه ، ل فان ء ع = نو × ء φ بحيث يكون

$$\frac{١}{ن} = \frac{ء\,\varphi}{ء\,ع} = ى$$

حيث ن هو نصف قطر الانحناء ، ى مقياس الانحناء عند ت .

يؤخذ مما تقدم :

أولا — اذا فرضنا فى (شكل ٤٤) أن الدائرة التى مركزها $م_١$ على عمودى المنحنى فى النقطة ت والتى تمس المنحنى فى هذه النقطة — تقطع المنحنى فى نقطة أخرى



(شكل ٤٤)

مثل $ل_١$ فالوضع النهائى للمركز $م_١$ اذا تحرك المركز $م_١$ على عمودى المنحنى بحيث تبقى الدائرة ماسة للمنحنى فى ت وبحيث تأخذ نقطة التقاطع $ل_١$ فى الاقتراب من نقطة التماس ت الى أن تنطبق عليها — هذا الوضع النهائى م هو مركز الانحناء عند ت ويكون م ت نصف قطر الانحناء وتكون الدائرة الماسة التى مركزها م دائرة الانحناء .

ثانياً — لما كانت أية دائرة ماسة للمنحنى فى ﻫ تشترك معه فى نقطتين متتاليتين ولما كانت دائرة الانحناء هى الوضع النهائى للدائرة الماسة اذا تقاطعت مع المنحنى فى نقطة « ثالثة » ل، وذلك عندما تنطبق ل، على ﻫ فينتج من ذلك أن دائرة الانحناء تشترك مع المنحنى فى ثلاث نقط متتالية وتسمى أحياناً لهذا السبب بالدائرة الملاصقة .

ثالثاً — يقال لدائرة الانحناء إنها تمس وتقطع المنحنى فى نفس الوقت أو بمعنى آخر إنها تعبر المنحنى عند النقطة .

رابعا — لايجاد مركز الانحناء ودائرته بالتقريب لمنحن غير قانونى [1] فى إحدى نقطه ﻫ — نختار النقطة ل على المنحنى القريبة منها قرباً كافياً فيكون مركز الانحناء م هو نقطة تقابل عمودى المنحنى فى ﻫ ، ل ويجب كما قدمنا أن تكون دائرة الانحناء « عابرة » للمنحنى عند النقطة ﻫ وهذه الحقيقة من شأنها أن تسهل رسم دائرة الانحناء رسما مضبوطاً بقدر الامكان . فاذا قارنا فى (شكل ٤٤) دائرة الانحناء م بكل من الدائرتين م١ ، م٢ وجدنا أن الدائرتين الاخيرتين وكذا أية دائرة ماسة أخرى غير دائرة الانحناء تمس المنحنى بجوار النقطة ﻫ من جهة واحدة فقط فى حين أن دائرة الانحناء م تمس المنحنى من الخارج الى يمين النقطة ﻫ ومن الداخل الى يسارها .

واذا طبقنا ما تقدم على المنحنى المبين فى (شكل ٣٩) عند نقطة الانقلاب ﻫ وجدنا أن نصف قطر الانحناء يساوى ∞ . والواقع أن المنحنى يكون انحناؤه صفراً عند نقطة الانقلاب إذ تؤول دائرة الانحناء الى مماس الانقلاب فيها . ويكون نصف قطر الانحناء صفراً فى حالة نقطة الرجوع (شكل ٤٠ ب) .

(١) اذا كان المنحنى قانونياً فانه يمكن التعبير عنه على صورة معادلة وفى هذه الحالة يمكن ايجاد مركز الانحناء ونصف قطره بالضبط . أنظر مثلا منحنيات الدرجة الثانية .

الفصل الثاني

المنحنيات الفراغيـــة

بند ٣٧ : تعاريف

يسمى منحنيا فراغياً أو ملتوياً أو مضاعف الانحناء كل منحن لاتقع جميع نقطه فى مستو واحد .

مماس المنحنى الفراغي فى إحدى نقطه هو المستقيم الذى يصل نقطتين متتاليتين . وأى مستو يمر بمثل هذا المماس يكون مستويا مماسا ويشترك مع المنحنى فى نقطتين متتاليتين أيضا فاذا قطعه فى نقطة « ثالثة » وأخذت هذه النقطة تتحرك على المنحنى فان المستوى يدور حول المماس . فاذا كانت نقطة التقاطع تتحرك على المنحنى مقتربة من نقطة التماس فانه يطلق على المستوى المماس فى وضعه النهائى عند ماتنطبق النقطة المتحركة على نقطة التماس اسم المستوى الملاصق .

فالمستوى الملاصق فى نقطة مثل ه من نقط منحن فراغي يمس المنحنى ويقطعه فى نفس الوقت أى يعبر المنحنى عند النقطة ه بحيث يمكن اعتبار الجزء من المنحنى المجاور من الجهتين لنقطة التماس ه مرسوما فى المستوى الملاصق اذا أخذناه صغيراً صغراً كافيا .

ويشترك المستوى الملاصق عند النقطة ه مع المنحنى فى ثلاث نقط متتالية ومتحدة فى ه أو بعبارة أخرى يمر بمماسين متتاليين .

والدائرة الواقعة فى المستوى الملاصق والمارة بنقط المنحنى الثلاث المتحدة فى ه (والتى تمس المماسين المتتاليين للمنحنى) هى دائرة الانحناء للمنحنى عند النقطة ه ونصف قطرها هو نصف قطر الانحناء ىو .

ويحدد لنا ىو مقياساً للانحناء الاول للمنحنى عند النقطة ه إذ أن هذا المقياس

كما قدمنا فى المنحنيات المستوية هو

$$\frac{١}{نق} = \frac{ى \varphi}{ى ع}$$

حيث ى φ هى الزاوية المحصورة بين المماس فى النقطة ه والمماس فى نقطة تالية لها ه$_١$ وحيث ى ع هو طول الجزء الصغير ه ه$_١$ من المنحنى.

غير أن هناك *انحناء ثانيا* للمنحنى الفراغى ولذا سمى مضاعف الانحناء — ذلك هو مقدار « بروزه » أو انحنائه عن المستوى. ويرتبط هذا الانحناء الثانى بالزاوية الزوجية المحصورة بين المستويين الملاصقين فى نقطتين متتاليتين . فاذا رمزنا لهذه الزاوية بالرمز ى ψ ولطول المنحنى بين النقطتين المتتاليتين بالرمز ى ع فان

$$\text{الانحناء الثانى} = \frac{ى \psi}{ى ع}$$

وهذا المقدار يساوى صفراً اذا كان المنحنى مستوياً لان جميع المستويات الملاصقة تنطبق فى هذه الحالة على المستوى المرسوم فيه المنحنى .

ويسمى المستوى المار باحدى نقط منحن فراغى عموديا على المماس فيها *بالمستوى العمودى* . كما يسمى خط تقاطع المستوى العمودى مع المستوى الملاصق *بالعمودى الرئيسى* أو *العمودى الاول* وذلك تمييزاً له من *العمودى الثانى* وهو المستقيم المار بنقطة التماس عموديا على المستوى الملاصق .

والمماسات المختلفة لمنحن فراغى تولد كما سنرى فيما بعد سطحا قابلا للانفراد يسمى *بالسطح المماسى للمنحنى* .

بند ٣٨ : أنواع المنحنيات الفراغية

تنقسم المنحنيات الفراغية « القانونية » كما تنقسم نظيراتها المستوية الى منحنيات جبرية وغير جبرية

فيسمى *منحنياً جبرياً من الدرجة ه* المنحنى الفراغى الذى يقطعه كل مستو فى الفضاء فى ه من النقط حقيقية أو تخيلية . فاذا وجد مستو يقطع منحنيا فراغيا جبريا من

الدرجة ن فى اكثر من ن من نقط المنحنى فان جزءا من المنحنى يقع بتمامه فى المستوى أو يؤول المنحنى الى منحن مستو .

ويمكن اعتبار المنحنى الفراغى القانونى أنه غلاف مستو متحرك هو فى جميع أوضاعه المستوى الملاصق للمنحنى بحيث يكون خاضعا أثناء الحركة لقانون معين. ففى هذه الحالة يكون خط تقاطع أى وضعين متتاليين من أوضاع المستوى مماسا للمنحنى كما تكون نقطة تقابل أى ثلاث مستويات متتالية نقطة من نقط المنحنى . وبناء على هذا التعريف الجديد فانه يطلق على المنحنى الفراغى القانونى اسم منحنى جبرى من الرتبة ل اذا أمكن رسم ل من المستويات الملاصقه له حقيقية أو تخيلية من كل نقطة فى الفراغ .

أبسط أنواع المنحنيات الفراغية هى تلك التى من الدرجة الثالثة لأن المنحنى الفراغى من الدرجة الاولى هو المستقيم والمنحنى الفراغى من الدرجة الثانية إما أن يكون مستويا (مقطعا مخروطيا) أو مكونا من مستقيمين غير متقاطعين . أما المنحنى الفراغى ذو الدرجة الثالثة فيمكن الحصول عليه فى حالة تقاطع السطوح المسطرة التى من الدرجة الثانية كالسطوح المخروطية والأسطوانية لأن خط تقاطع أى اثنين منها باعتبار كل منهما سطحا من الدرجة الثانية هو كما سنرى بعد منحن من الدرجة الرابعة فاذا اشترك السطحان فى راسم واحد فان منحنى التقاطع يحل الى هذا الراسم المستقيم وهو من الدرجة الاولى ومنحن من الدرجة الثالثة [1].

بند ٣٩ : مساقط المنحنيات الفراغية — قانون بولفيتس

مسقط منحن فراغى جبرى من الدرجة ن هو منحن مستو من الدرجة ن أيضاً

---

(١) منحنيات الدرجة الثالثة الفراغية يطلق عليها أحياناً اسم « المقاطع المخروطية التكعيبية » فيقال قطع ناقص تكعيبى أو قطع زائد تكعيبى أو قطع مكافىء تكعيبى على حسب نوع الاسطوانة التى يمكن رسم هذه المنحنيات على سطحها .

بشرط أن لايكون مركز الاسقاط — سواء كان على بعد نهائى فى حالة الاسقاط المركزى أو لا نهائى فى حالة الاسقاط المتوازى — إحدى نقط المنحنى . أما اذا أسقطنا منحنياً فراغيا من الدرجة ن من إحدى نقطه على مستو Π فان المسقط يكون منحنيا مستويا من الدرجة (ن—١) مثال ذلك اذا كان المنحنى الفراغى من الدرجة الثالثة وأسقطناه من إحدى نقطه على Π فان المسقط يكون منحنيا مستويا من الدرجة الثانية أى مقطعا مخروطيا .

وذلك لأن أى مستقيم واقع فى المستوى Π يمثل مستويا ماراً بمركز الاسقاط وبذا يكون عدد نقط تقاطع هذا المستقيم مع مسقط المنحنى مساويا لعدد نقط تقاطع المستوى مع المنحنى الفراغى نفسه . هذا فى الحالة الاولى أما فى الحالة الثانية فلما كان أى مستوى مار بمركز الاسقاط التى هى إحدى نقط المنحنى الفراغى ذى الدرجة ن يقطعه فى (ن—١) من النقط زيادة على تلك النقطة فان أثر هذا المستوى على المستوى Π وهو خط مستقيم يقطع مسقط المنحنى فى (ن—١) من النقط أى أن هذا المسقط هو منحن مستو من الدرجة (ن—١)[1].

ويبين (شكل ٤٥) بعض الاحتمالات الممكنة عند إسقاط منحن فراغى إسقاطاً متوازيا على مستو مثل Π وهى صحيحة أيضا فى حالة الاسقاط المركزى.

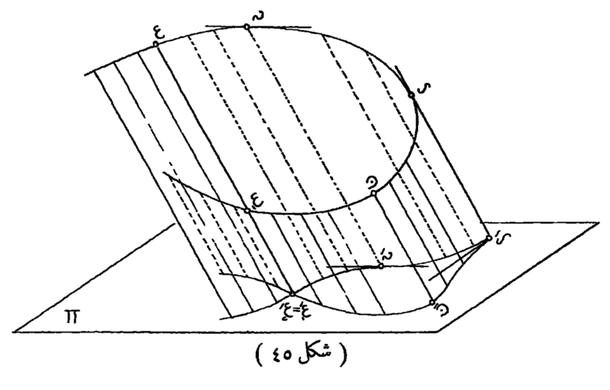
فالعقدة $ع'_١ = ع'_٢$ هى « عقدة ظاهرية » فى المسقط سببها أن الشعاع المار بها موازيا لاتجاه الاسقاط (أو بتعبير أعم ماراً بالمركز فى حالة الاسقاط المركزى) قطع بالصدفة المنحنى الفراغى فى نقطتين $ع_١$ ، $ع_٢$.

---

(١) يلاحظ أن البرهان فى الحالة الثانية مبنى على فكرة أساسية هى عدم إمكان تحديد مسقط معين لمركز الاسقاط فى المستوى Π بحيث أن هذه النقطة الفريدة فى الفراغ لا يمكن تعيين نقطة مناظره لها فى المستوى المذكور .

واذا فرضنا أن المستوى الملاصق عند النقطة ى على المنحنى الفراغي يوازى اتجاه الاسقاط (أو يمر بمركز الاسقاط) فان أثره على المستوى Π لا بد أن يمس المسقط فى ى′ مشتركا معه فى ثلاث نقط متتالية وعابراً له عند ى′ وهذا لا يكون إلا اذا كان الاثر مماس انقلاب . فالنقطة ى′ هى فى هذه الحالة إذن نقطة انقلاب .

واذا كان مماس المنحنى الفراغي فى نقطة مثل ر يوازى اتجاه الاسقاط (أو يمر بمركز الاسقاط) فان مسقطه على Π يؤول الى نقطة واحدة هى ر′ فاذا تتبعنا مساقط عدة نقط على المنحنى قبل وبعد ر وجدنا أن ر′ لابد أن تكون نقطة رجوع . ويتقاطع المستوى الملاصق للمنحنى فى ر مع المستوى Π فى هذه الحالة فى المماس المزدوج للمسقط عند ر′ .



(شكل ٤٥)

يرى مما تقدم أنه اذا كانت د نقطة عادية على منحن فراغي وكان N ، ٢ ، v المماس والمستوى الملاصق للمنحنى عند هذه النقطة وكانت د′ مسقط د على Π من مركز الاسقاط م الذى يجوز أن يكون على بعد نهائى فى حالة الاسقاط المركزى أو لا نهائى فى حالة الاسقاط المتوازى — فانه يمكن التفرقة دائماً بين الاحتمالات الآتية :—

(ا) إما أن تكون م خارج المستوى N وفى هذه الحالة تكون ﻫ′ نقطة عادية أيضاً .

(ب) وإما أن تكون م واقعة فى المستوى N ولكنها ليست واقعة على v وفى هذه الحالة تكون ﻫ′ نقطة انقلاب .

(ح) واخيراً يجوز أن تكون م واقعة على v ففى هذه الحالة تكون ﻫ′ نقطة رجوع .

العلاقة التى تربط نصف قطر الانحناء لمنحنى عند احدى نقطه بنظيره للمسقط العمودى للمنحنى عند مسقط النقطة :

اذا كان نو نصف قطر الانحناء لمنحن (فراغى أو مستو) عند إحدى نقطه وكان نو′ نصف قطر الانحناء لمسقط المنحنى العمودى عند مسقط النقطة ورمزنا الى زاويتى ميل المماس والمستوى الملاصق للمنحنى عند النقطة على مستوى الاسقاط بالرمزين α ، ω على التوالى فان

$$نو' = نو \times \frac{جتا^{3}\alpha}{جتا\,\omega}$$

وهذه هى العلاقة المعروفة باسم قانون بلافيتس [1] .

وللبرهنة عليها نفرض فى (شكل ٤٦) أن المماسين المتتاليين للمنحنى عند النقطة ﻫ وهما ﻫ ا ، ﻫ ب يحصران بينهما زاوية صغيرة مقدارها ء φ وأن مسقطيهما العموديين ﻫ′ا′ ، ﻫ′ب′ على المستوى Π يحصران بينهما زاوية مقدارها ء φ' وأن ءع هو طول الجزء الصغير من المنحنى المحدود بالنقطة ﻫ والنقطة التالية لها ، ء ع′ هو طول المسقط العمودى لهذا الجزء فيكون

$$نو = \frac{ءع}{ء\varphi} ، نو' = \frac{ءع'}{ء\varphi'}$$

ولكن $$ءع' = ءع\ جتا\,\alpha \qquad \dots\dots\dots (1)$$

---

(١) Bellavitis

وبما أن مساحة المثلث ه′ ا′ ب′ تساوى مساحة المثلث ه ا ب مضروبة فى جتا ω لأن الاول منهما هو المسقط العمودى للثانى ولما كان ه ب = ه ا تقريبا ، ه′ ب′ = ه′ ا′ تقريبا وكان ه′ ا′ = ه ا جتا α فان

$$\left(\tfrac{1}{2}\ \overline{\text{ه}'\text{ا}'}^{2}\ \text{جا}\ د\varphi'\right) = \left(\tfrac{1}{2}\ \overline{\text{ه ا}}^{2}\ \text{جا}\ د\varphi\right)\ \text{جتا}\ \omega$$

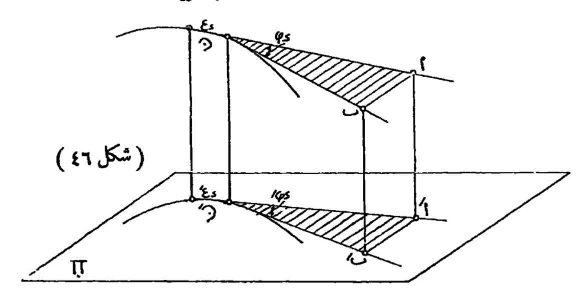
ولكن جا د φ = د φ تقريبا

$$\tfrac{1}{2}\ \overline{\text{ه ا}}^{2}\ \text{جتا}^{2}\alpha\ .\ د\varphi' = \tfrac{1}{2}\ \overline{\text{ه ا}}^{2}\ .\ د\varphi\ .\ \text{جتا}\ \omega$$

$$\therefore\ د\varphi' = د\varphi\ .\ \frac{\text{جتا}\ \omega}{\text{جتا}^{2}\alpha}\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

وبقسمة المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن

$$\text{ن}' = \text{ن} \times \frac{\text{جتا}^{3}\alpha}{\text{جتا}\ \omega}$$ وهو المطلوب .



(شكل ٤٦)

وبتطبيق هذا القانون على النقطتين ن ، ن′ فى (شكل ٤٥) اذا افترضنا الاسقاط عموديا نجد أن :

$$\text{ن}' = \text{ن}\ .\ \frac{\text{جتا}^{3}\alpha}{\text{جتا}\ 90^\circ}\ (\text{لان}\ \omega = 90^\circ\ \text{فى هذه الحالة})$$

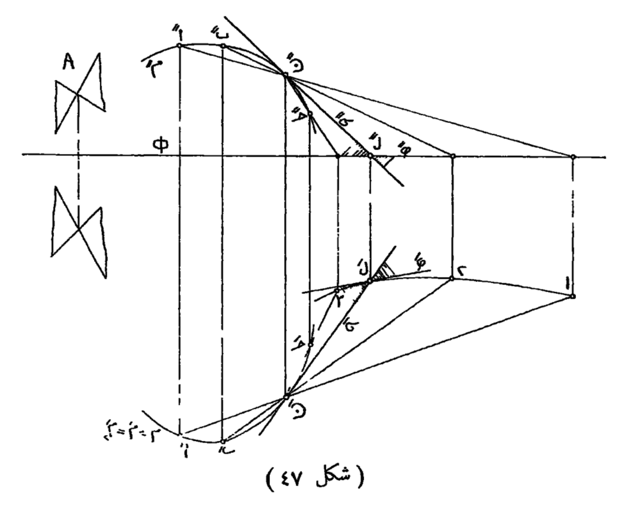
$$= \infty$$

ومعنى هذا أن ن′ نقطة انقلاب كما قدمنا .

بند ٤٠ : تعيين المستوى الملاصق ونصف قطر الانحناء

المستوى الملاصق عند نقطة على منحن يحتوى المماس للمنحنى فى النقطة فاذا أمكننا ايجاد مستقيم ثان واقع فيه تعين المستوى .

لنفرض فى (شكل ٤٧) أن م منحن فراغى معلوم بمسقطيه الافقى والرأسى م′ ، م″ فلايجاد المستوى الملاصق له فى إحدى نقطه ﻫ نختار عدة نقط قريبة من ﻫ على المنحنى مثل ا ، ب ، ﺣ .. ونصل ﻫ ا ، ﻫ ب ، ﻫ ﺣ .. ثم نجد نقط تقاطع هذه المستقيمات مع أى مستوأفقى Φ وهى النقط ١ ، ٢ ، ٣ .. فى المسقط الافقى . فاذا كان المماس σ للمنحنى م فى ﻫ يقابل المستوى Φ فى



(شكل ٤٧)

ل فان المستقيمات ل′ ١ ، ل′ ٢ ، ل′ ٣ .. هى آثار المستويات المارة بالمماس σ والنقط ا ، ب ، ﺣ .. على المستوى Φ . والوضع النهائى لهذه المستويات عند ما تقترب

النقطة ا من ﺿ هو كما قدمنا المستوى الملاصق للمنحنى فى ﺿ . ولـكن فى هذه الحالة تقترب أيضا النقط ١ ، ٢ ، ٣ . . من ل′ وتؤول الاوتار ل′١ ، ل′٢ ، ل′٣ . . الى المماس φ′ للمنحنى ١ ٢ ٣ . . فى النقطة ل′ ويكون المستقيم φ هو أثر المستوى الملاصق المطلوب على المستوى الافقى Φ . وبواسطة المستقيمين α ، φ المتقاطعين فى ل يتعين المستوى الملاصق فى ﺿ .

ولما كان المستوى الملاصق يشترك مع المنحنى م كما قدمنا فى ثلاث نقط متاليه فاذا أسقطنا هذا المنحنى على المستوى الملاصق له فى إحدى نقطه ﺿ ورمزنا الى المسقط بالرمز $م_١$ فان $م_١$ يكون منحنيا مستويا ماراً بهذه النقط الثلاث المتالية والمتحدة فى النقطة ﺿ . وينشأ عن اتحاد المنحنيين م ، $م_١$ فى ثلاث نقط متالية عند ﺿ تساوى نصفى قطرى الانحناء لها عند هذه النقطة ولما كانت دائرة الانحناء للمنحنى الفراغى م واقعة فى المستوى الملاصق (بند ٣٧) كانت هذه الدائرة هى نفس دائرة الانحناء للمنحنى المستوى $م_١$ عند ﺿ .

ولتطبيق هذه الطريقة فى (شكل ٤٧) أسقطنا المنحنى الفراغى م على المستوى الملاصق فى ﺿ إسقاطا عموديا على المستوى الافقى وبذا يكون المسقط الافقى $م'_١$ للمنحنى المستوى $م_١$ السالف الذكر منطبقا على المسقط الافقى م′ للمنحنى الفراغى نفسه . وبمعلومية $م'_١$ والمستوى الملاصق المرسوم فيه المنحنى يتعين $م_١$ (بند ٣٤) . فاذا كان ($م_١$) هو الموقع للمنحنى $م_١$ الذى يمكن الحصول عليه بتطبيق المستوى الملاصق على أحد مستويى الاسقاط الرئيسيين (بند ١٧) وعينا فى الموقع نصف قطر الانحناء للمنحنى ($م_١$) فى النقطة (ﺿ) بالتقريب كما قدمنا فى (بند ٣٦) كان هو نصف قطر الانحناء المطلوب للمنحنى الفراغى م فى النقطة ﺿ . أما دائرة الانحناء نفسها فمسقطها على كل من المستويين الافقى والرأسى قطع ناقص يمكن رسمه بسهولة بواسطة الائتلاف [١] .

(١) يحسن بالقارىء رسم مسقطى الدائرة بنفسه فى (شكل ٤٧) .

بند ٤١ : تعيين نقط تقاطع منحنٍ فراغي مع مستوٍ معلوم

هناك طريقتان لذلك :

الطريقة الاولى : نجد المسقط المساعد م‴ للمنحنى م على مستوٍ مساعد للاسقاط Π_3 يكون عمودياً على المستوى المعلوم A . فاذا كان ρ أثر المستوى A على Π_3 وقطع ρ المسقط الجديد م‴ للمنحنى فى عدة نقط كانت هذه النقط هى المساقط المساعدة لنقط التقاطع المطلوبة .

الطريقة الثانية : نسقط المنحنى م على المستوى A فنحصل بذلك على منحنٍ مستوٍ م٢ يتقاطع مع المنحنى الاصلى م فى نقط التقاطع المطلوبة . ففى (شكل ٤٧) أسقطنا المنحنى م على المستوى A فى الاتجاه الرأسى وبذا يكون المسقط الافقى م٢′ للمنحنى المستوى م٢ منطبقاً على المسقط الافقى م′ للمنحنى م . فاذا رسمنا المسقط الرأسى م٢″ للمنحنى م٢ الذى أصبح متحدداً بمعلومية م٢′ والمستوى A وذلك بتعيين المساقط الرأسية لنقطه المختلفة والمماسات فيها (بند ٧) فان م٢″ ، م″ يتقاطعان عندئذ فى المساقط الرأسية لنقط التقاطع المطلوبة .

الفصل الثالث

السـطوح

بند ٤٢ : تعاريف

السطح هو مجموعة من النقط موزعة توزيعاً ذا بعدين . ومعنى هذا أننا اذا أخذنا جزءاً صغيراً من سطح ما محتويا على نقطة معينة ه فانه يمكن دائما تعيين اتجاهين اثنين مستقلين (متعامدين) على السطح والكلام عن علاقة النقط المجاورة للنقطة ه بالنقطة ه ذاتها فى هذين الاتجاهين المستقلين .

والذى يتميز به السطح من حيث أنه سطح هو هذا العدد «٢» للاتجاهات المستقلة فى مجموعة النقط المحيطة بنقطة واقعة عليه كما يتميز الخط بالعدد «١» إذ فى هذه الحالة يوجد اتجاه واحد لتوزيع النقط المؤلفة له (يعتبر الاتجاهان المتضادان اتجاها واحداً أحدهما موجب والآخر سالب) وكما يتميز الفضاء ذو الابعاد الثلاثة بالعدد «٣» لوجود ثلاثة اتجاهات مستقلة فيه [1] .

وتنقسم السطوح على وجه العموم الى قانونية وهى التى تتوزع نقطها طبقا لقانون معين ينص عليه وغير قانونية وهى التى لا يتوافر فيها هذا الشرط مثل السطوح الطبوغرافية (أنظر الباب التاسع) .

ويتحدد السطح القانونى فى كثير من الحالات بأنه متولد او ناشىء عن حركة خط يسمى الراسم ويجوز أن يكون منحنيا أومستقيما — بطريقة معينة كأن يرتكز أو يتكىء أثناء حركته على منحنيات ثابتة يسمى كل منها بالدليل [2]

---

(١) فمثلا فى وصف العلاقة بين النقط المختلفة المحيطة بنقطة واقعة على جزء صغير من سطح الكرة الارضية يمكن الكلام عن شرق (وغرب) وشمال (وجنوب) . أما اذا رسمنا خطاً من خطوط الطول فلا يمكن الكلام حينئذ الا عن شمال (وجنوب) .

(٢) يمكن اعتبار السطح غير القانونى بالمثل متولداً عن حركة منحن راسم متكئا أثناءها على أدلة ثابتة غير أن عدد هذه الادلة يكون فى هذه الحالة لا نهائيا .

ففى حالة المخروط الدائرى مثلا يمكن تصور تولد السطح عن حركة مستقيم راسم متكئاً على مقطع مخروطى ثابت ومارًا بنقطة ثابتة فى الفضاء (رأس المخروط).

وفى حالة السطح الاسطوانى يتصور التولد عن حركة مستقيم مواز لاتجاه ثابت ومتكىء أثناء الحركة على منحن معين (مستو أو فراغى) هو دليل السطح.

وغنى عن البيان أن السطح الواحد يمكن أن يتولد بطرق كثيرة مختلفة فمن هذه الطرق تصور التولد عن حركة منحن **متغير الشكل** كأن يتصور بناء المخروط الدائرى من مقاطعه المختلفة الموازية لمستو ثابت فتعتبر هذه المقاطع أوضاعاً مختلفة لمقطع مخروطى متغير الشكل يطلق عليه أيضا اسم الراسم وفى هذه الحالة تكون الادلة خمسة مستقيمات مارة برأس المخروط وواقعة على السطح (لأن المقطع المخروطى يتعين بخمس نقط).

بند ٤٣ : المماسات والمستويات المماسة

اذا تصورنا ثلاث نقط ء ، ا ، ب على سطح معلوم فان المستوى ء ا ب فى وضعه النهائى عند ما تقترب كل من ا ، ب — ويكون هذا الاقتراب بتحركها على السطح — من النقطة ء يسمى **المستوى المماس للسطح عند** ء . فاذا كان هذا المستوى معينا بالنقطة ء وحدها وغير متوقف على ا ، ب (أى اذا كان الوضع النهائى للمستوى ء ا ب هو نفسه الوضع النهائى للمستوى ء $ا_١$ $ب_١$ حيث $ا_١$ ، $ب_١$ نقطتان غير ا ، ب) سميت النقطة ء نقطة «عادية» على السطح وأمكن رسم **مستو واحد مماس** للسطح عندها . أما اذا لم يتوافر هذا الشرط قيل إن النقطة ء نقطة **شاذة** وأمكن عندئذ رسم اكثر من مستو واحد مماس للسطح عندها (قارن بندى ٣١ ، ٣٢ فيما يتعلق بالمنحنيات).

وكل مستقيم مرسوم فى المستوى المماس ماراً بالنقطة ء يسمى **مماساً للسطح فى** ء

ويمكن اعتباره الوضع النهائى للمستقيم القاطع الذى يصل ب بأية نقطة أخرى على السطح مثل ا عندما تقترب ا ــ راسمة بذلك منحنياً حيثما اتفق على السطح ــ من النقطة ب . واذا رسمنا أى مستو آخر مار بالنقطة ب فانه يقطع السطح فى منحن ويقطع المستوى المماس فى مستقيم هو مماس للسطح ومماس فى الوقت نفسه للمنحنى . ومعنى ذلك أن المماس لأى منحن واقع على السطح ومار بالنقطة ب ــ فى النقطة ب ذاتها هو مماس للسطح ويقع فى المستوى المماس عند النقطة ب الذى هو لذلك المحل الهندسى لجميع مماسات السطح فى ب .

ويسمى المستقيم المار بالنقطة ب عمودياً على المستوى المماس فيها **بعمودى السطح فى النقطة ب** .

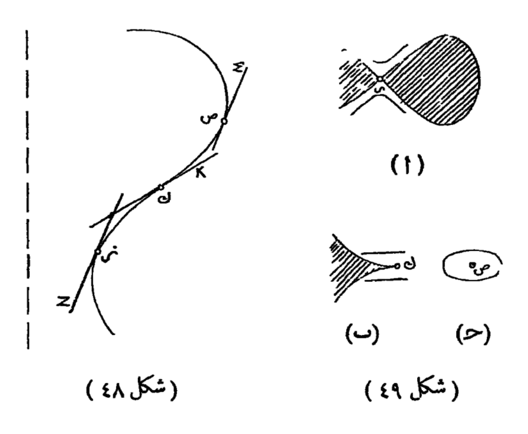
واذا تقاطع المستوى المماس مع السطح فى منحن فانه يتضح بمراجعة (بند ٣٢) **ان نقطة التماس لابد ان تكون نقطة مزدوجة على منحنى التقاطع** وأنه يمكن على وجه العموم رسم مماسين عندها لمنحنى التقاطع يطلق عليهما اسم **المماسين الرئيسيين للسطح عند نقطة التماس**[1] . ويوضح (شكلا ٤٨ ، ٤٩) طريقة حدوث ذلك لسطح دورانى معلوم فى (شكل ٤٨) بالمحور والمنحنى الراسم ص ك س ــ فى الاحوال الرئيسية الثلاثة وهى :ــ

(١) <u>**الحالة الزائدية**</u> ويمكن الحصول عليها عندما يكون المستوى المماس قاطعاً السطح فى منحن حقيقى كما هو الحال عند **النقطة الزائدية** س فى (شكل ٤٨) .

---

(١) لان كل مستقيم فى المستوى المماس باعتباره مماسا للسطح فى نقطة التماس ومشتركا معه فى نقطتين متجاورتين يشترك كذلك مع منحنى التقاطع فى نقطتين متجاورتين متحدتين فى نقطة التماس وهذا لا يحدث إلا اذا كانت نقطة التماس نقطة مزدوجة على منحنى التقاطع . ويشترك المماسان لهذا المنحنى فى نقطة التماس مع المنحنى و بالتالى مع السطح فى ثلاث نقط متجاورة ولذا أطلق عليهما اسم المماسين الرئيسيين .

ففى هذه الحالة يكون مقطع السطح بمستو Z_1 قريب من المستوى المماس Z ومواز له هو بالتقريب قطع زائد[1] (شكل ٤٩ ا) يؤول فرعاه فى حالة التماس الى فرعين متقاطعين فى نقطة التماس ر أى أن ر تكون فى هذه الحالة نقطة معقودة على منحنى تقاطع السطح مع المستوى المماس فيها Z .



(شكل ٤٩) (شكل ٤٨)

(٢) الحالة الملاقية ويمكن الحصول عليها عندما يكون المستوى المماس عابراً السطح كما هو الحال عند النقطة الملاقية ك فى (شكل ٤٨) . ففى هذه الحالة يكون

(١) اذا كان M مستويا مماسا فى نقطة عادية على سطح ما وكان M_1 مستويا موازيا له وقريبا منه فان منحنى تقاطع السطح مع M_1 يمكن اعتباره منحنيا من الدرجة الثانية (قطع ناقص أو مكافىء أو زائد) اذا أهملنا المقادير المتناهية فى الصغر التى من درجة أعلا من الدرجة الثانية . وتعرف هذه النظرية باسم نظرية دوبان Ch. Dupin ويمكن البرهنة عليها بواسطة الهندسة التفاضلية .

مقطع السطح بمستو K_1 قريب من المستوى المماس K وموازله — قطعا مكافئا ينحل الى مستقيمين متوازيين (شكل ٤٩ ب) متماثلين بالنسبة الى نقطة تؤول فى حالة التماس الى نقطة رجوع ك على منحنى تقاطع السطح مع المستوى المماس K . فجميع نقط الدائرة التى ترسمها نقطة الانقلاب على المنحنى الراسم أثناء دورانه حول المحور — هى نقط مكافئة . ويؤخذ من ذلك أنه فى حالة النقطة المكافئة ك لايمكن رسم سوى مماس رئيسى واحد للسطح ماراً بها (هو مماس منحنى التقاطع فى ك) .

(٣) الحالة الناقصية ويمكن الحصول عليها عند ما يكون السطح فى المنطقة المجاورة لنقطة التماس موجوداً فى جهة واحدة بالنسبة للمستوى المماس كما هو الحال عند النقطة ص فى (شكل ٤٨) حيث المستوى المماس فيها Σ لا يقطع السطح (فى منحن حقيقى) . ففى هذه الحالة يكون المقطع بمستو Σ_1 قريب من المستوى المماس Σ وموازله — قطعا ناقصا (شكل ٤٩ حـ) وكلما اقترب Σ_1 من Σ صغر هذا القطع الناقص ويؤول فى النهاية الى نقطة التماس نفسها التى يصح اعتبارها فى هذه الحالة نقطة منعزلة على منحنى تقاطع السطح مع المستوى المماس فيها Σ . وينتج من ذلك أن المماسين الرئيسيين للسطح فى نقطة ناقصية تخيليان أى أنه لا يمكن رسم مماسين رئيسيين حقيقيين لسطح فى نقطة ناقصية عليه .

وقد يكون المستوى المماس ماسا للسطح عند نقطة عليه فى اللانهاية كما هو الحال فى السطح الزائدى الدورانى مثلا (بند ١٠٥) . ومثل هذا المستوى يطلق عليه عندئذ اسم المستوى التقربى .

نستنتج مما تقدم النظريات الهامة الآتية : —

(١) لتعيين المستوى المماس لسطح ما فى احدى نقطه يكفى معرفة أى اثنين من مماسات السطح فى هذه النقطة . ويمكن الحصول على هذين المماسين باختيار

منحنيين مناسبين واقعين على السطح ومارين بالنقطة ثم رسم المماسين لهما فى هذه النقطة . فاذا أمكن أن يمر بالنقطة مستقيم واقع بتمامه على السطح فان المستوى المماس للسطح عند هذه النقطة يحتوى هذا المستقيم .

(٢) اذا قطع مستو سطحاً ما فى منحن فمماس هذا المنحنى فى إحدى نقطه هو *خط تقاطع المستوى المماس للسطح فيها مع المستوى القاطع* .

(٣) مماس منحنى تقاطع سطحين فى إحدى نقطه هو *خط تقاطع المستويين المماسين للسطحين فى هذه النقطة* .

(٤) *اذا تماس سطحان فى نقطة* (أى اذا كان المستوى المماس عندها لكل من السطحين واحداً) *فان هذه النقطة تكون نقطة مزدوجة على منحنى تقاطعهما* .

بند ٤٤ : تمثيل السطوح — المحيط الحقيقى والمحيط الظاهرى للسطح

اذا كان السطح غير قانونى فمن الواضح أنه لا بد لتمثيله من معرفة أكبر عدد ممكن من نقطه وخطوطه (أنظر السطوح الطبوغرافية مثلا) .

أما اذا كان السطح قانونياً — وهو المقصود بالبحث هنا — بحيث يمكن تصور توالده عن خط (منحن أو مستقيم) يتحرك بكيفية وشروط خاصة كما قدمنا فان تمثيله بواسطة إسقاط نقطه وخطوطه على مستوى الاسقاط يكون عقيما إذ أن قانون الحركة وأحد أوضاع المنحنى الراسم يكفيان فى هذه الحالة لتحديد السطح القانونى (أنظر مثلا السطح الدورانى المبين فى شكل ٤٨) .

ويتحدد السطح كذلك اذا علمت مساقط عدة أوضاع من الراسم المتحرك . وهذه الاوضاع التى يمكن الحصول عليها بواسطة قانون الحركة المشار اليه فى حالة السطح القانونى — والتى نفترض معرفتها على صورة خطوط بيانية معلومة فى مستوى الاسقاط فى حالة السطوح غير القانونية — من شأنها أن تساعد أيضاً على إظهار معالم السطح وتقريبه الى الذهن وذلك بواسطة رسم مايسمى

بالمحيطات الظاهرية للسطح فى المساقط المختلفة . وهذه المحيطات هى التى نريد تعريفها فيما يلى : —

اذا فرضنا فى (شكل ٣١) أننا أبدلنا النقطة المضيئة ل بنقطة بصر (عين أنسان) أو مركز إسقاط وأبدلنا الكرة بسطح منحن حيثما اتفق وأطلقنا على مخروط الضوء السالف الذكر اسم *مخروط البصر* فان المنحنى ى الذى يتماس بطوله مخروط البصر والسطح وهو ما أسميناه سابقاً خط الظل يسمى فى هذه الحالة **بالمحيط الحقيقى للسطح** بالنسبة لمركز الاسقاط أو نقطة البصر ل وهو يفصل بين الجزء المنظور من السطح المحتوى على جميع النقط التى مثل ا وبين الجزء غير المنظور الواقعة عليه جميع النقط التى مثل $ا_1$.

ويسمى منحنى تقاطع مخروط البصر مع أى مستو مثل Π وهو المنحنى ى فى (شكل ٣١) الذى أطلقنا عليه سابقا اسم الظل الظاهرى — **بالمحيط الظاهرى للسطح** على المستوى Π بالنسبة لنقطة البصر ل .

ويمكن تلخيص ماتقدم فى التعريفين الآتيين : —

المحيط الحقيقى لسطح ما بالنسبة لمركز معين هو المحل الهندسى لجميع نقط السطح التى تكون فيها المستويات المماسة له مارة بهذا المركز[1] .

والمحيط الظاهرى لسطح على مستو ما بالنسبة لمركز اسقاط معين ل هو المسقط المركزى للمحيط الحقيقى للسطح من ل على المستوى .

ومن الواضح أن المحيطين الحقيقى والظاهرى لسطح ما يتغيران بتغير مركز الاسقاط الذى يجوز أن يكون نقطة فى اللانهاية وفى هذه الحالة يؤول الاسقاط المركزى الى إسقاط متوازى ويؤول مخروط البصر الى أسطوانة بصر . فاذا كان الاسقاط عمودياً على مستو ما مثل Π فانه يكفى عندئذ أن يقال « المحيط

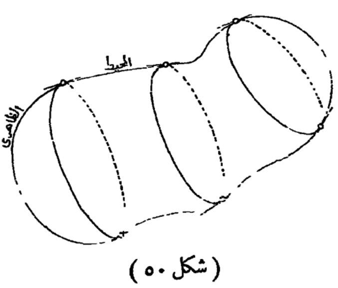
(١) كل مستو مار بمركز الاسقاط يسمى « مستوياً مسقطاً » .

الظاهرى للسطح على المستوى Π ، فيفهم من ذلك المحل الهندسى للمساقط العمودية لجميع نقط السطح التى تكون فيها المستويات المماسة عمودية على المستوى Π .

<u>نظرية</u>

اذا رسم منحن م على سطح ما وتقاطع هذا المنحنى مع المحيط الحقيقى للسطح بالنسبة الى مركز اسقاط معين — فى نقطة مثل ه فانه المسقط مَ لهذا المنحنى من مركز الاسقاط على مستو مثل Π يمس المحيط الظاهرى للسطح فى المسقط المركزى هَ للنقطة ه .

للبرهنة على هذه النظرية الهامة نفرض فى (شكل ٣١) أن م منحن حيثما اتفق واقع على السطح وقاطع المحيط الحقيقى ء فى النقطة ه وأن μ هو المماس لهذا المنحنى فى النقطة ه فيكون المستوى المماس M للسطح عند النقطة ه ماراً بالمماس μ (بند ٤٣) . ولما كانت ه إحدى نقط المحيط الحقيقى فان المستوى M يمر بمركز الاسقاط ل فهو إذن مستو مسقط بحيث يكون المسقط المركزى μ̄ للمماس μ من ل على المستوى Π — منطبقا على أثر المستوى M على المستوى Π . ولما كان المستوى M هو فى نفس الوقت مستو مماس لمخروط البصر المتقاطع مع Π فى المحيط الظاهرى ءَ ولما كان التماس بين السطح المخروطى والمستوى المماس له يكون كما هو معلوم بطول راسم تماس هو فى



(شكل ٥٠)

(شكل ٣١) الراسم ه هَ فينتج من ذلك أن الأثر μ̄ للمستوى M على Π الذى

يمس المسقط المركزى مٓ للمنحنى — يمس فى الوقت ذاته المحيط الظاهرى ءٓ فى نٓ أو بعبارة أخرى أن المنحنيين مٓ ، ءٓ متماسان فى نٓ .

ينتج من النظرية السابقة أن المحيط الظاهرى لسطح معلوم بمساقط عدة أوضاع من المنحنى الراسم لـ هو المنحنى المغلف لهذه المساقط (شكل ٥٠) . وتكون نقط التماس بين المحيط الظاهرى وهذه الاوضاع هى النقط التى تفصل بين الاجزاء المنظورة وغير المنظورة .

بند ٤٥ : أنواع السطوح

(١) تقسيم السطوح الى جبرية وغير جبرية

اذا قطع كل مستقيم فى الفراغ سطحاً قانونياً فى ن من النقط (حقيقية كانت أو تخيلية) سمى هذا السطح سطحاً جبرياً من الدرجة ن [1] .

واذا تصورنا السطح متولدا عند مستو يتحرك فى الفضاء بطريقة معينة مغلفا للسطح بحيث يكون فى جميع أوضاعه مستوياً مماساً له أمكننا تعريف السطح القانونى الجبرى من الرتبة ل بانه السطح الذى يمكن إمرار ل من المستويات المماسة له (حقيقية أو تخيلية) بكل مستقيم فى الفراغ .

أما السطح القانونى غير الجبرى فهو ما كانت معادلته غير جبرية وليس هناك عدد معين ثابت لنقط تقاطعه مع أى مستقيم فى الفراغ .

ويمكن البرهنة على النظريات الآتية تحليليا وهى : —

(١) اذا قطع مستقيم فى الفراغ سطحاً جبريا من الدرجة ن فى أكثر من ن من النقط كان هذا المستقيم واقعا بتمامه على السطح .

---

[1] معادلة السطح فى هذه الحالة هى معادلة جبرية من الدرجة ن .

(٢) خط تقاطع السطح الجبرى ذى الدرجة ن مع أى مستو هو منحن مستو من الدرجة ن أيضا .

(٣) خط تقاطع سطحين جبريين أحدهما من الدرجة $ن_١$ والثانى من الدرجة $ن_٢$ هو منحن فراغى من الدرجة ($ن_١ \times ن_٢$) .

(٤) أى منحن فراغى جبرى من الدرجة ء يقطع سطحاً جبريا من الدرجة ن فى (ء × ن) من النقط فاذا زاد عدد النقط المشتركة عن هذا العدد كان جزء من المنحنى أو المنحنى كله واقعا على السطح .

(٥) ثلاثة سطوح جبرية من الدرجات $ن_١$، $ن_٢$، $ن_٣$ تتقاطع فى ($ن_١ \times ن_٢ \times ن_٣$) من النقط .

والمستوى هو السطح الوحيد ذو الدرجة الاولى .

وأهم السطوح الجبرية هى سطوح الدرجة الثانية مثل الكرة والمخروط والاسطوانة (اذا كان دليل كل منهما منحنياً من الدرجة الثانية) والسطح الناقصى والزائدى والمكافئى . ويكون خط تقاطع أى واحد من هذه السطوح مع مستو منحنياً من الدرجة الثانية أى مقطعاً مخروطياً على وجه العموم [1] . ويكون خط تقاطع أى اثنين منها منحنياً من الدرجة الرابعة .

(ب) تقسيم السطوح على حسب نوع الراسم

تنقسم السطوح على هذا الاساس الى مسطرة وغير مسطرة .

فالسطح المسطر هو السطح الذى يمكن أن يمر بكل نقطة من نقطه مستقيم واحد على الاقل يكون واقعاً بتمامه على السطح .

ويمكن لذلك تصور تولد السطح المسطر عن حركة مستقيم ما بطريقة معينة

(١) اذا مر المستوى القاطع برأس المخروط مثلا فانه يقطعه فى راسمين مستقيمين ويقال عندئذ إن المنحنى من الدرجة الثانية قد « انحل » الى هذين المستقيمين .

فالسطح المخروطى مثلا يتولد كما قدمنا عن حركة مستقيم يمر بنقطة ثابتة متكئاً أثناء الحركة على دليل ثابت .

وتنقسم السطوح المسطرة الى **سطوح قابلة للبسط أو الاستواء** وهى التى يكون فيها أى وضعين متتاليين من أوضاع المستقيم الراسم متقاطعين بحيث يحصران بينهما عنصراً مستوياً يمكن تطبيقه على العنصر المستوى المجاور له حول راسم تقاطعهما وهكذا الى أن يتم بسط السطح على مستو واحد [١] .

وأما اذا كان أى وضعين متتاليين من أوضاع الراسم غير متقاطعين كان السطح غير قابل للبسط وسمى **سطحاً أعوجاً أو معوجاً** مثال ذلك السطح المتولد عن حركة مستقيم بحيث يوازى على الدوام مستوياً ثابتاً معلوماً ويقطع مستقيمين ثابتين غير متقاطعين (السطح المكافئ الزائدى) فان أى وضعين متتاليين للراسم فى هذه الحالة لا يمكن أن يتقاطعا والا كان المستقيمان الثابتان موجودين فى مستو واحد وهو ما يخالف الفرض .

(ح) تقسيم السطوح الى دورانية ولولبية

يسمى **سطحاً دورانياً** ما أمكن تولده عن دوران منحن معين مستو (ثابت الهيئة) حول مستقيم ثابت فى مستويه يسمى محور الدوران مثل الكرة والمخروط الدورانى .

والسطح المتولد عن دوران منحن فراغى حول محور ثابت هو أيضاً سطح دورانى لأنه يمكن تولده عن حركة دوران منحنى تقاطعه مع أى مستو مار بالمحور المعلوم .

---

(١) السطحان المخروطى والاسطوانى ، هما حالتان خاصتان من السطوح المسطرة القابلة للبسط حيث تتقاطع جميع الرواسم فى نقطة واحدة على بعد نهائى أولا نهائى على التوالى .

ويسمى سطحاً لولبياً ما أمكن تولده عن حركة منحن معين ثابت الهيئة حركة لولبية حول محور ثابت أى حركة دوران حول المحور مصحوبة بحركة انتقال فى اتجاهه بحيث تكون النسبة بين السرعة الزاوية للحركة الدورانية والسرعة الخطية للحركة الانتقالية تساوى مقداراً ثابتاً .

الباب الثالث

منحنيات الدرجة الثانية

أو

المقاطع المخروطية

الفصل الاول

القطع الناقص والقطع الزائد والقطع المكافيء

بعض خواصها الرئيسية

بند ٤٦ : كلمة عامة

نذكرفى هذا الفصل بعض الخواص الرئيسية للمقاطع المخروطية التى يمكن استنتاجها من تعاريفها الاساسية باعتبارها منحنيات مستوية وبدون اشارة الى المخروط أى باعتبارها مسارات نقطة أو غلافات خط مستقيم يتحرك كل منهما فى المستوى على حسب قانون معلوم (بند ٣١) .

ولما كانت الخواص المذكورة هنا تعتبر من المبادىء الاولية البسيطة التى يجوز أن نفترض فى القارىء الالمام بها فقد رأينا سردها باختصار مقتصرين على ذكر ماله صلةخاصة باغراض الكتاب . أما التوسع فى دراسة هذه المنحنيات على الاساس السابق فيرجع فيها القارىء الى الكتب المؤلفة خصيصاًلهذا الغرض .

بند ٤٧ : القطع الناقص

(١) تعريف

يمكن تعريف القطع الناقص بأنه المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى مستو بحيث

يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين فى المستوى مساوياً على الدوام مقداراً ثابتاً .
وهذا المقدار الثابت يساوى ٢ ا′ أى طول المحور الاكبر. وتسمى النقطتان الثابتتان بالبؤرتين كما يسمى المستقيم الذى يصل أية نقطة من نقط المنحنى باحدى البؤرتين بالبعد البؤرى .

(ب) كيفية رسم القطع الناقص — بعض الخواص

لرسم القطع الناقص اذا علمت بؤرتاه والمقدار الثابت ٢ ا′ عدة طرق ولكننا سنقتصر هنا على ذكر الطريقة المباشرة مع ذكر بعض الخواص المهمة التى يمكن استخلاصها منها :

نأخذ أية نقطة مثل ع على مستقيم ما طوله س ص = ٢ ا′ (شكل ٥١) ثم نركز فى البؤرتين ب١ ، ب٢ وبفتحتين تساويان ص ع ، س ع على التوالى نرسم قوسى دائرتين يتقاطعان فى هـ ، و فتكونان نقطتين على المنحنى لأن مجموع البعدين البؤريين لكل منهما يساوى ٢ ا′ على حسب العمل . واذا عكسنا الطريقة السابقة بدون أن نغير فتحتى البرجل وذلك بأن نجعل ب١ ، ب٢ مركزين لقوسى دائرتين نصفا قطريهما س ع ، ص ع على التوالى (بدلا من ص ع ، س ع) حصلنا على نقطتين جديدتين ل ، ن وهكذا بتكرار هذه العملية مع تغيير فتحات البرجل نحصل فى كل مرة على أربع نقط على المنحنى .

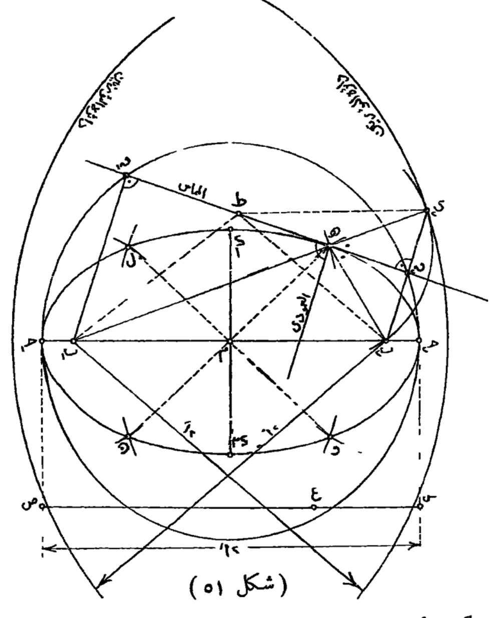
نستنتج من هذه الطريقة : —

اولا : أن القطع الناقص منحنى مقفل منته فى اتجاه المحور الاكبر والاتجاه العمودى عليه بالنقط ح١ ، ح٢ ، ى١ ، ى٢ التى يطلق عليها أسم رؤوس القطع .

ثانياً : أن القطع الناقص متماثل محورياً بالنسبة للمحور الاكبر ح١ح٢ كما أنه متماثل بالنسبة للمستقيم ى١ى٢ العمودى على ح١ح٢ والذى يطلق عليه اسم المحور الاصغر . وذلك لأن النقط الاربع ل ، ن ، هـ ، و التى يمكن الحصول عليها فى

كل مرة بتكرار العملية المذكورة آنفاً — تؤلف مستطيلا رؤوسه الأربعة ماخوذة مثنى متماثلة عمودياً بالنسبة الى كل من المحورين .

ثالثاً : أن القطع الناقص متماثل بالنسبة الى النقطة م التى تسمى مركز القطع[١].



(شكل ٥١)

رابعاً : بما أن $ى_1 ب_1 = ى_1 ب_2 = ا' = م ح_1$

$$\therefore \overline{م ح_1}^2 = \overline{م ى_1}^2 + \overline{م ب_1}^2$$

(١) يسمى القطع الناقص لهذا السبب كما يسمى القطع الزائد « مقطعا مركزيا ». وذلك تمييزاً لهما من القطع المكافىء الذى ليس له مركز على بعد نهائى .

(ح) مماس القطع الناقص فى إحدى نقطه

نظرية :

مماس القطع الناقص وعموديه فى إحدى نقطه ينصفان على التوالى الزاوية الخارجة والداخلة المحصورة بين البعدين البؤريين للنقطة.

للبرهنة على هذه النظرية برهاناً أولياً نفرض فى (شكل ٥١) أن المستقيم هـ ط ينصف الزاوية الخارجة بين البعدين البؤريين للنقطة هـ ثم نبرهن على أن هذا المستقيم يمس القطع الناقص فى هـ . لذلك نسقط من إحدى البؤرتين ولتكن ب$_٢$ عموداً على هـ ط ليقابله فى ن$_٢$ ويقابل امتداد ب$_١$ هـ فى ى$_٢$ ونستنتج من تطابق المثلثين ب$_٢$ هـ ن$_٢$ ، ى$_٢$ هـ ن$_٢$ أن ب$_٢$ن$_٢$ = ى$_٢$ن$_٢$ وأن هـ ى$_٢$ = هـ ب$_٢$ أى أن ى$_٢$ *هى النقطة المماثلة للبؤرة بالنسبة الى* هـ ط وأن ب$_١$ ى$_٢$ = ٢أ' = طول المحور الاكبر .

فاذا أخذنا أية نقطة غير هـ مثل ط على المستقيم هـ ط فمن الواضح أنه لما كان ب$_٢$ ط = ى$_٢$ ط فان

ط ب$_٢$ + ط ب$_١$ = ط ى$_٢$ + ط ب$_١$ > ب$_١$ ى$_٢$ > ٢ أ'

وهذا صحيح بالنسبة لجميع نقط المستقيم هـ ط ما عدا النقطة هـ نفسها الواقعة على القطع الناقص .

يتضح من ذلك أن المستقيم هـ ط لا بد أن يكون مماساً للقطع الناقص فى هـ كما يتضح أن عمودى القطع الناقص فى هـ وهو عمودى على المماس الذى ينصف الزاوية الخارجة بين البعدين البؤريين — ينصف الزاوية الداخلة بينهما .

(ى) الدائرة المساعدة ودائرتا البؤرتين

أولاً: الدائرة المساعدة

بما أن م $ن_٢$ يوازى $ب_١ ى_٢$ ويساوى نصفه (شكل ٥١)

وبما أن $ب_١ ى_٢ = ٢ أ'$

∴ م$ن_٢$ = أ' = نصف المحور الاكبر = مقداراً ثابتاً

وبالمثل اذا انزلنا من $ب_١$ العمود $ب_١ ن_١$ على المماس ليقابله فى $ن_١$ فانه يمكن البرهنة على أن م $ن_١$ = أ' = مقداراً ثابتاً .

ينتج من ذلك أن النقطتين $ن_١$، $ن_٢$ واقعتان على دائرة مركزها م ونصف قطرها يساوى نصف المحور الاكبر أ' . وتسمى هذه الدائرة *بالدائرة المساعدة* *أو الدائرة الاصلية* .

ولما كان هذا حقيقياً لكل مماس آخر للقطع الناقص فانه يمكننا أن نقرر :

نقط تلاقى مماسات القطع الناقص مع الاعمدة النازلة عليها من البؤرتين تقع جميعاً على الدائرة المساعدة .

ثانياً: دائرتا البؤرتين

بما أن $ب_١ ى_٢ = ٢ أ'$ = مقداراً ثابتاً

وبما أن هذا صحيح بالنسبة لأى مماس آخر للقطع الناقص فينتج أن :

المحل الهندسى للنقطة $ى_٢$ التى تماثل البؤرة $ب_٢$ بالنسبة لاى مماس للقطع الناقص هو دائرة مركزها البؤرة الثانية $ب_١$ ونصف قطرها يساوى طول المحور الاكبر ٢ أ' . وبالمثل تقع النقط $ى_١$ المماثلة للبؤرة $ب_١$ بالنسبة لجميع مماسات القطع الناقص على دائرة ثانية مركزها $ب_٢$ ونصف قطرها ٢ أ' .

ويطلق على كل واحدة من هاتين الدائرتين اسم *دائرة البؤرتين* [1] . فيقال «دائرة البؤرتين $ب_١$» ويقصد بذلك الدائرة التى مركزها $ب_١$ وتقع عليها جميع النقط المماثلة الى $ب_٢$ بالنسبة الى مماسات القطع الناقص . ويقال مثل ذلك عن «دائرة البؤرتين $ب_٢$» .

ملحوظة :

بما أن $ط ى_٢ = ط ب_٢$ وهذا صحيح بالنسبة لجميع نقط المماس فينتج من ذلك أننا إذا ركزنا فى أية نقطة على أحد مماسات القطع الناقص ورسمنا دائرة تمر باحدى البؤرتين فان هذه الدائرة تمر بالنقطة المماثلة لهذه البؤرة بالنسبة للمماس .

(هـ) القطع الناقص معتبراً كغلاف مستقيم متحرك

لما كانت الدائرة المساعدة هى دائرة ثابتة وقد سبق البرهنة على أنها المحل الهندسى لنقط تلاقى مماسات القطع الناقص مع الاعمدة النازلة عليها من البؤرتين فينتج من ذلك ما يصح اعتباره تعريفاً جديداً للقطع الناقص وهو :

اذا تحركت زاوية قائمة فى مستوى دائرة ثابتة مركزها م بحيث يكون رأسها واقعاً دائماً على الدائرة وأحد ضلعيها ماراً على الدوام بنقطة ثابتة موجودة داخل الدائرة وفى مستويها فان الضلع الاخر يغلف قطعاً ناقصاً مركزه م واحدى بؤرتيه النقطة الثابتة وطول محوره الاكبر يساوى قطر الدائرة .

(و) كيفية رسم مماسين لقطع ناقص معلوم من نقطة خارجة

يتعين المماسان المرسومان من النقطة الخارجة ﻫ (شكل ٥٢) اذا علمت النقطتان $ى_٢$ ، $ى_٢'$ المماثلتان لاحدى البؤرتين (ولتكن $ب_٢$) بالنسبة الى المماسين . فهاتان النقطتان واقعتان :

---

(١) وذلك لان كل واحدة من هاتين الدائرتين متعلقة بالبؤرتين معا فهى الدائرة التى مركزها إحدى البؤرتين والتى تمر بالنقط المماثلة للبؤرة الاخرى بالنسبة لجميع مماسات القطع الناقص .

اولا : على دائرة البؤرتين التى مركزها ب١

ثانياً : على الدائرة التى مركزها ه ونصف قطرها ه ب٢ لأن ه واقعة على كل من المماسين (قارن الملحوظة فى آخر الفقرة ى) .

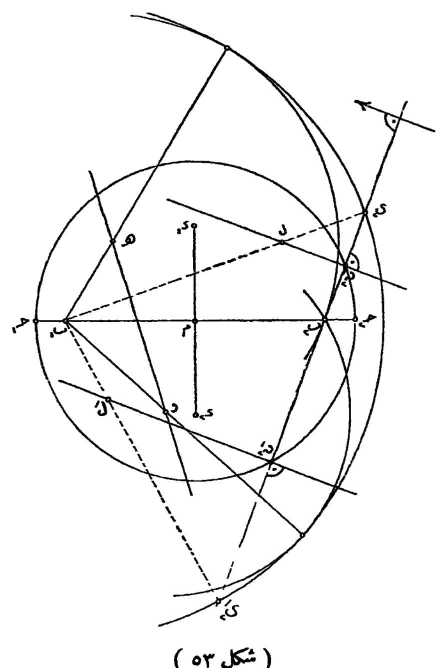
فالنقطتان ى٢ ، ى٢َ هما إذن نقطتا تقاطع الدائرتين المذكورتين ويكون المماسان المطلوبان هما المستقيمان ه ل ، ه لَ المرسومان من ه عموديا على ى٢ب٢ ، ى٢َب٢ . أما نقطتا التماس ل ، لَ فهما نقطتا تقاطع المماسين مع ى٢ب١ ، ى٢َب١ (راجع أيضاً شكل ٥١) [١] .

(شكل ٥٢)

واذا أريد رسم المماسين الموازيين لاتجاه معلوم (شكل ٥٣) فان النقطتين ى٢ ، ى٢َ المماثلتين للبؤرة ب٢ بالنسبة للمماسين المطلوبين يكونان فى هذه الحالة

(١) اذا كان العمل مضبوطا فلا بد أن تمر الدائرة المساعدة بالنقطتين ى٢ ، ى٢َ .

نقطتي تقاطع دائرة البؤرتين التي مركزها $ب_{١}$ مع العمود النازل من $ب_{٢}$ على الاتجاه المعلوم . ويكون المماسان هما العمودان $ن_{٢}ل$ ، $ن_{٢}'ل'$ المقامان على



(شكل ٥٣)

$ى_{٢}ى_{٢}'$ من منتصف $ب_{٢}ى_{٢}$ ومنتصف $ب_{٢}ى_{٢}'$. ويمكن الحصول على نقطتي التماس ل ، ل' كما تقدم .

(ع) نقطتا تقاطع مستقيم معلوم مع قطع ناقص

يتضح من (شكل ٥١) أنه اذا ركزنا فى أية نقطة على القطع الناقص مثل

هـ ورسمنا دائرة نصف قطرها يساوي هـ $ب_٢$ أي بعد هـ عن إحدى البؤرتين فان هذه الدائرة تمس دائرة البؤرتين التي مركزها البؤرة الاخرى $ب_١$ وتكون نقطة تماس الدائرتين وهي النقطة $ى_٢$ هي النقطة المماثلة للبؤرة الاولى $ب_٢$ بالنسبة الى مماس القطع الناقص في هـ . من ذلك نستنتج النظرية الآتية التي يصح اعتبارها تعريفاً جديداً للقطع الناقص :

المحل الهندسي لمركز دائرة تمس على الدوام من الداخل دائرة ثابتة مركزها $ب_١$ وتمر بنقطة ثابتة $ب_٢$ موجودة داخل هذه الدائرة هو قطع ناقص بؤرتاه $ب_١$ ، $ب_٢$ وتكون الدائرة الثابتة إحدى دائرتي البؤرتين لهذا القطع ونصف قطرها = طول المحور الاكبر = ٢ ا′ .

فبناء على هذه النظرية تكون نقطتا تقاطع مستقيم مثل هـ و مع قطع ناقص معلوم (شكل٥٣) هما مركزا الدائرتين اللتين تمران باحدي البؤرتين $ب_٢$ وتمسان من الداخل دائرة البؤرتين التي مركزها البؤرة الاخرى $ب_١$ (نقطتا التقاطع هما هـ ، و) وهذه عملية معروفة في الهندسة المستوية وقد رأينا عدم رسمها في الشكل منعاً لتزاحم الخطوط .

بند ٤٨ : القطع الزائد

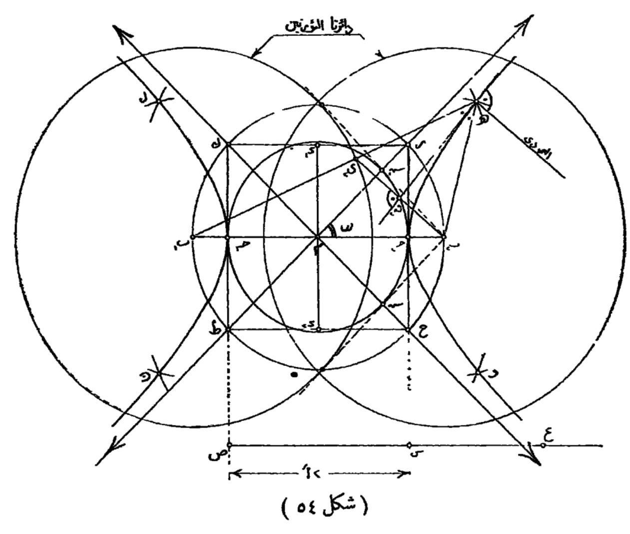
(ا) تعريف

يمكن تعريف القطع الزائد بانه *المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى مساوياً على الدوام مقداراً ثابتاً .*

وهذا المقدار الثابت يساوي ٢ ا′ وهو طول *المحور القاطع* . وتسمى النقطتان الثابتتان *بالبؤرتين* كما يسمى المستقيم الذي يصل أية نقطة من نقط القطع باحدى البؤرتين *بالبعد البؤري* .

(ب) كيفية رسم القطع الزائد — بعض الخواص

لرسم القطع الزائد اذا علمت بؤرتاه والمقدار الثابت ٢ أ′ عدة طرق ولكننا سنقتصر هنا على ذكر الطريقة المباشرة مع ذكر بعض الخواص المهمة التى يمكن استخلاصها منها :



(شكل ٥٤)

نأخذ أية نقطة مثل ع على امتداد مستقيم مثل س ص طوله يساوى ٢أ′ من إحدى جهتيه (شكل ٥٤) ثم نركز فى ب، ، ب٢ وبفتحتى برجل تساويان ص ع ، س ع على التوالى نرسم قوسى دائرتين يتقاطعان فى هـ ، و فتكونان نقطتين على المنحنى لأن الفرق بين البعدين البؤريين لكل منهما يساوى ٢ أ′ حسب العمل . واذا عكسنا طريقة العمل بدون أن نغير فتحتى البرجل كما سبق شرحه فى حالة القطع

الناقص حصلنا على نقطتين جديدتين ل ، م وهكذا كلما اخترنا نقطة جديدة على امتداد ص س حصلنا على أربع نقط على المنحنى .

وينتج مما تقدم :

أولا : أن القطع الزائد بخلاف القطع الناقص يتكون من شعبتين منفصلتين ممتدتين الى ما لا نهاية (وذلك لأن النقطة ع السالفة الذكر يمكن اختيارها على امتداد ص س بعيدة بعداً لا نهائياً) ويقال كما سنرى فى الفصل الثانى ان المستقيم الذى فى اللانهاية « الواقع » فى مستوى القطع الزائد يقطعه فى نقطتين حقيقيتين .

ثانيا : أن القطع الزائد متماثل مثل القطع الناقص بالنسبة الى محورين متعامدين أحدهما ح$_1$ح$_2$ ويسمى بالمحور القاطع والآخر ى$_1$ى$_2$ ويسمى بالمحور المرافق .

ثالثاً : أن القطع الزائد مثل القطع الناقص أيضاً متماثل بالنسبة للنقطة م التى يطلق عليها اسم مركز القطع الزائد .

رابعاً : اذا أخذنا البعدين م ى$_1$ = م ى$_2$ فى اتجاهين متضادين على المحور المرافق بحيث كان $\overline{\text{م ى}_1}^2 = \overline{\text{م ى}_2}^2 = \overline{\text{م ب}_1}^2 - \overline{\text{م ح}_1}^2$ فان البعد ى$_1$ ى$_2$ يسمى طول المحور المرافق . وتجب الاشارة الى أن ى$_1$ ، ى$_2$ غير واقعتين على المنحنى ولو أنه يمكن البرهنة تحليلياً على أن النقطتين « التخيليتين » اللتين بعداهما م ى$_1\sqrt{-1}$ ، م ى$_2\sqrt{-1}$ فى الاتجاهين المتضادين على المحور المرافق — واقعتان على المنحنى .

ويؤخذ من المعادلة السابقة أن المحور القاطع يصح أن يكون أكبر من أو مساوياً أو أصغر من المحور المرافق . وفى حالة التساوى يسمى القطع الزائد متساوى المحورين أو قائم (لأن الزاوية بين مستقيمية التقريبين تكون فى هذه الحالة قائمة) .

(ح) مماس القطع الزائد فى احدى نقطه

نظرية : مماس القطع الزائد وعموديه فى احدى نقطه ينصفان على التوالى الزاوية الداخلية والخارجية المحصورة بين البعدين البؤريين للنقطة .

والبرهان على هذه النظرية يشبه تماماً نظيره فى حالة القطع الناقص .

(ى) الدائرة المساعدة ودائرتا البؤرتين

أولا : الدائرة المساعدة

المحل الهندسى لنقط تلاقى مماسات القطع الزائد مع الاعمدة النازلة عليها من البؤرتين هو دائرة مركزها مركز القطع ونصف قطرها نصف المحور القاطع أ أ' (شكل ٥٤) . وتسمى هذه الدائرة بالدائرة المساعدة (راجع البرهان فى حالة القطع الناقص)

ثانياً : دائرتا البؤرتين

المحل الهندسى للنقطة ى٢ التى تماثل البؤرة ب٢ بالنسبة لاى مماس للقطع الزائد هو دائرة مركزها البؤرة الثانية ب١ ونصف قطرها يساوى طول المحور القاطع ٢ أ . وبالمثل تقع النقط ى١ المماثلة للبؤرة ب١ بالنسبة لجميع مماسات القطع الزائد على دائرة ثانية مركزها ب٢ ونصف قطرها ٢ أ' .

ويطلق على كل واحدة من هاتين الدائرتين اسم دائرة البؤرتين (راجع القطع الناقص) .

ملحوظة :

اذا ركزنا فى أية نقطة على أحد مماسات القطع الزائد ورسمنا دائرة تمر باحدى البؤرتين فان هذه الدائرة تمر بالنقطة المماثلة لهذه البؤرة بالنسبة للماس (راجع القطع الناقص) .

(هـ) القطع الزائد معتبراً كغلاف مستقيم متحرك

بطريقة مشابهة لما سبق ذكره فى حالة القطع الناقص نستطيع هنا أيضاً أن نقرر :

اذا تحركت زاوية قائمة فى مستوى دائرة ثابتة مركزها م (الدائرة المساعدة) بحيث يكون رأسها واقعاً دائماً على الدائرة وأحد ضلعيها ماراً على الدوام بنقطة ثابتة موجودة خارج الدائرة وفى مستويها فان الضلع الآخر يغلف قطعاً زائداً مركزه م وإحدى بؤرتيه النقطة الثابتة وطول محوره القاطع يساوى قطر الدائرة .

وبالنظر الى أن المماس فى هـ (شكل ٥٤) عمودى على $ب_٢ى_٢$ من منتصفه وأن $ى_٢$ واقعة دائما على دائرة البؤرتين التى مركزها $ب_١$ فاننا نستطيع أن نعطى القطع الزائد ما يمكن اعتباره تعريفاً جديداً كثيراً ما يستعمل لرسمه رسماً دقيقاً[١] :—

اذا فرضت دائرة ثابتة مركزها $ب_١$ فى مستو وفرضت نقطة ثابتة $ب_٢$ خارجها فى نفس المستوى ووصلت $ب_٢$ بنقطة مثل $ى_٢$ موجودة على الدائرة وتتحرك عليها فالمستقيم العمودى على $ب_٢ى_٢$ من منتصفه يغلف قطعا زائداً بؤرتاه $ب_١$، $ب_٢$ وطول محوره القاطع ٢ أ يساوى نصف قطر الدائرة التى هى إحدى دائرتى البؤرتين للمنحنى وتكون نقطة التماس هـ لأى وضع من أوضاع المستقيم الذى يتحرك مغلفا للقطع الزائد هى نقطة تقاطعه مع امتداد $ب_١ى_٢$.

(و) المستقيمان التقريبيان

هما المماسان للقطع الزائد فى نقطتى تقاطعه مع المستقيم الذى فى اللانهاية .

ومن السهل الحصول عليهما اذا طبقنا أحد التعريفين المذكورين فى الفقرة السابقة وذلك بأخذ الوضع النهائى للمماس عندما تصبح نقطة تماسه على بعد لانهائى.

فاذا رسمنا من $ب_٢$ مثلا (شكل ٥٤) مماسين للدائرة المساعدة فانهما يمسان

(١) أوجد التعريف المناظر فى حالة القطع الناقص .

أيضاً دائرة البؤرتين التى مركزها $ب_1$ ويكون المستقيمان التقريبيان هما المستقيمان اللذان يصلان المركز م بنقطتى التماس $س_1$ ، $س_1$ مع الدائرة المساعدة .

ولما كان المثلثان $س_1$ م $ب_2$ ، $ح_2$ م ع منطبقين فينتج أن م ع = م $ب_2$.

وإذن فللحصول على المستقيمين التقريبين بطريقة أبسط نركز فى م وبفتحة تساوى م $ب_2$ = م $ب_1$ نرسم دائرة تقطع المماسين فى الرأسين $ح_1$ ، $ح_2$ فى النقطتين ط ، ع فيكون المستقيمان التقريبيان هما م ط ، م ع .

وينتج من ذلك أن جتا $\omega = \frac{م ح_2}{م ب_2}$

حيث ω هى الزاوية المحصورة بين كل من المستقيمين التقريبين والمحور القاطع.

(٣) كيفيه رسم مماسين لقطع زائد من نقطة غير واقعة عليه .

تتبع طريقة العمل التى بيناها سابقاً للقطع الناقص (بند ٤٧ ٣) مع ملاحظة ما يأتى : —

اولا : أن النقطة المراد رسم المماسين منها يجب أن تقع بين الشعبتين وهذه المنطقة تسمى بالمنطقة الخارجية وإلا كان المماسان تخيليين وهذا الشرط يشبه اشتراط وجود النقطة خارج القطع الناقص لامكان رسم مماسين حقيقيين منها له .

ثانياً : اذا كان المطلوب رسم مماسين موازيين لاتجاه معلوم ورسمنا من م موازياً لهذا الاتجاه فلابد أن يقع هذا الموازى داخل الزاوية ك م ٣ (شكل ٥٤) المحصورة بين المستقيمين التقريبين أى يجب أن تكون الزاوية الحادة التى يميل بها الاتجاه المعلوم على المحور القاطع اكبر من ω وإلا فان العمود النازل على هذا الاتجاه من $ب_2$ مثلا لا يقطع دائرة البؤرتين التى مركزها $ب_1$ (فى نقط حقيقية) ويكون المماسان فى هذه الحالة تخيليين [١] .

(١) أما فى القطع الناقص فانه يمكن دائماً رسم مماسين حقيقيين له يوازيان اتجاها معلوما .

(ع) نقط تقاطع خط مستقيم مع قطع زائد معلوم

النظرية الآتية صحيحة ويمكن البرهنة عليها كما تقدم فى بند (٤٧ ع) :

المحل الهندسى لمركز دائرة تمس على الدوام من الخارج دائرة ثابتة مركزها ب١ وتمر بنقطة ثابتة ب٢ موجودة خارج الدائرة وفى مستويها هو قطع زائد بؤرتاه ب١ ، ب٢ وتكون الدائرة الثابتة إحدى دائرتى البؤرتين لهذا القطع ونصف قطرها = طول المحور القاطع = ٢ أ .

فبناء على هذه النظرية تكون نقطتا تقاطع مستقيم مع قطع زائد معلوم هما مركزا الدائرتين اللتين تمران باحدى البؤرتين وتمسان من الخارج دائرة البؤرتين التى مركزها البؤرة الثانية .

بند ٤٩ : *القطع المكافىء*

(ا) تعريف

يمكن تعريف القطع المكافىء بانه *المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى مستو بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة فى المستوى مساويا على الدوام بعدها عن مستقيم ثابت .*

وتسمى النقطة الثابتة *بالبؤرة* ويسمى المستقيم الثابت *بالدليل* كما يسمى المستقيم الذى يصل أية نقطة من نقط المنحنى بالبؤرة *بالبعد البؤرى* .

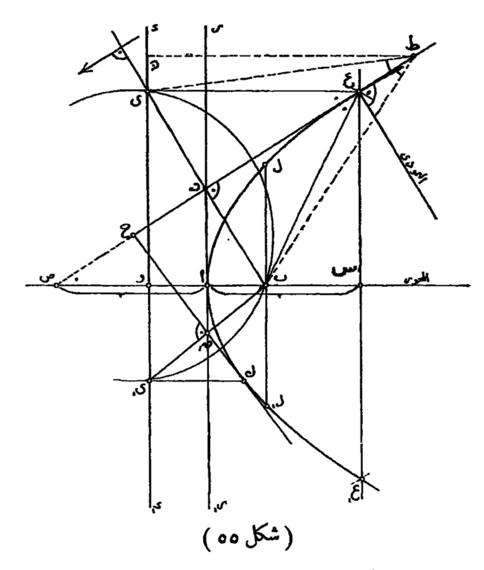
(ب) كيفية رسم القطع المكافىء — بعض الخواص

المعلوم البؤرة ب والدليل ى ى١ فلرسم القطع المكافىء نسقط من ب عموداً على الدليل فيقطعه فى و فاذا نصفنا ب و فى ا كانت ا إحدى النقط وتسمى *رأس القطع* ويسمى المستقيم م م١ المرسوم منها موازياً للدليل *بالمماس فى الرأس* كما يسمى العمود النازل منها على الدليل *محور القطع المكافىء* .

فاذا أخذنا نقطة ما مثل س على المحور ورسمنا منها موازيا للدليل ثم ركزنا فى

ب وبفتحة تساوى و س قطعنا هذا الموازى فى ع ، ع، كانت ع ، ع، نقطتين من نقط المنحنى وبتكرار هذه العملية يمكننا أن نحصل على أى عدد من النقط .

ويطلق على المستقيم ل ل، المار بالبؤرة عمودياً على المحور (حيث ل ، ل، نقطتا تقاطعه مع المنحنى) اسم *الوتر البؤرى العمودى* وهو يساوى كما يتضح من الشكل أربعة أمثال بعد البؤرة عن الرأس .



(شكل ٥٥)

وينتج مما تقدم :

اولا : لما كانت النقطة الاختيارية س فى (شكل ٥٥) يصح أن تأخذ أى وضع على المحور الى يمين الرأس ويجوز أن تبعد عنه بعداً لا نهائياً فالقطع المكافىء منحنٍ غير محدود ويمتد الى مالا نهاية فى الجهة المذكورة . ويقال ان المستقيم الذى

فى اللانهاية الموجود فى المستوى بمس وإن نقطة التماس التى يعبر عنها « باتجاه » المحورهى النقطة الثانية لتقاطع المحورمع المنحنى .

ثانياً : أن القطع المكافىء متماثل بالنسبة الى مستقيم واحد هو المحور

ثالثاً : أن القطع المكافىء بخلاف القطعين الناقص والزائد ليس له مركز على بعد نهائى ولذا سمى المقطع غير المركزى .

رابعاً : أن « أقطار » القطع المكافىء كلها موازية للمحور وذلك بخلاف الحال فى القطعين الناقص والزائد فالقطر فيهما هو المستقيم المار بالمركز .

(حـ) مماس القطع المكافىء فى إحدى نقطه

نظرية : مماس القطع المكافىء وعموديه فى احدى نقطه ينصفان على التوالى الزاوية الداخلة والخارجة المحصورة بين البعد البؤرى للنقطة وبين القطر المار بها [1] .

البرهان على هذه النظرية يشبه نظيره فى حالة القطع الناقص فلو رسم من ع (إحدى نقط المنحنى) المستقيم ع ص منصفاً للزاوية ب ع ى (شكل ٥٥) وأنزل من ب العمود ب ى على ع ص فقابل المستقيم المرسوم من ع موازياً للمحور فى ى فمن الواضح أن النقطة ى هى المماثلة للبؤرة بالنسبة الى ع ص وأنها تقع على الدليل وأن ط ب لا يساوى ط ى لاية نقطة مثل ط واقعة على ع ص ما عدا النقطة ع نفسها الواقعة على المنحنى . وينتج من ذلك أن ع ص هو مماس القطع المكافىء فى ع .

ولما كان المثلثان و ب ص م و ع ى منطبقين فينتج أن

ب ص = ع ى = و س

أى أن

ا ص = ا س

(١) أى المستقيم المرسوم منها موازيا للمحور ويسمى هذا المستقيم أحياناً « بالبعد البؤرى الثاني » للنقطة لأنه يعتبر ماراً ببؤرة القطع المكافىء الثانية التى على بعد لانهائى .

وهذا يعطينا طريقة بسيطة جداً لرسم المماس فى أية نقطة على القطع المكافىء.

(ى) المماس فى الرأس والدليل

يتضح من (شكل ٥٥) أن نقطة تقاطع المماس فى ع مع العمود النازل عليه من البؤرة وهى النقطة ں ـــ واقعة على المماس فى الرأس ا كما يتضح أن النقطة ى المماثلة للبؤرة بالنسبة للمماس المذكور واقعة على الدليل . ولما كان هذا صحيحاً لكل مماس آخر للقطع المكافىء فينتج أن :

أولا : *المحل الهندسى لنقط تلاقى مماسات القطع المكافىء مع الأعمدة النازلة عليها من البؤرة هو المماس فى الرأس .*

ومعنى ذلك أن الدائرة المساعدة فى حالتى القطع الناقص والزائد تؤول فى حالة القطع المكافىء الى مستقيم هو المماس فى الرأس .

ثانياً : *المحل الهندسى للنقط التى تماثل البؤرة بالنسبة الى مماسات القطع المكافىء هو الدليل .*

ومعنى هذا أن دائرة البؤرتين فى حالتى القطع الناقص والزائد تؤول فى حالة القطع المكافىء الى مستقيم هو دليله .

ملحوظة :

لما كان ط ب = ط ى (شكل ٥٥) فاذا ركزنا فى أية نقطة على أحد مماسات القطع المكافىء ورسمنا دائرة تمر بالبؤرة فان هذه الدائرة تمر بالنقطة المماثلة للبؤرة بالنسبة للمماس .

(هـ) القطع المكافىء معتبراً كغلاف مستقيم متحرك

لما كان موقع العمود النازل من البؤرة على أى مماس للقطع المكافى يقع كما قدمنا على المماس فى الرأس فيتضح من ذلك أنه :

اذا تحركت زاوية قائمة فى مستو بحيث يكون رأسها موجوداً دائماً على مستقيم ثابت فى المستوى وأحد ضلعيها ماراً على الدوام بنقطة ثابتة موجودة فى المستوى وغير واقعة على المستقيم فان ضلعها الآخر يغلف قطعاً مكافئاً بؤرته النقطة الثابتة ومماسه فى الرأس المستقيم الثابت .

(م) كيفية رسم مماسات لقطع مكافىء من نقطة خارجة

نفرض فى (شكل ٥٥) أن النقطة المعلومة ح . فاذا ركزنا فى ح وبفتحة تساوى حب رسمنا دائرة فان هذه الدائرة تمر بالنقطتين ى،ى١ المماثلتين للبؤرة بالنسبة للماسين المطلوبين (راجع الملحوظة فى الفقرة ى) . ولكن النقطتين ى،ى١ واقعتان أيضاً على الدليل (أنظر الفقرة ى) فهما إذن نقطتا تقاطع الدليل مع الدائرة المشار اليها . ويكون المماسان المطلوب رسمهما هما العمودان النازلان من ح على ب ى،ب ى١ . ويقابل هذان المماسان المستقيمين المرسومين من ى،ى١ موازيين للمحور فى نقطتى التماس ع،ك (ويلاحظ أن و،و١ يجب أن تكونا واقعتين على المماس فى الرأس) .

واذا أريد رسم « مماسين » للقطع المكافىء موازيين لاتجاه معلوم (اتجاه السهم فى شكل ٥٥) ننزل من البؤرة عموداً على الاتجاه المعلوم فيقابل الدليل فى نقطة واحدة ى هى النقطة المماثلة للبؤرة بحيث يكون العمود المقام على ب ى من منتصفه أحد المماسين المطلوبين . أما المماس الثانى فليس تخيلياً وإنما هو — كما سيأتى بيانه فى (بند ٧٤) — المستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى والذى يمكن اعتباره « ماراً » بالاتجاه المعلوم ويرى من ذلك أنه لا يمكن رسم أكثر من مماس واحد لقطع مكافىء يكون موازياً لاتجاه معلوم .

(ع) نقطتا تقاطع مستقيم مع قطع مكافىء معلوم

اذا ركزنا فى أية نقطة على القطع المكافىء مثل ع (شكل ٥٥) ورسمنا دائرة

نصف قطرها ع ب فان هذه الدائرة تمس الدليل بحيث يمكننا القول إن :

المحل الهندسي لمركز دائرة تمر على الدوام بنقطة ثابتة وتمس مستقيماً ثابتاً هو قطع مكافئ، بؤرته النقطة الثابتة ودليله المستقيم الثابت .

فنقطتا تقاطع مستقيم مع قطع مكافئ، معلوم بالبؤرة والدليل هما إذن المركزان الموجودان على المستقيم للدائرتين اللتين تمران بالبؤرة وتمسان الدليل .

الفصل الثانى

المقاطع المستوية للمخروط الدورانى

بند ٥٠ : نظرية دندلان[1]

نقطة التماس بين المستوى القاطع لمخروط دورانى وبين الكرة المماسة له والمرسومة داخل المخروط هى احدى بؤر منحنى التقاطع .

فاذا أمكن رسم كرتين تفيان بالشرطين السابقين كان المقطع منحنياً له بؤرتان (قطع ناقص أو زائد) . أما إذا لم يكن هناك سوى كرة واحدة فالمقطع منحن ذو بؤرة واحدة (قطع مكافىء) .

البرهان :

للبرهنة على هذه النظرية يجب اعتبار الاوضاع المختلفة التى يمكن أن يشغلها المستوى القاطع Σ بالنسبة للمخروط . فاذا أسمينا نصف زاوية رأس المخروط α وزاوية ميل المستوى القاطع على المحور β واستبعدنا الحالتين اللتين يكون فيهما المستوى Σ إما ماراً برأس المخروط فيقطعه فى مستقيمين راسمين (حقيقيين أو تخيليين) أو عمودياً على محور المخروط فيقطعه فى دائرة — فان المستوى القاطع Σ لا يمكن أن يشغل بالنسبة للمخروط أكثر من أوضاع ثلاثة :

(١) إما أن تكون $\beta > \alpha$ وفى هذه الحالة يقابل المستوى القاطع جميع رواسم المخروط ويكون إذن منحنى التقاطع منحنيا مقفلا[2] (شكل ٥٦ ا)

(٢) وإما أن تكون $\beta < \alpha$ وفى هذه الحالة يوجد راسمان فى المخروط

---

(١) G.P. Dandelin

(٢) وذلك لأن منحنى تقاطع سطح مخروطى مع مستو يتألف كما هو مفهوم من نقط تقاطع رواسمه مع المستوى .

يوازيان المستوى القاطع ويكون حينئذ خط التقاطع مؤلفاً من شعبتين أو فرعين منفصلين وممتدين الى مالا نهاية (شكل ٥٦ ب)

(٣) وأخيراً يجوز أن تكون $\beta = \alpha$ وفى هذه الحالة يوجد راسم واحد مواز للمستوى القاطع ويكون حينئذ خط التقاطع منحنيا ذا فرع واحد ممتداً الى ما لا نهاية (شكل ٥٦ حـ) .

وسنقتصر الآن على الحالة الاولى التى فيها $\beta > \alpha$ فنبرهن فيما يلى على أن منحنى التقاطع قطع ناقص :

لذلك نفرض فى (شكل٥٦ ا) أن مستوى الورقة يمثل المستوى الرأسى Π_2 ويمر بمحور المخروط فيقطعه فى الراسمين ا ع، ا ع$_1$ وأن المستوى القاطع Σ عمودى على Π_2 ونفرض أيضا أن الكرتين ك$_1$، ك$_2$ المرسومتين داخل المخروط يمسان Σ فى النقطتين ب$_1$، ب$_2$ ويتماسان مع المخروط فى دائرتين عموديتين على Π_1 ويمثلهما المستقيمان ع ع$_1$، هـ هـ$_1$ على التوالى . فاذا كانت ﮤ نقطة على منحنى التقاطع (حيث ﮤ" تقع على المستقيم حـ$_1$حـ$_2$ الذى يمثل Σ) وكانت س$_1$، س$_2$ نقطتى تماس الراسم ا ﮤ المار بها مع الكرتين ك$_1$، ك$_2$ على التوالى (حيث س$_1$"، س$_2$" هما نقطتا تقاطع ا ﮤ" مع ع ع$_1$، هـ هـ$_1$) فان المماسين ﮤ ب$_1$، ﮤ س$_1$ المرسومين من النقطة ﮤ الى الكرة ك$_1$ يكونان متساويين وكذلك يتساوى المماسان ﮤ ب$_2$، ﮤ س$_2$ المرسومين منها الى الكرة ك$_2$ ولما كان ا ع هو أحد الوضعين اللذين يتخذهما الراسم ا ﮤ أثناء دورانه حول ا وذلك عند وقوعه فى المستوى Π_2 بحيث يكون و ع، و هـ البعدين الحقيقيين للجزءين ﮤ س$_1$، ﮤ س$_2$ من هذا الراسم فانه ينتج أن

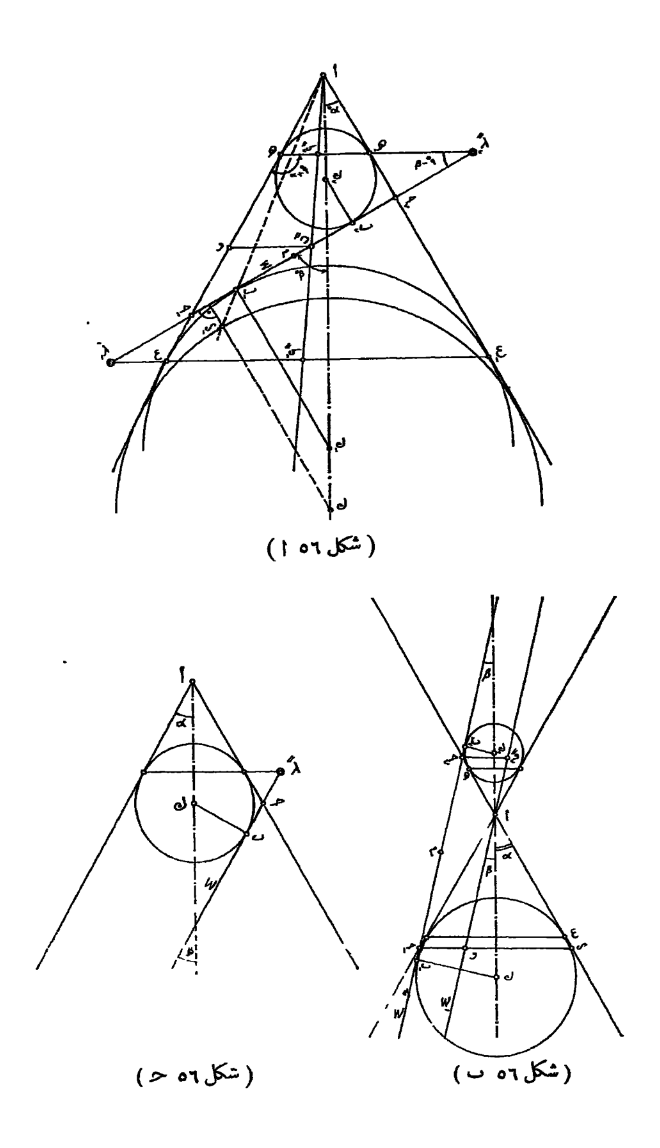
ﮤ ب$_1$ = ﮤ س$_1$ = و ع

ﮤ ب$_2$ = ﮤ س$_2$ = و هـ

∴ ﮤ ب$_1$ + ﮤ ب$_2$ = و ع + و هـ = هـ ع = مقداراً ثابتا = حـ$_1$حـ$_2$ [1]

---

(١) للبرهنة على أن هـ ع = حـ$_1$حـ$_2$ تؤخذ النقطة ﮤ منطبقة أولا على حـ$_1$ ثم على حـ$_2$.



(شكل ٥٦ أ)

(شكل ٥٦ ب)

(شكل ٥٦ حـ)

فالمحل الهندسى للنقطة ى هو اذن قطع ناقص بؤرتاه $ب_١$ ، $ب_٢$ ومحوره الاكبر $ح_١ ح_٢$.

أما اذا كانت $\beta > \alpha$ فانه يمكن البرهنة بمثل الطريقة السابقة على أن الفرق بين ى$ب_١$ ، ى$ب_٢$ يساوى على الدوام مقداراً ثابتا أى أن المحل الهندسى للنقطة ى هو قطع زائد محوره القاطع $ح_١ ح_٢$.

وفى حالة تساوى الزاويتين α ، β يتقاطع المستوى Σ ومستوى دائرة التماس بين المخروط والكرة (حيث لا يمكن فى هذه الحالة رسم اكثر من كرة واحدة داخل المخروط تكون ماسة للمستوى Σ) فى مستقيم (عمودى على المستوى $\Pi_٢$) يمكن إثبات أن بعد أية نقطة مثل ى على منحنى التقاطع عنه يساوى على الدوام بعدها عن نقطة تماس الكرة مع المستوى Σ أى أن منحنى التقاطع هو قطع مكافىء دليله المستقيم المشار اليه وبؤرته نقطة التماس .

ملحوظة هامة :

من الواضح أنه اذا رسم داخل المخروط فى أية حالة من الحالات الثلاث السابقة كرة حيثما اتفق مركزها ك (شكل ١٥٦) ثم رسم قطر الكرة العمودى على المستوى القاطع Σ وكان $ر_١$ ، $ر_٢$ هما نهايتا هذا القطر (يلاحظ أن $ر_٢$ غير مبينة فى الشكل) فان النقط ا ، $ب_١$ ، $ر_١$ تكون على استقامة واحدة وبالمثل يكون ا $ب_٢$ $ر_٢$ مستقيما . فهذه الحقيقة تساعد على تعيين بؤرتى منحنى التقاطع بطريقة بسيطة يمكن وضعها فى الصورة الآتية :

اذا قطع مستو مخروطاً دائرياً قائماً كانت بؤرتا منحنى التقاطع هما المسقطان المركزيان (من رأس المخروط على المستوى القاطع) لنهايتى القطر العمودى على المستوى القاطع لأية كرة مرسومة داخل المخروط .

بند ٥١ : نتائج نظرية دندلان

النتيجة الاولى

المقطع المستوى لمخروط دورانى يكون قطعاً زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً على حسب ما اذا كان المستوى المار برأس المخروط موازياً للمستوى القاطع — يتقاطع مع المخروط فى راسمين (حقيقيين منفصلين) أو يمسه أو لا يتقاطع معه على التوالى [1] .

النتيجة الثانية

المقاطع المخروطية يمكن اعتبارها مساقط مركزية للدائرة [2] (قارن النتيجة الخامسة) . ولما كانت العلاقة الهندسية بين أى شكل مستو ومسقطه المركزى تسمى بالائتلاف المركزى (بند ٦٣) فأنه يمكننا أن نقول إن المقاطع المخروطية مؤتلفة مع الدائرة ائتلافاً مركزياً .

النتيجة الثالثة

نظراً الى أن الاسطوانة الدائرية القائمة هى حالة خاصة من المخروط الدورانى فاننا نستطيع أن نبرهن بمثل البرهان السابق (بند ٥٠) على أن أى مستو يقطع الاسطوانة الدورانية على وجه العموم فى قطع ناقص (بصرف النظر عن الحالة التى

---

(١) يتضح بمراجعة (بند ٤٥) أن هذا يصدق أيضاً على السطح المخروطى العام اذا كان من الدرجة الثانية أى اذا كان دليله منحنياً من الدرجة الثانية .

(٢) اذا اعتبرنا هذه النظرية كنتيجة مباشرة لنظرية دندلان فانه يشترط أن يكون مركز الاسقاط نقطة على محور تماثل الدائرة . غير أنه لما كان منحنى تقاطع مستو مع مخروط دائرى مائل (وهو الشكل العام لكل سطح مخروطى من الدرجة الثانية) هو منحن من الدرجة الثانية أو مقطع مخروطى (بند ٤٥) فان المسقط المركزى للدائرة هو على وجه العموم مقطع مخروطى أينما كان مركز الاسقاط .

يكون فيها المقطع دائرة أو مستقيمين راسمين) ويتضح من ذلك أن المسقط المتوازى مائلا كان أو عمودياً للدائرة هو على وجه العموم قطع ناقص .

وكذلك الظل الذى تلقيه دائرة أو قطع ناقص على مستو هو على وجه العموم قطع ناقص فى حالة الاضاءة المتوازية . أما اذا كان مصدر الضوء نقطة فالظل الحادث هو على وجه العموم مقطع مخروطى .

فالقطع الناقص إذن فضلا عن كونه مثل بقية المقاطع المخروطية مؤتلفاً مع الدائرة ائتلافاً مركزياً فهو مؤتلف معها أيضاً ائتلافاً متوازياً . وهذه ميزة خاصة للقطع الناقص يسهل بفضلها حل كثير من المسائل المتعلقة به (بند ١٣) .

النتيجة الرابعة

الطريقة المستعملة فى (شكل ٥٤) لرسم المستقيمين التقريبين لقطع زائد والتى عبرنا عنها فى (بند ٤٨ و) بالمعادلة :

$$\text{جتا } \omega = \frac{\text{م } \text{ح}_٢}{\text{م } \text{ب}_٢}$$

حيث ω هى زاوية ميل كل من المستقيمين التقريبين على المحور القاطع $\text{ح}_١ \text{ح}_٢$ — يمكن البرهنة عليها بواسطة نظرية دندلان كما يلى :

اذا فرضنا فى (شكل ٥٦ ب) أن $\Sigma_١$ هو المستوى المار برأس المخروط موازياً للمستوى القاطع Σ فان $\Sigma_١$ يتقاطع مع المخروط فى راسمين يوازيان المستقيمين التقريبين . فاذا رمزنا الى أحد الراسمين بالرمز $\text{و}_١ \text{و}_٢$ والى مسقطه الرأسى المنطبق على المستقيم الممثل للمستوى $\Sigma_١$ — بالرمز $\text{و}_١'' \text{و}_٢''$ فان زاوية ميل المستقيم $\text{و}_١ \text{و}_٢$ على $\Pi_٢$ تكون مساوية للزاوية المحصورة بين كل من المستقيمين التقريبين والمحور القاطع وهى الزاوية التى رمزنا اليها بالرمز ω وينتج من ذلك أن

$$\text{جتا}\ \omega = \frac{و_١''و_٢''}{و_١و_٢}$$

ولكن $و_١''و_٢'' = ح_١ح_٢ = ٢\,م\,ح_٢$

والطول الحقيقى للمستقيم $و_١و_٢$ = طول الراسم $ح_٢ ر$ الواقع فى المستوى $\Pi_٢$

$$= هـ ع + هـ ح_٢ + ع ر$$

$$= ح_١ح_٢ + ح_٢ب_٢ + ح_١ب_١$$

$$= ب_١ب_٢ = ٢\,م\,ب_٢$$

$$\therefore\ \text{جتا}\ \omega = \frac{٢م\,ح_٢}{٢م\,ب_٢} = \frac{م\,ح_٢}{م\,ب_٢}$$

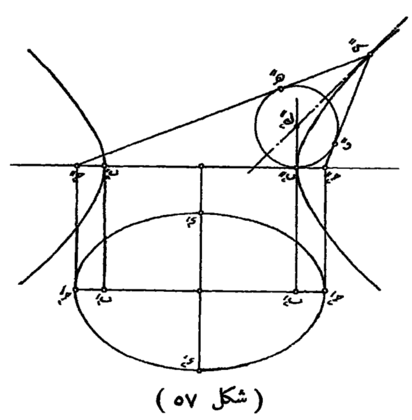
النتيجة الخامسة

يوجد عدد لانهاية له من المخاريط الدورانية التى يقطعها مستو معين فى مقطع مخروطى معلوم واقع فى المستوى .

فاذا فرضنا فى (شكل ٥٧) أن المقطع المخروطى المعلوم هو قطع ناقص واقع فى المستوى الافقى $\Pi_١$ فان أحد هذه المخاريط الدورانية يمكن الحصول عليه برسم كرة حيثما اتفق تمس المستوى الافقى $\Pi_١$ فى إحدى بؤرتى القطع الناقص المعلوم — ولتكن $ب_٢$ — ويقطعها المستوى الرأسى $\Pi_٢$ المار بالمحور الاكبر $ح_١ح_٢$ للقطع الناقص فى دائرة عظمى تمس $ح_١''ح_٢''$ فى المسقط الرأسى $ب_٢''$ للبؤرة — ثم رسم مماسين لهذه الدائرة العظمى من $ح_١''$، $ح_٢''$ يتقابلان فى $س''$. فالمخروط الذى رأسه س والذى يقطعه المستوى الرأسى $\Pi_٢$ فى الراسمين $س''ح_٢''$، $س''ح_١''$ هو مخروط دورانى يقطعه المستوى الافقى $\Pi_١$ بناء على نظرية دندلان فى القطع الناقص المعلوم.

ومن السهل البرهنة على أن المحل الهندسى لرأس المخروط الدورانى المشار

اليه هو قطع زائد واقع فى المستوى $II_٢$ المار بالمحور الاكبر للقطع الناقص عمودياً على المستوى $II_١$ المرسوم فيه القطع الناقص وأن رأسى القطع الزائد وبؤرتيه هما على التوالى بؤرتا ورأسا القطع الناقص المعلوم [١]. فكل مقطع مخروطى معلوم يمكن لهذا السبب اعتباره مسقطاً مركزياً لعدد لا نهاية له من الدوائر التى يمكن الحصول عليها بقطع هذه المخاريط الدورانية بمستويات عمودية على محاورها .



(شكل ٥٧)

واذا كان المقطع المخروطى المعلوم قطعاً زائداً فالمحل الهندسى لرأس المخروط الدورانى فى هذه الحالة هو قطع ناقص واقع فى المستوى المار بالمحور القاطع عمودياً على مستوى القطع الزائد ورأساه (الواقعتان على المحور الاكبر) وبؤرتاه هما على التوالى بؤرتا ورأسا القطع الزائد .

---

(١) لان س″حـ١″ – س″حـ٢″ = هـ″حـ١″ – و″حـ٢″
= حـ١″ب١″ – حـ٢″ب٢″
= ب١″ب٢″ = مقداراً ثابتاً .

أما اذا كان المقطع المخروطى المعلوم قطعاً مكافئاً فالمحل الهندسى لرأس المخروط الدورانى يكون فى هذه الحالة قطعاً مكافئاً أيضاً واقعا فى المستوى المار بالمحور عمودياً على مستوى القطع المكافىء المعلوم ورأسه وبؤرته هما على التوالى بؤرة ورأس القطع المكافىء المعلوم .

النتيجة السادسة

اذا علم مخروط دورانى فانه من الممكن دائماً تطبيق أى قطع ناقص أو مكافىء معلوم على سطحه أى ايجاد مستو يقطع المخروط فى قطع ناقص (أو مكافىء) ينطبق تمام الانطباق على قطع ناقص (أومكافىء) معلوم . أما اذا كان المعلوم قطعاً زائداً فان هذا لا يتيسر الا اذا كانت $\alpha \leqq \omega$ حيث α هى نصف زاوية رأس المخروط المعلوم ، ω هى زاوية ميل كل من المستقيمين التقريبين على المحور القاطع .

النتيجة السابعة : التعريف العام للمقاطع المخروطية

اذا فرضنا فى (شكل ١٥٦) أن المستوى القاطع Σ يقابل مستويى دائرتى التماس ع ع$_١$ ، هـ هـ$_١$ بين الكرتين ك$_١$ ، ك$_٢$ وبين المخروط فى المستقيمين $\lambda_١$ ، $\lambda_٢$ العموديين على المستوى الرأسى $\Pi_٢$ (حيث مسقطاهما فى الشكل هما النقطتان $\lambda''_١$ ، $\lambda''_٢$) واذا رمزنا لبعدى أية نقطة مثل ە على منحنى التقاطع عن هذين المستقيمين بالرمزين $\overline{ە\lambda}_١$ ، $\overline{ە\lambda}_٢$ فان هذين البعدين يظهران بحقيقتهما فى المسقط أى يساويان ە$''\lambda''_١$ ، ە$''\lambda''_٢$ على التوالى . ولما كان

$$ە ب_٢ = ە س = و هـ$$

$$\therefore \frac{ە ب_٢}{ە \lambda_٢} = \frac{و هـ}{ە'' \lambda''_٢} = \frac{ح_١ هـ}{ح_١ \lambda''_٢} = \frac{\text{جتا } \beta}{\text{جتا } \alpha} = \text{مقداراً ثابتاً}$$

وواضح أن هذا المقدار الثابت لا يتوقف الا على الزاويتين β ، α فهو أصغر من أو يساوى أو أكبر من الواحد الصحيح على حسب ما اذا كانت β أكبر من أو تساوى أو أصغر من α على التوالى .

ويمكن تلخيص هذه النتيجة فى التعريف الآتى للمقاطع المخروطية جميعاً :—

المقطع المخروطى هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى المستوى بحيث تكون نسبة بعدها عن نقطة ثابتة (البؤرة) الى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) مساوية على الدوام مقداراً ثابتاً يسمى الاختلاف المركزى .

ويكون الاختلاف المركزى $\gtreqless 1$ على حسب كون المقطع المخروطى قطعاً ناقصاً أو مكافئاً أو زائداً على التوالى [1].

---

(١) فى حالة الدائرة تنطبق البؤرتان عند مركز الدائرة و يبعد الدليل الى مالا نهاية وبذلك يؤول الاختلاف المركزى الى الصفر .

الفصل الثالث

النسب المضاعفة والتقسيم التوافقي

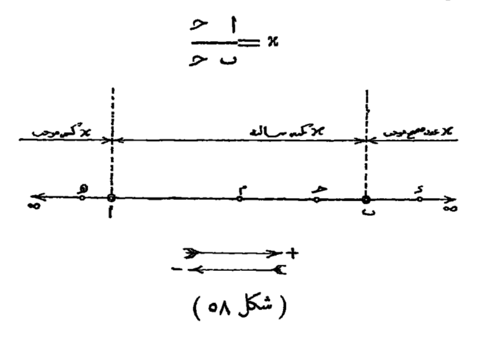
الخواص القطبية للدائرة والمقاطع المخروطيـة

بند ٥٢ : تمهيد — النسبة البسيطة لثلاث نقط أو نسبة التقسيم

(١) تعريف

لتكن ا، ب، ح ثلاث نقط على استقامة واحدة (شكل ٥٨) . فاذا فرضنا أن النقطتين ا، ب ثابتتان وأن النقطة ح تتحرك على المستقيم ا ب وامتداده فى جهتيه واذا فرضنا أن الاتجاه الموجب هو الاتجاه من ا إلى ب المبين بالسهم وأطلقنا على النسبة :

$$x = \frac{\text{ا ح}}{\text{ب ح}}$$



(شكل ٥٨)

لأى وضع من أوضاع ح اسم النسبة البسيطة أو نسبة التقسيم للنقط الثلاث ا، ب، ح وأطلقنا على النقطتين الثابتتين ا، ب اسم النقطتين الاساسيتين وعلى النقطة ح اسم نقطة التقسيم — فانه يؤخذ من ذلك أن بين النسبة x والنقطة ح مناظرة الفرد للفرد بمعنى أنه اذا علمت النقطتان الاساسيتان ا، ب فيكفى أن

تعلم $\varkappa$ (مصحوبه بالاشارة الموجـبة أو السالبة) ليتحدد وضع نقطة التقسيم حـ تمام التحديد وبالعكس أو بتعبير آخر أن كل نقطة مثل حـ تقسم المسافة الثابتة المعلومة ا ب بنسبة بسيطة واحدة وأن ما يقابل نسبة معينة $\varkappa$ هو نقطة واحدة فقط مثل حـ تقع على ا ب الممتد من جهتيه الى ما لا نهاية وتقسمه فى النسبة المعينة $\varkappa$. فمثلا فى (شكل ٥٨) لما كان احـ = ٤ سم وكان حـب = ١ سم فان النسبة البسيطة :

$$\varkappa = \frac{ا حـ}{ب حـ} = \frac{+ ٤}{- ١} = - ٤ \text{ }^{(1)} .$$

(ب) الاوضاع المختلفة للنقطة حـ وقيم $\varkappa$ التى تناظرها

اذا انطبقت حـ على ا فمن الواضح أن $\varkappa$ = صفر . واذا أخذت حـ أى وضع بين ا ، ب فان $\varkappa$ تكون سالبة وتساوى - ١ اذا انطبقت حـ على م حيث م منتصف ا ب . واذا أخذت نقطة التقسيم أى وضع الى يمين ب مثل ى فان $\varkappa = \frac{ا ى}{ب ى}$ = كمية موجبة اكبر من الواحد الصحيح واذا أخذت أى وضع الى يسار ا مثل هـ فان $\varkappa = \frac{ا هـ}{ب هـ}$ = كمية موجبة أيضاً ولكنها أصغر من الواحد الصحيح . وقبل أن تنطبق نقطة التقسيم مباشرة على ب آتية من ا تكون $\varkappa$ = مقداراً سالباً كبيراً يؤول الى $-\infty$ عند انطباقها على ب فاذا جاوزتها قليلا انتقلت $\varkappa$ فجأة الى $+\infty$ ومعنى هذا أن الدالة غير متصلة عند النقطة ب .

---

(١) يلاحظ أن قيمة $\varkappa$ الجبرية للنقطة « الاخرى » التى تقسم البعد ا ب من « الخارج » بالنسبة ٤ أيضاً هى + ٤ وليس - ٤ .

اذا تقرر هذا فنحن نتساءل ما هى النهاية التى تؤول اليها x عند ما تتحرك نقطة التقسيم الى يمين ب أو الى يسار ا مبتعدة بعداً لا نهائياً ؟

نأخذ أولا الحالة الاولى ونفرض أن نقطة التقسيم قد اتخذت وضعاً اختيارياً الى يمين ب مثل ى فان

$$x = \frac{\text{اى}}{\text{بى}} = \frac{\text{اب} + \text{بى}}{\text{بى}} = \frac{\text{اب}}{\text{بى}} + 1$$

ولكن $$\lim_{\text{ى} \to \infty} \frac{\text{اب}}{\text{بى}} = \text{صفر}$$

$$\therefore \lim_{\text{ى} \to \infty} x = \lim_{\text{ى} \to \infty} \frac{\text{اى}}{\text{بى}} = +1$$

ومعنى هذا أن النهاية التى تؤول اليها x عند ما تتحرك نقطة التقسيم الى يمين ب مبتعدة بعداً لا نهائياً هى $+1$ وبالمثل نستطيع أن نبرهن على أن هذه هى النهاية نفسها للنسبة x اذا تحركت نقطة التقسيم الى يسار ا نحو اللانهاية .

$\therefore x = +1$ تحدد النقطة التى فى اللانهاية للمستقيم اب .

(ح) النسبة البسيطة تبقى ثابتة بعد الاسقاط المتوازى ولكنها تتغير بالاسقاط المركزى

البرهان على هذه النظرية ينتج مباشرة من (شكل ٥٩) إذ يتضح من (شكل ٥٩ ا) أن

$$\frac{\text{اح}}{\text{بح}} = \frac{\text{اح}_1}{\text{بح}_1} = \frac{\text{ا}'\text{ح}'}{\text{ب}'\text{ح}'}$$

حيث $\text{اح}_1\text{ب}_1$ مستقيم مار بالنقطة ا موازياً للمسقط $\text{ا}'\text{ح}'\text{ب}'$ كما يتضح من

(شكل ٥٩ ب) أن النسبة $\frac{ا ح}{ب ح}$ لا يمكن أن تساوى النسبة $\frac{ا' ح'}{ب' ح'}$ (إلا اذا ا'ب' يوازى ا ب) .

(ا) (ب)

(شكل ٥٩)

(ى) النتيجة

سبق لنا القول (بند ٥١) إن المقاطع المخروطية يمكن الحصول عليها باسقاط الدائرة إسقاطاً مركزياً والآن برهنا على أن النسبة البسيطة لثلاث نقط تتغير بالاسقاط المركزى فينتج من ذلك أنه للحصول على الخواص الاسقاطية للمقاطع المخروطية (المستنتجة من خواص الدائرة) لابد من البحث عن نسبة أخرى لا تتغير بالاسقاط المركزى وهذه النسبة هى النسبة المضاعفة كما سنبينه فى البند التالى .

بند ٥٣ : النسبة المضاعفة

(ا) تعريف النسبة المضاعفة لاربع نقط على مستقيم

لنفرض فى (شكل ٦٠) أن ا ، ب نقطتان ثابتتان (أساسيتان) وأن ح ، ى نقطتا تقسيم حيث ا ، ب ، ح ، ى على استقامه واحدة أى أربع نقط من مجموعة النقط التى تؤلف ما يسمى بصف النقط على المستقيم ا ب .

فتكون النسبة البسيطة للنقط الثلاث ا ، ب ، ح (بند ٥٢) هى :

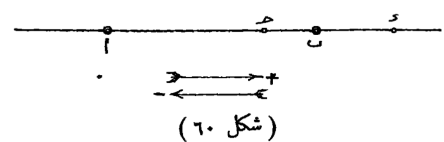
$$\varkappa_1 = \frac{\text{ا حـ}}{\text{ب حـ}}$$

وتكون النسبة البسيطة للنقط الثلاث ا ، ب ، ى هى :

$$\varkappa_2 = \frac{\text{ا ى}}{\text{ب ى}}$$

ويسمى خارج قسمة هاتين النسبتين :

$$\psi = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} = \frac{\text{ا حـ}}{\text{ب حـ}} : \frac{\text{ا ى}}{\text{ب ى}} = (\text{ا ب حـ ى})$$



(شكل ٦٠)

بالنسبة المضاعفة للنقط الاربع ا ، ب ، حـ ، ى

فالاصطلاح (ا ب حـ ى) يعبر إذن عن النسبة المضاعفة للنقط الاربع ويؤخذ منه :

أولا : أن ا ، ب هما النقطتان الاساسيتان

ثانياً : أن الاتجاه الموجب هو من ا إلى ب

ثالثاً : أن حـ هى نقطة التقسيم الاولى وأن ى نقطة التقسيم الثانية

رابعاً: أن (ا ب حـ ى) = $\frac{\text{النسبة البسيطة للنقط الثلاث ا ، ب ، حـ}}{\text{النسبة البسيطة للنقط الثلاث ا ، ب ، ى}}$

ويتضح مما تقدم أن ترتيب الحروف ضرورى لمعرفة قيمة النسبة المضاعفة لاربع نقط معلومة فمثلا (ا ب حـ ى) لاتساوى (ب ا حـ ى) وكذلك (ا ب حـ ى)

لاتساوى (ا ب ء حـ) وطبيعى أن (ا ب ء حـ) لاتساوى أيضاً (ا حـ ب ء) ولكن:

(ا ب حـ ء) = (ب ا ء حـ) = (حـ ء ا ب) = (ء حـ ب ا)

ومعنى هذا أن النسبة المضاعفة لاربع نقط تتغير قيمتها اذا غيرنا اثنتين من النقط بحيث تحل كل منهما محل الاخرى و ثبتنا فى الوقت نفسه النقطتين الباقيتين وتتغير أيضا اذا حلت إحدى نقطتى التقسيم محل نقطة أساسية فى حين أننا اذا أجرينا عملية التغيير هذه على النقط الاربع جميعا مأخوذة مثنى (أى مع جعل النقطتين الاساسيتين إما ا ، ب أو حـ ، ء) فان قيمة النسبة المضاعفة لا تتغير[1].

(ب) بعض الاوضاع الخاصة لنقطتى التقسيم وقيم ψ التى تقابلها

أولا : متى تكون $\psi = +1$ ؟ اذا كانت $x_1 = x_2$ وهذا لا يتأتى الا اذا انطبقت نقطتا التقسيم وفى هذه الحالة تؤول النسبة المضاعفة لاربع نقط الى نسبة بسيطة لثلاث نقط مقسومة على نفسها .

ثانياً : متى تكون $\psi =$ صفراً؟ اذا انطبقت حـ وحدها على ا أو انطبقت ء وحدها على ب وفى كلتا الحالتين تؤول النقط الاربع الى ثلاث .

ثالثاً : متى تكون $\psi =$ مقداراً موجباً ؟ اذا كانت كلتا النسبتين البسيطتين متحدتى الاشارة لذلك يجب أن تكون نقطتا التقسيم إما بين ا ، ب معاً أو خارج المسافة ا ب معاً .

رابعاً : متى تكون $\psi =$ مقداراً سالباً ؟ اذا كانت إحدى النسبتين البسيطتين موجبة والاخرى سالبة ففى هذه الحالة تكون إحدى نقطتى التقسيم بين ا ، ب وتكون الاخرى إما الى يمين ب أو الى يسار ا .

(١) يمكن كتابة ٢٤ صورة للنسبة المضاعفة لاربع نقط ولكن لما كان كل أربع من هذه الصور متساوية القيمة فهناك إذن ٦ قيم مختلفة فقط للنسبة المضاعفة لاربع نقط .

وهذه الحالة الاخيرة تدعونا الى التفكير فى حالة خاصة ونعنى بها الحالة التى تكون فيها $م_١ = - م_٢$. ففى هذه الحالة الخاصة تكون $\psi = -١$ ويطلق على النسبة المضاعفة حينئذ اسم النسبة التوافقية .

(حـ) التقسيم التوافقى

اذا كانت ا، ب، حـ، ى أربع نقط على استقامة واحدة وكانت النسبة المضاعفة لها $\psi = ($ا ب حـ ى$) = -١$ فمعنى ذلك أن إحدى نقطتى التقسيم تقسم المسافة ا ب من الداخل بنفس النسبة العددية التى تقسم بها نقطة التقسيم الاخرى نفس المسافة من الخارج ويطلق على النسبة المضاعفة فى هذه الحالة اسم النسبة التوافقية كما تقدم .

ونبرهن الآن على النظرية الآتية :

اذا كانت (ا ب حـ ى) $= \psi =$ (ب ا حـ ى)

فان $\psi = -١$

أى أن النسبة المضاعفة تكون فى هذه الحالة توافقية .

البرهان :

$$\because (\text{ا ب حـ ى}) = \frac{\text{ا حـ}}{\text{ب حـ}} : \frac{\text{ا ى}}{\text{ب ى}} = \psi$$

$$\text{،} \because (\text{ب ا حـ ى}) = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ا حـ}} : \frac{\text{ب ى}}{\text{ا ى}} = \frac{١}{\psi}$$

وحيث إن $\psi = \frac{١}{\psi}$ فرضاً

$$\therefore \psi^٢ = ١$$

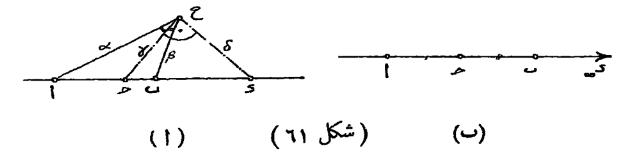
$\therefore \psi = -١$ (لأن $\psi = +١$ لا معنى له).

ويتضح من هذه النظرية أنه فى هذه الحالة الخاصة تكون (ا ب حـ ى) = (ب ا حـ ى) = (ا ب ى حـ) = ... أى أن جميع الصور الممكن كتابتها للنسبة التوافقية لاربع نقط ا ، ب ، حـ ، ى مع جعل النقطتين الأساسيتين إما ا ، ب أو حـ ، ى تكون كلها متساوية القيمة وتساوى — ١ .

وكذا يتضح فى حالة اعتبار حـ ، ى النقطتين الاساسيتين أن ب ، ا تقسمان المسافة حـ ى بنفس النسبة من الداخل والخارج .

ولذلك يقال إن النقطتين حـ ، ى تقسمان المسافة ا ب تقسيماً توافقياً وإن النقطتين ا ، ب تقسمان المسافة حـ ى فى نفس الوقت تقسيما توافقياً أيضاً ويقال كذلك ان حـ ، ى مترافقتان توافقياً بالنسبة الى ا ، ب وبالعكس .

والامثلة كثيرة على هـــذا التقسيم التوافقى فمثلا اذا كان ع حـ ، ع ى هما المنصفان الداخلى والخارجى للزاوية ب ع ا (شكل ٦١ ا) كانت النسبة



(ا) (شكل ٦١) (ب)

(ا ب حـ ى) = — ١ أى نسبة توافقـــية وكانت حـ ، ى مترافقتين توافقياً بالنسبة الى ا ، ب وبالعكس .

كذلك اذا كانت حـ منتصف ا ب وكانت ى هى النقطة التى فى اللانهاية للمستقيم ا ب (شكل ٦١ ب) فان

$$(\text{ا ب حـ ى}_\infty) = \frac{\text{ا حـ}}{\text{ب حـ}} : \frac{\text{ا ى}_\infty}{\text{ب ى}_\infty} = -1 : +1$$

= — ١ (راجع بند ٥٢ ب)

(ی) تعريف النسبة المضاعفة والنسبة التوافقية لاربعة مستقيمات متلاقية فى نقطة

اذا كانت α ؛ β ؛ γ ؛ δ أربعة مستقيمات فى المستوى مارة بنقطة واحدة ع أى أربعة من مجموعة المستقيمات فى المستوى المؤلفة لما يسمى *بحزمة المستقيمات* المتلاقية فى النقطة ع التى يطلق عليها اسم *رأس الحزمة* — واعتبرنا α ؛ β مستقيمين ثابتين (أساسيين) فانه يمكن تعريف النسبة المضاعفة لهذه المستقيمات الاربعة (أنظر شكل ٦٢) :

$$(\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta) = \frac{\text{جا}\ \alpha\hat{\ }\gamma}{\text{جا}\ \beta\hat{\ }\gamma} : \frac{\text{جا}\ \alpha\hat{\ }\delta}{\text{جا}\ \beta\hat{\ }\delta} \qquad (1)$$

فاذا كانت هذه النسبة تساوى — ١ سميت *نسبة توافقية* (شكل ٦١ ا) .

(هـ) النسبة المضاعفة لاربع نقط على استقامة واحدة تساوى نظيرتها للمستقيمات الاربعة التى تصل هذه النقط بأية نقطة خارجية ع .

البرهان :

اذا رمزنا للمستقيمات الاربعة التى تصل النقطة الخارجة ع بالنقط الاربع المعلومة ا ؛ ب ؛ حـ ؛ ی بالحروف α ؛ β ؛ γ ؛ δ على التوالى (شكل ٦٢) فانه يراد البرهنة على أن

---

(١) ما يقابل هذا فى النسبة البسيطة هو النسبة البسيطة لثلاثة مستقيمات التى يمكن تعريفها : $(\alpha\ \beta\ \gamma) = \dfrac{\text{جا}\ \alpha\hat{\ }\gamma}{\text{جا}\ \beta\hat{\ }\gamma}$.

ويلاحظ أن تكون قراءة الحروف اليونانية فى جميع النسب للمستقيمات والمستويات (أنظر الفقرة ٢ م) — من اليمين الى اليسار . كما يلاحظ أن يكون الاتجاه الموجب للزوايا (المرموز اليها بالعلامة « ^ ») كما هو مبين فى (شكل ٦٢) .

$$(\text{ا ب حـ ء}) = (\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta)$$

∵ $\frac{\text{ا حـ}}{\text{ع حـ}} = \frac{\text{جا}\ \alpha\hat{}\gamma}{\text{جا ا}}$ ، $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ع حـ}} = \frac{\text{جا}\ \beta\hat{}\gamma}{\text{جا ب}}$ فبقسمة المعادلتين ينتج أن

$$\frac{\text{ا حـ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{جا}\ \alpha\hat{}\gamma}{\text{جا}\ \beta\hat{}\gamma} \times \frac{\text{جا ب}}{\text{جا ا}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (١)$$

وبالمثل ∵ $\frac{\text{ا ء}}{\text{ع ء}} = \frac{\text{جا}\ \alpha\hat{}\delta}{\text{جا ا}}$ ، $\frac{\text{ب ء}}{\text{ع ء}} = \frac{\text{جا}\ \beta\hat{}\delta}{\text{جا ب}}$ فبقسمة المعادلتين ينتج أن

$$\frac{\text{ا ء}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{جا}\ \alpha\hat{}\delta}{\text{جا}\ \beta\hat{}\delta} \times \frac{\text{جا ب}}{\text{جا ا}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (٢)$$

وبقسمة المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن

$$\frac{\text{ا حـ}}{\text{ب حـ}} : \frac{\text{ا ء}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{جا}\ \alpha\hat{}\gamma}{\text{جا}\ \beta\hat{}\gamma} : \frac{\text{جا}\ \alpha\hat{}\delta}{\text{جا}\ \beta\hat{}\delta}$$

أى أن $(\text{ا ب حـ ء}) = (\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta)$ وهو المطلوب.

وعكس هذه النظرية الاساسية وهو :

النسبة المضاعفة لاربعة مستقيمات فى حزمة تساوى النسبة المضاعفة للنقط الاربع التى يمكن الحصول عليها بقطع الحزمة بمستقيم حيثما اتفق يمكن اعتباره تعريفاً للنسبة المضاعفة لاربعة مستقيمات فى المستوى متلاقية فى نقطة .

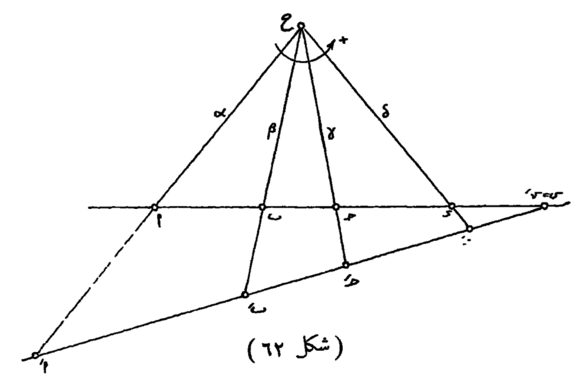
والذى يفهم من التعبير ع (ا ب حـ ء) هو النسبة المضاعفة للمستقيمات الاربعة التى يمكن الحصول عليها بتوصيل النقط ا ، ب ، حـ ، ء فى صف ما بالنقطة ع .

(و) النسبة المضاعفة لا تتغير بالاسقاط مركزياً كان أو متوازياً

يمكن اعتبار هذه النظرية المعروفة باسم نظرية « بابيس »[1] نتيجة مباشرة للنظرية السابقة لاننا اذا فرضنا فى (شكل ٦٢) أن ا′ ، ب′ ، حـ′ ، ى′ هى المساقط المركزية من ع للنقط ا ، ب ، حـ ، ى (حيث يمثل مستوى الورقة المستوى المرسوم فيه كلا الصفين) فان

(ا ب حـ ى) = ($\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$) وكذلك (ا′ ب′ حـ′ ى′) = ($\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$)

∴ (ا ب حـ ى) = (ا′ ب′ حـ′ ى′) وهو المطلوب .



(شكل ٦٢)

واذا اعتبرنا حزمتين من المستقيمات إحداهما المسقط المركزى للاخرى فانه ينتج مما تقدم أن

ع (ا ب حـ ى) = ع′ (ا′ ب′ حـ′ ى′)

أى أن النسبة المضاعفة لاربعة مستقيمات من حزمة تساوى نظيرتها لمساقط هذه المستقيمات المركزية .

(١) Pappus

وأما أن النسبة المضاعفة لا تتغير كذلك بالاسقاط المتوازى فظاهر من كون هذا الاسقاط حالة خاصة من الاسقاط المركزى.

(ر) النسبة المضاعفة لاربعة مستويات فى حزمة

اذا كانت المستويات A ، B ، Γ ، Δ أربعة مستويات مارة بمستقيم واحد أى أربعة من مجموعة المستويات فى الفضاء المؤلفة لما يسمى *بحزمة المستويات* المارة بالمستقيم المذكور الذى يطلق عليه اسم *حامل الحزمة* — واعتبرنا المستويين A ، B مستويين ثابتين (أساسيين) فانه يمكن تعريف النسبة المضاعفة لهذه المستويات الاربعه :

$$(A\,B\,\Gamma\,\Delta) = \frac{\text{جا}\,\hat{A\,\Gamma}}{\text{جا}\,\hat{B\,\Gamma}} : \frac{\text{جا}\,\hat{A\,\Delta}}{\text{جا}\,\hat{B\,\Delta}}$$

فهذه النسبة تساوى إذن النسبة المضاعفة للمستقيمات الاربعة التى يمكن الحصول عليها بقطع هذه المستويات بمستو عمودى عليها وتساوى أيضاً النسبة المضاعفة للنقط الاربع التى يمكن الحصول عليها بقطع المستقيمات الاربعة المشار اليها بمستقيم حيثما اتفق فى المستوى العمودى . فاذا وصلنا هذه النقط الاربع بنقطة جديدة على حامل الحزمة بحيث نحصل على أربعة مستقيمات جديدة فى مستو جديد (غير عمودى) ثم قطعنا هذه المستقيمات الاخيرة بقاطع فى مستويها فمن الواضح أن النسبة المضاعفة للنقط الاربع على هذا القاطع تكون مساوية للنسبة المضاعفة للنقط الاربع الواقعة فى المستوى العمودى ومساوية بالتالى للنسبة المضاعفة للمستويات الاربعة .

ينتج مما تقدم أنه اذا قطع المستويات A ، B ، Γ ، Δ مستقيم حيثما اتفق فى النقط ا ، ب ، حـ ، ى فان

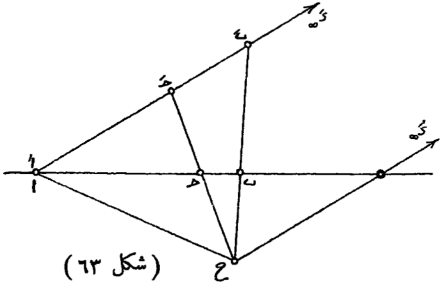
$$(A\,B\,\Gamma\,\Delta) = (\text{ا ب حـ ى})$$

وهو ما يمكن اعتباره تعريفاً للنسبة المضاعفة لاربعة مستويات فى حزمة واحدة .

(ح) اذا علمت فى صف ثلاث نقط ا ، ب ، حـ فالمطلوب ايجاد النقطة الرابعة ى التى تجعل (ا ب حـ ى) = مقداراً معلوماً

فى (شكل ٦٣) النقط المعلومة هى ا،ب،حـ فاذا رمزنا الى المقدار المعلوم بالرمز ع ورمزنا الى النسبة البسيطة المعلومة للنقط الثلاث ا،ب،حـ بالرمز x_1 والى النسبة البسيطة الاخرى (المجهولة) للنقط ا،ب،ى بالرمز x_2 فانه لا يوجد سوى نقطة واحدة مثل ى تجعل (ا ب حـ ى) = ع لأنه لما كانت

ع $= \frac{x_1}{x_2}$ فان $x_2 = \frac{x_1}{ع}$ = مقداراً معينا وقد بينا فيما تقدم (بند ٥٢) أن ليس هناك سوى نقطة واحدة تقسم بعداً معلوما بنسبة معينة .



(شكل ٦٣)

وللحصول على النقطة ى نرسم مستقيما حيثما اتفق ماراً بالنقطة ا ونأخذ عليه نقطتين مثل ب′، حـ′ بحيث تكون النسبة البسيطة $\frac{ا′حـ′}{ب′حـ′}$ = ع ثم نصل ب ب′ ، حـ حـ′ ليتقابلا فى ح ثم نرسم من ح موازيا للمستقيم ب′حـ′ فيقطع حامل الصف ا ب حـ فى النقطة المطلوبة ى (ولم تسم سهواً فى الشكل) لأن :

$$(\text{ا ب حـ ى}) = (\text{ا′ ب′ حـ′ ى′}_\infty) = \frac{\text{ا′حـ′}}{\text{ب′حـ′}} : \frac{\text{ا′ى′}_\infty}{\text{ب′ى′}_\infty} = ع : ١ = ع$$

واذا كان المعلوم ثلاثة مستقيمات α ، β ، γ فى حزمة رأسها ع ويراد ايجاد المستقيم الرابع δ الذى يجعل $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ = مقداراً معلوما فيؤخذ أى مستقيم قاطع ليقابل المستقيمات المعلومة فى النقط ١، ب، حـ ثم نجد على هذا القاطع النقطة ء التى تجعل (١ ب حـ ء) = المقدار المعلوم ونصل ع ء فيكون هو المستقيم المطلوب δ .

واذا كان المقدار المعلوم ع الذى يجب أن تساويه النسبة المضاعفة للنقط الاربع = — ١ فان رأس المسألة يؤول الى الآتى :

اذا علمت ثلاث نقط ١ ، ب ، حـ فى صف فالمطلوب ايجاد النقطة التوافقية الرابعة ء أو ايجاد النقطة ء التى ترافق حـ توافقياً بالنسبة الى ١ ، ب .

وغنى عن البيان أن طريقة تعيين النقطة ء فى هذه الحالة لا تختلف عنها فى الحالة العامة بل هى أبسط (فى هذه الحالة تؤخذ النقطتان ب′ ، حـ′ فى شكل ٦٣ بحيث تكون النسبة $\frac{١'\,حـ'}{ب'\,حـ'}$ = — ١ أى بحيث تكون حـ′ منتصف ١′ ب′)

ولهذا السبب توجد طرق عديدة أخرى لتعيين النقطة التوافقية الرابعة لثلاث نقط معلومة ولكننا سنقتصر على ذكر الطريقة الآتية لاهميتها .

(ط) تعيين النقطة التوافقية الرابعة لثلاث نقط معلومة بواسطة ما يسمى بالشكل الرباعى التام

تعريف : الشكل الرباعى التام هو الشكل الذى يتألف من أربع نقط ١ ، ب ، ك ، ل فى المستوى (شكل ٦٤) يصلها بعضها البعض مستقيمات ستة . وتسمى النقط الاربع *رؤوس الشكل الرباعى التام* كما تسمى المستقيمات الستة *أضلاعه* ويقال لكل ضلعين لا يشتركان فى رأس واحدة مثل ١ ب ، ل ك أو ب ل ، ١ ك أو ب ك ، ١ ل إنهما *ضلعان متقابلان* . وكل ضلعين متقابلين

يتقاطعان فى نقطة واحدة تسمى رأس قطرية . فالشكل الرباعى التام له إذن ثلاث رؤوس قطرية ى ، هـ ، و ويطلق على المثلث ى هـ و لذلك اسم المثلث القطرى [1]

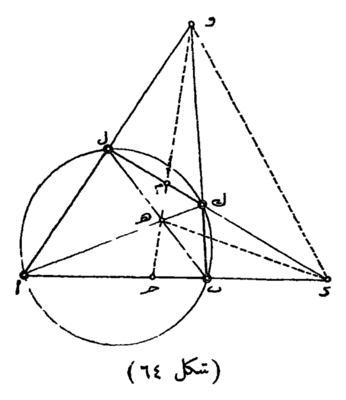
و نبرهن فيما يلى على أن النسبة (ا ب حـ ى) = — ١ :

(ا ب حـ ى) = و (ا ب حـ ى) = (ل ك م ى) = هـ (ل ك م ى)

= (ب ا حـ ى)

= — ١ (أنظر الفقره حـ)

وبنفس الطريقة نستطيع أن نبرهن على أن النقطة التوافقية الرابعة للنقط ا ، ل ، و هى نقطة تقاطع ا ل مع الضلع ى هـ فى المثلث القطرى وبالمثل لجميع الأضلاع الباقية . ويمكن تلخيص هذه الخاصة التوافقية للشكل الرباعى التام فى النظرية الاساسية الآتية :



(شكل ٦٤)

كل ضلع من أضلاع شكل رباعى تام يمكن اعتباره حاملا لصف توافقى من النقط حيث يترافق رأسا الشكل توافقيا مع الرأس القطرية التى يمر بها الحامل ونقطة تقاطع هذا الحامل مع المستقيم الذى يصل الرأسين القطريتين الباقيتين .

---

(١) غنى عن البيان أن الرؤوس ا ، ب ، ك ، ل لا يشترط فيها أن تكون واقعة على محيط دائرة وإنما فرضت كذلك فى (شكل ٦٤) ليتيسر استخدام الشكل فى شرح النظرية الثانية من (بند ٥٤ ب) .

واذا استخدمنا حزم المستقيمات التوافقية التى رؤوسها ء ، ه ، وأمكن وضع هذه النظرية فى الصورة الآتية :

أى ضلعين من أضلاع المثلث القطرى فى شكل رباعى تام يكونان مترافقين توافقياً بالنسبة لضلعى الشكل الرباعى التام المتقابلين معهما فى رأس قطرية واحدة . فاذا قطع الحزمة قاطع حصلنا على صف توافقى من النقط .

فاذا علمت ثلاث نقط ا ، ب ، حـ (شكل ٦٤) فانه يمكن استخدام هذه النظرية فى تعيين النقطة ء التى ترافق حـ توافقيا بالنسبة الى ا ، ب فنرسم لذلك شكلا رباعيا تاما بأن نصل ا ، ب ، حـ بنقطة ما مثل و ثم نرسم من ب مثلا مستقيما حيثما اتفق بقطع و ا ، و حـ فى ل ، ه ثم نصل ا ه فيقابل و ب فى ك فالمستقيم ل ك (أو امتداده) يقابل ا ب فى النقطة المطلوبة ء . وهذه طريقة بسيطة لتعيين النقطة التوافقية الرابعة كما يرى وتمتاز على جميع الطرق الأخرى بأنه يمكن الاستغناء معها عن استعمال البرجل .

بند ٥٤ : الخواص القطبية للدائرة

(ا) تعاريف

اذا وصلت النقطة ا الواقعة فى مستوى الدائرة المبينة فى (شكل ٦٥) بالمركز م وتقاطع المستقيم ا م مع الدائرة فى حـ ، ء ثم وجدت النقطة ب التى ترافق ا توافقيا بالنسبة الى حـ ، ء ورسم من ب العمود a على ا م فان a يسمى الخط القطبى للنقطة ا بالنسبة الى الدائرة .

وبالعكس اذا فرض مستقيم a فى مستوى الدائرة وأنزل من م عمود عليه يقابله فى النقطة ب ويقطع الدائرة فى حـ ، ء فالنقطة ا التى ترافق ب توافقياً النسبة الى حـ ، ء تسمى قطب المستقيم a بالنسبة الى الدائرة .

(ب) نظريات أساسية

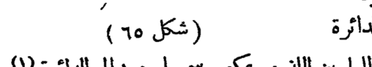
النظرية الأولى : اذا رسم من ا مستقيم حيثما اتفق يقطع الدائرة فى حـ١ ، ى١ فالنقطة ب١ التى ترافق ا توافقياً بالنسبة حـ١ ، ى١ تقع على الخط القطبى α للنقطة ا بالنسبة الى الدائرة .

[البرهان: بما أن (ا ب حـ ى) = −١ والزاوية حـ ى١ ى قائمة ∴ $\hat{١} = \hat{٢}$ ويكون القوس حـ حـ١ = القوس حـ حـ٢ ∴ $\hat{٣} = \hat{٤}$ وبما أن الزاوية ا ب ب١ قائمة ∴ ب ب١ ، ب ا هما المنصفان الداخلى والخارجى للزاوية حـ١ ب ى١ ∴ (ا ب١ ، حـ١ ى١) = −١] .

نتيجة ١ — الخط القطبى α لنقطة ما مثل ا بالنسبة للدائرة هو المحل الهندسى للنقطة التى ترافق ا توافقياً بالنسبة لنقطتى تقاطع أى مستقيم مار بها مع الدائرة .

ويمكن اعتبار هذه النتيجة الهامة تعريفاً للخط القطبى .

نتيجة ٢ — الخط القطبى لنقطة فى اللانهاية فى مستوى الدائرة هو مستقيم يمر بمركز الدائرة أى قطر من أقطارها . ويعتبر مركز الدائرة قطب المستقيم الذى فى اللانهاية فى مستوى الدائرة (بند ٦٥) .



(شكل ٦٥)

نتيجة ٣ — الخط القطبى α لنقطة خارجية مثل ا بالنسبة للدائرة يصل نقطتى التماس س ، ص للمماسين اللذين يمكن رسمهما من ا الى الدائرة (١) .

(١) تستخدم هذه النتيجة فى رسم الخط القطبى لنقطة خارجية وفى تعين قطب المستقيم اذا كان قاطعا للدائرة .

[لأن النقطة التوافقية الرابعة تنطبق لوضع القاطع النهائى عندما يصبح مماساً على نقطة التماس] .

نتيجة ٤ — اذا كانت (ا ب حـ ى) = — ١ حيث ا ، ب ، حـ ، ى أربع نقط حيثما اتفق على مستقيم واحـــد وكانت م منتصف حـ ى فان م ا . م ب = م حـ ٢ = م ى ٢ وبالعكس .

[لأن المستقيم α المرسوم من ب عمودياً على حامل الصف يكون الخط القطبي للنقطة ا بالنسبة الى الدائرة المرسومة على حـ ى (شكل ٦٥) . ولما كان المثلثان س م ا ، ب م س متشابهين ينتج أن $\frac{\text{س م}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م ا}}{\text{س م}}$ ∴ م ا . م ب = س م ٢ = م حـ ٢] .

<u>النظرية الثانية</u> : اذا مرت دائرة بالرؤوس الاربع لشكل رباعى تام (شكل ٦٤) كان كل ضلع من أضلاع المثلث القطرى هو الخط القطبي بالنسبة الى الدائرة للرأس القطرية المقابلة له . ويطلق لذلك على مثل هذا المثلث اسم المثلث القطبي .

[وهذه النظرية تنتج مباشرة من الخاصة التوافقية للشكل الرباعى التام التى برهناها فى (بند ٥٣ ط)] .

<u>النظرية الثالثة</u> : الخطوط القطبية لنقط مستقيم بالنسبة الى دائرة تمر جميعا بقطب المستقيم بالنسبة الى هذه الدائرة .

[البرهان : نفرض نقطة مثل ع على المستقيم α فى (شكل ٦٥) ونبرهن على أن الخط القطبي للنقطة ع بالنسبة للدائرة يمر بالنقطة ا التى هى قطب المستقيم α بالنسبة للدائرة . لذلك نرسم من ع قاطعا يقطع الدائرة فى هـ ، و ونصل ا هـ ، ا و اللذين يقطعان الدائرة فى ك ، ل ويقابلان α فى ى ، ى على التوالى . فمن حيث إن (ا ى ك هـ) = (ا ى ل و) = — ١ فينتج من ذلك أن ع ك ل مستقيم .

وبما أن ول،ك،هـ شكل رباعى تام مرسوم داخل الدائرة وفيه ع،ء،ا رأسان من رؤوس المثلث القطرى فبناء على النظرية الثانية لا بد أن يمر الخط القطبي للنقطة ع بالنقطة ا] .

نتيجة ١ — الخط القطبي لنقطة على الدائرة هو المماس فيها للدائرة .

نتيجة ٢ — اذا وقعت نقطة مثل ع على الخط القطبي α لنقطة مثل ا بالنسبة الى دائرة (شكل ٦٥) فان ا لا بد أن تقع على الخط القطبي للنقطة ع .

ويقال لمثل النقطتين ا،ع إنهما مترافقتان بالنسبة الى الدائرة .

نتيجة ٣ — اذا كان ا،ب قطبى مستقيمين مثل α ، β على التوالى بالنسبة الى دائرة ما ومر β بالنقطة ا فان α لا بد أن يمر بالنقطة ب . ويكون المستقيم اب الخط القطبي لنقطة تقاطع α ، β [1] .

ويقال لمثل المستقيمين α ، β إنهما مترافقان بالنسبة الى الدائرة . ويسميان قطرين مترافقين اذا كانا مارين بالمركز [2] .

بند ٥٥ : الخواص القطبية للمقاطع المخروطية

بما أن المقاطع المخروطية يمكن اعتبارها مساقط مركزية للدائرة (بند ٥١) وبما أن النسب المضاعفة والتوافقية لا تتغير بالاسقاط المركزى (بند ٥٣ و) ولما كانت النظريات الاساسية المذكورة فى البند السابق قائمة على أساس التقسيم التوافقى فبناء عليه يمكننا أن نقرر إن النظريات المذكورة فى (بند ٥٤ ب) تصدق بنتائجها على المقاطع المخروطية وذلك بوضع كلمة «مقطع مخروطى» بدلا من «دائرة» .

فالخط القطبي لنقطة ما بالنسبة الى مقطع مخروطى هو المحل الهندسى (خط مستقيم) للنقطة التى ترافقها توافقيا بالنسبة لنقطتى تقاطع أى مستقيم مار بها مع المقطع المخروطى .

---

(١) تستخدم هذه الحقيقة فى رسم الخط القطبي لنقطة داخل الدائرة وفى تعيين قطب المستقيم اذا كان غير قاطع للدائرة .

(٢) القطران المترافقان فى دائرة يكونان متعامدين .

ويقال للقطرين فى مقطع مخروطى إنهما مترافقان اذا مر كل منهما بقطب الآخر بالنسبة للمقطع المخروطى ولما كان قطب القطر هو نقطة فى اللانهاية فان القطرين المترافقين ينصف كلا منهما الاوتار الموازية للآخر .

والخط القطبى لبؤرة مقطع مخروطى هو دليله المناظر لهذه البؤرة ولذا يتقاطع المماسان فى نهايتى أى وتر بؤرى على الدليل .

الفصل الرابع

الائتلاف (العام) أو الائتلاف الاسقاطي

بند ٥٦ : تعريف

يقال لشكلين مستويين ش ، ش′ انهما مؤتلفان[١] اذا وجدت بين نقطهما ومستقيماتهما مناظرة الفرد للفرد أى اذا كانت كل نقطة فى الشكل الاول تناظرها نقطة واحدة فى الشكل الثانى وبالعكس وكذلك كل مستقيم فى الشكل الاول يناظره مستقيم فى الشكل الثانى وبالعكس (راجع بند ١١).

فاذا كان α ، α' مستقيمين متناظرين فى شكلين مستويين مؤتلفين وافترضنا نقطتين ثابتتين واحدة على α والاخرى على α' فانموضع أية نقطة ا على المستقيم α يتعين ببعدها س عن النقطة الثابتة على هذا المستقيم كما أن موضع النقطة المناظرة ا′ على α' يتعين ببعدها س′ عن النقطة الثابتة على المستقيم α'.

ولما كانت كل نقطة على المستقيم α بمقتضى التعريف السابق لها نقطة واحدة مناظرة على α' وبالعكس وجب أن كل قيمة للمتغير س تناظرها قيمة واحدة للمتغير س′ وبالعكس وإذن يتحتم أن يرتبط المتغيران س ، س′ بالعلاقة

$$\text{ك س س}' + \text{ل س} + \text{م س}' + \text{ﻫ} = \text{صفر}$$

(حيث ك ، ل ، م ، ﻫ ثوابت) التى تؤول الى صورة عامة لمعادلة من الدرجة الاولى لتعيين س اذا تعينت س′ وبالعكس.

---

(١) يلاحظ أننا سنقتصر غالباً فى وصف هذه العلاقة الهندسية على تسميتها «بالائتلاف» فقط.

بند ٥٧ : نظرية

النسبة المضاعفة لأربع نقط ا، ب، ح، ى على مستقيم مرسوم فى أحد شكلين مؤتلفين تساوى النسبة المضاعفة للنقط الاربع ا'، ب'، ح'، ى' المناظرة لها فى الشكل الآخر .

البرهان : نفرض س_1، س_2، س_3، س_4 أبعاد النقط ا، ب، ح، ى عن نقطة ثابتة على مستقيمها (حامل الصف) وكذلك $\text{س}'_1$، $\text{س}'_2$، $\text{س}'_3$، $\text{س}'_4$ أبعاد النقط المناظرة ا'، ب'، ح'، ى' عن نقطة ثابتة على مستقيمها .

$$\text{فالنسبة المضاعفة}\ (\text{ا ب ح ى}) = \frac{\text{ا ح}}{\text{ب ح}} : \frac{\text{ا ى}}{\text{ب ى}} = \frac{\text{س}_3 - \text{س}_1}{\text{س}_3 - \text{س}_2} : \frac{\text{س}_4 - \text{س}_1}{\text{س}_4 - \text{س}_2}$$

$$= \frac{(\text{س}_3 - \text{س}_1)\ (\text{س}_4 - \text{س}_2)}{(\text{س}_3 - \text{س}_2)\ (\text{س}_4 - \text{س}_1)}$$

ولكن ينتج من الصورة العامة للعلاقة بين س، س' المبينة فى البند السابق أن

$$\text{س} = - \frac{\text{م س}' + \text{ه}}{\text{ك س}' + \text{ل}}$$

فبالتعويض ينتج أن

$$(\text{ا ب ح ى}) = \frac{\left\{-\frac{\text{م س}'_3 + \text{ه}}{\text{ك س}'_3 + \text{ل}} + \frac{\text{م س}'_1 + \text{ه}}{\text{ك س}'_1 + \text{ل}}\right\} \left\{-\frac{\text{م س}'_4 + \text{ه}}{\text{ك س}'_4 + \text{ل}} + \frac{\text{م س}'_2 + \text{ه}}{\text{ك س}'_2 + \text{ل}}\right\}}{\left\{-\frac{\text{م س}'_3 + \text{ه}}{\text{ك س}'_3 + \text{ل}} + \frac{\text{م س}'_2 + \text{ه}}{\text{ك س}'_2 + \text{ل}}\right\} \left\{-\frac{\text{م س}'_4 + \text{ه}}{\text{ك س}'_4 + \text{ل}} + \frac{\text{م س}'_1 + \text{ه}}{\text{ك س}'_1 + \text{ل}}\right\}}$$

$$= \frac{(\text{س}'_3 - \text{س}'_1)\ (\text{س}'_4 - \text{س}'_2)}{(\text{س}'_3 - \text{س}'_2)\ (\text{س}'_4 - \text{س}'_1)}$$

أى أن $(ا ب حـ ى) = \frac{ا' حـ'}{ب' حـ'} : \frac{ا' ى'}{ب' ى'}$

$= (ا' ب' حـ' ى')$ وهو المطلوب.

بند ٥٨ : الصفوف المؤتلفة

اذا طبقنا التعريف سالف الذكر (بند ٥٦) لائتلاف الاشكال المستوية على الصفين ا ب حـ ى ، ا' ب' حـ' ى' باعتبارهما حالتين خاصتين لشكلين مؤتلفين أمكننا تسمية هذين الصفين صفين مؤتلفين . ولما كانت النقط ا ب حـ ى ، ا' ب' حـ' ى' هى نقط مأخوذة حيثما اتفق على الصفين فان النظرية السابقة (بند ٥٧) يكون معناها :

النسبة المضاعفة لاى أربع نقط من صف تساوى النسبة المضاعفة للنقط الاربع المناظرة لها من الصف المؤتلف معه . أو بعبارة أخصر :

النسبتان المضاعفتان لصفين مؤتلفين متساويتان [١] .

وتتخذ بعض الكتب هذه الخاصية كتعريف للصفوف المؤتلفة فيقال لصفى النقط إنهما *مؤتلفان* أو *اسقاطيان* اذا تساوت نسبتاهما المضاعفتان [٢] .

---

(١) نلفت النظر بصفة خاصة الى قولنا : « النسبة المضاعفة لصف » لانه كثيراً ما سيأتى ذكره فى المستقبل مستعملا بمعنى « النسبة المضاعفة لاى أربع نقط على الصف »

(٢) ويقال للصفين على وجه الخصوص إنهما « متشابهان » اذا ساوت النسبة البسيطة لأى ثلاث نقط على أحدهما نظيرتها للثلاث نقط المناظرة على الآخر . وهذه هى الحالة الخاصة لصفين مؤتلفين نقطتاهما اللتين فى اللانهاية متناظرتان أى الحالة التى يؤول فيها الائتلاف الاسقاطى الى ائتلاف مطلق.

ولما كانت هذه الخاصية نتيجة لازمة لتعريفنا (بند ٥٦) ومؤدية اليه فى حالة الصفوف (لان عكس النظرية السالفة المذكورة فى بند ٥٧ صحيح) كان من الممكن أيضاً اتخاذ هذه الخاصية أساساً فى تعريف الاشكال المؤتلفة فيقال إن شكلين مستويين مؤتلفان أو اسقاطيان اذا ساوت النسبة المضاعفة لأى صف فى أحدهما نظيرتها فى الصف المناظر له (قارن تعريف الائتلاف المطلق فى بند ١٥) .

بند ٥٩ : الحزم المؤتلفة

اذا تناظرت حزمتان فى شكلين مؤتلفين تساوت نسبتاهما المضاعفتان أى كانت النسبة المضاعفة لأى أربعة مستقيمات فى إحدى الحزمتين مساوية للنسبة المضاعفة للمستقيمات الاربعة المناظرة فى الحزمة الأخرى .

وتظهر لنا صحة هذه النظرية اذا قطعنا الحزمتين بقاطعين متناظرين (بند ٥٣ و) وتتخذ بعض الكتب هذه الخاصية كتعريف للحزم المؤتلفة أو الاسقاطية .

بند ٦٠ : كيف تتعين العلاقة الائتلافية بين شكلين

يتعين الائتلاف بين شكلين مستويين اذا علمت أربعة أزواج من النقط المتناظرة فى الشكلين بحيث لا يكون ثلاثة من النقط فى أى الشكلين على استقامة واحدة (قارن هذا بالائتلاف المطلق الذى يتعين بمعلومية ثلاثة أزواج من النقط المتناظرة) .

البرهان : نفرض أن النقط المعلومة فى أحد الشكلين سـه هى ا، ب، ح، ى تناظرها ا′، ب′، ح′، ى′ فى الشكل الآخر سـه′ . فتعين الائتلاف معناه أن هذه النقط الثمانية كافية لايجاد النقطة س′ فى الشكل سـه′ المناظرة لأية نقطة مفروضة س فى الشكل سـه . وهذا صحيح لأننا اذا اتخذنا إحدى النقط ا، ب، ح، ى ولتكن ا مثلا رأساً لحزمة أشعتها اب، اح، اى، اس فانه يمكن دائماً وبطريقة واحدة (بند ٥٣ ع) رسم الشعاع ا′س′ فى الشكل سـه′ بحيث تكون النسبة

أَ (بَ حَ ءَ سَ) مساوية للقدار المعلوم الذى تساويه النسبة ا (ب ح ء س)[1]
فاذا اتخذنا نقطة أخرى مثل ب رأساً لحزمة أخرى وكررنا العملية لايجاد بَ سَ
المناظر الى ب س فان سَ تكون نقطة تقاطع اَ سَ ، بَ سَ (ولا معنى للبحث
فيما اذا كانت الاشعة الأربعة المختلفة اَ سَ ، بَ سَ ، حَ سَ ، ءَ سَ التى
يمكن الحصول عليها باتخاذ ا ، ب ، ح ، ء رأساً للحزمة على التوالى — تتلاقى
فى نقطة واحدة لأن المفروض أن الشكلين مؤتلفان وإذن فالنقطة س لا تناظرها
الا نقطة واحدة سَ).

بند ٦١ : مناظرة النقط والمستقيمات لنفسها

يقال لنقطة إنها «تناظر نفسها» فى شكلين مؤتلفين اذا كانت هذه النقطة
معتبرة كنقطة فى أحد الشكلين تناظر نفسها معتبرة فى الشكل الآخر بحيث
يكون المستقيم المناظر لاى مستقيم مار بها يمر بنفس النقطة. ويقال لمستقيم إنه
يناظر نفسه كذلك اذا كانت النقطة المناظرة لأية نقطة على المستقيم تقع أيضاً
على نفس المستقيم.

ويرى القارىء بسهولة أن النتائج الآتية صحيحة :

(١) اذا ناظرت نقطتان نفسيهما فان المستقيم الواصل بينهما يناظر نفسه.

(٢) اذا ناظر مستقيمان نفسيهما فان نقطة تقاطعهما تناظر نفسها.

(٣) اذا ناظر مستقيم نفسه فان أية نقطة على المستقيم تناظرها على وجه
العموم نقطة أخرى واقعة على نفس المستقيم ولكن يجوز أن تقع على المستقيم
نقطتان على الاكثر تناظر كل منهما نفسها أما اذا ناظرت ثلاث نقط على مستقيم
واحد كل منها نفسها فان المستقيم يجب أن يناظر نفسه مناظرة تامة أى أن كل نقطة

(١) أنظر لذلك بند ٨٣.

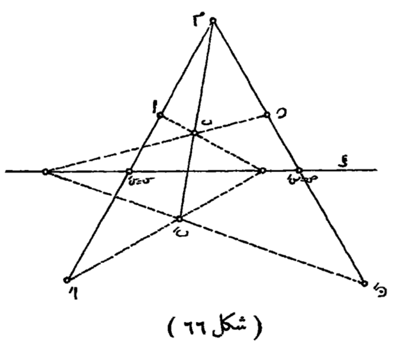
أخرى من نقطه تناظر نفسها وفى هذه الحالة يكون أى جزء محدود من المستقيم مناظراً لنفسه .

(٤) اذا ناظرت نقطة نفسها فان أى مستقيم مار بها يناظره على وجه العموم مستقيم آخر مار بها ولكن يجوز أن يمر بالنقطة المناظرة لنفسها مستقيمان على الاكثر يناظر كل منهما نفسه أما اذا ناظرت ثلاثة مستقيمات مارة بنقطة واحدة كل منها نفسه فان النقطة يجب أن *تناظر نفسها مناظرة تامة* أى أن كل مستقيم آخر مار بها يجب أن يناظر نفسه .

بند ٦٢ : نظريتان

النظرية الاولى

اذا ائتلف شكلان فى مستو واحد ووجد مستقيم بحيث تناظر كل نقطة من نقطه نفسها فان جميع المستقيمات الواصلة بين النقط المتناظرة تمر بنقطة ثابتة .



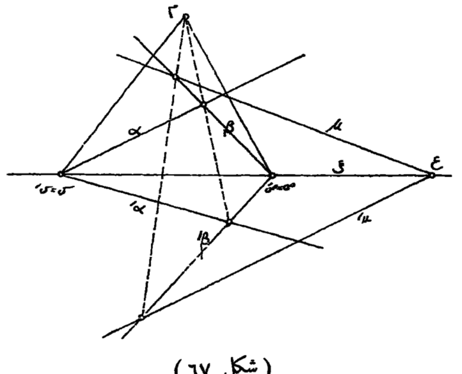
(شكل ٦٦)

للبرهنة على هذه النظرية نفرض فى (شكل ٦٦) أن المستقيم المعلوم هو ع وأن ١ ١′ ، ب ب′ زوجان من النقط المتناظرة فاذا وصلنا ١ ١′ فقطع ع فى النقطة س=س′ فبما أن ١ تناظر ١′ والنقطة س=س′ تناظر نفسها فان ١ س يناظر ١′ س′ ولما كان ١′ س′ هو امتداد المستقيم ١ س أى منطبقاً عليه فينتج من ذلك أن المستقيم ١ ١′ يناظر نفسه وكذلك يكون ب ب′

مناظراً لنفسه فاذا تقاطع ا ا′ ، ب ب′ فى نقطة مثل م وجب أن تكون م مناظرة لنفسها . فاذا كانت ﻫ نقطة حيثما اتفق فى الشكل الاول ووصل م ﻫ فقطع ع فى النقطة ص=ص′ كان المستقيم م ص مناظراً لنفسه (لأن م تناظر نفسها ، ص=ص′ تناظر نفسها أيضاً) وإذن فالنقطة ﻫ′ التى تناظر ﻫ يجب أن تقع على المستقيم م ص أى أن ﻫ ﻫ′ يمر بالنقطة م التى تناظر نفسها مناظرة تامة .

النظرية الثانية

اذا ائتلف شكلان فى مستو واحد ووجدت نقطة بحيث يناظر أى مستقيم مار بها نفسه فان المستقيمات المتناظرة فى الشكلين تتلاقى على مستقيم واحد .



(شكل ٦٧)

للبرهنة على هذه النظرية نفرض فى (شكل ٦٧) أن النقطة المعلومة هى م وأن α α' ، β β' زوجان من المستقيمات المتناظرة فاذا تلاقى المستقيمان α ، α' فى النقطة س ووصل م س فبما أن α يناظر α' والمستقيم م س يناظر نفسه فالنقطة س′ المناظرة للنقطة س يجب أن تنطبق عليها وإذن فالنقطة س=س′ مناظرة لنفسها

وبالمثل تكون النقطة ص ≡ ص′ حيث يتلاقى المستقيمان β ، β′ مناظرة لنفسها أيضاً فاذا وصلنا س ص وجب أن يكون المستقيم ξ ≡ س ص مناظراً لنفسه . فاذا كان μ مستقيما حيثما اتفق فى الشكل الاول يقطع ξ فى ع ووصل م ع وجب أن تكون ع مناظرة لنفسها (لأن المستقيمين م ع ، ξ يناظر كل منهما نفسه) وإذن فالمستقيم μ′ المناظر الى μ يجب أن يمر بالنقطة ع أى أن المستقيمين المتناظرين μ ، μ′ يتلاقيان على المستقيم ξ الذى يناظر نفسه مناظرة تامة[1] .

ملحوظتان :

(١) النقطة م المذكورة فى النظريتين السابقتين يجوز أن تكون نقطة فى اللانهاية . ويحدث هذا اذا كانت صفوف النقط الواقعة على المستقيمات المارة بها متشابهة (بدلا من أن تكون مؤلفة كما هو الحال اذا كانت م على بعد نهائى) أى اذا كانت (شكل ٦٦) $\frac{ا\ س}{ا'\ س} = \frac{ه\ ص}{ه'\ ص} = \ldots = ك$[2] وهذه هى حالة الائتلاف المتوازى (راجع بند ١٢) حيث تكون المستقيمات التى تصل أزواج النقط المتناظرة موازية جميعاً لاتجاه ثابت .

---

(١) نلفت نظر القارىء الى « التشابه » التام بين منطوقى النظريتين السابقتين وكذلك بين البرهانين حيث يمكن استنتاج إحدى النظريتين ببرهانها من النظرية الاخرى بمجرد إحلال كلمتى «نقطة» و«مستقيم» (وما يتبعهما من العبارات) كل منهما محل الاخرى . ويقال لمثل هاتين النظريتين إنهما « متزاوجتان » (أنظر بند ٨٢) .

(٢) وذلك لانه لما كانت (ا ا′ س م) = (ه ه′ ص م) كما يؤخذ من (شكل ٦٦) فينتج أن $\frac{ا\ س}{ا'\ س} : \frac{ا\ م}{ا'\ م} = \frac{ه\ ص}{ه'\ ص} : \frac{ه\ م}{ه'\ م}$ وحيث إن $\frac{ا\ س}{ا'\ س} = \frac{ه\ ص}{ه'\ ص}$ فرضاً وجب أن يكون $\frac{ا\ م}{ا'\ م} = \frac{ه\ م}{ه'\ م} = +١$ (لان ا ه لايوازى على وجه العموم ا′ ه′) وهذا معناه أن م نقطة فى اللانهاية (بند ٥٢ ب) .

(٢) يسمى الائتلاف بين الشكلين المشار اليهما فى النظريتين السابقتين أى بين الشكلين المؤتلفين الموضوعين بحيث تتلاقى المستقيمات التى تصل أزواج النقط المتناظرة فى نقطة واحدة على بعد نهائى وبحيث (بالتالى) تتلاقى المستقيمات المتناظرة على مستقيم ثابت — *ائتلافاً مركزياً أو منظورياً* وتسمى النقطة م *بمركز الائتلاف* أو *مركز المنظورية* كما يسمى المستقيم ع بمحور الائتلاف المركزى . ويقال للشكلين فى هذه الحالة إنهما *مؤتلفان مركزياً* .

وسنفرد الفصل التالى لدراسة الائتلاف المركزى لما له من أهمية فى الهندسة الوصفية بصفة عامة وفى دراسة منحنيات الدرجة الثانية بصفة خاصة .

الفصل الخامس

الائتلاف المركزى

بند ٦٣ : تعريف

يمكن تلخيص الملحوظة الثانية المذكورة فى آخر الفصل السابق فيما يلى :—

يقال إن شكلا مستوياً سـ مكوناً من مجموعة من النقط ا ، ب ، حـ . . . يأتلف ائتلافاً مركزياً مع شكل مستو آخر سَ مكون من مجموعة من النقط اَ ، بَ ، حَ . . . تناظر الاولى (مناظرة الفرد للفرد) اذا كانت المستقيمات ا اَ ، ب بَ ، حـ حَ . . . الواصلة بين النقط المتناظرة تتلاقى فى نقطة واحدة م (تسمى مركز الائتلاف) وكانت المستقيمات المتناظرة ا ب ، اَ بَ . . . تتلاقى على مستقيم (يسمى محور الائتلاف المركزى) .

وهناك حالتان يجب التمييز بينهما : الحالة التى يكون فيها الشكلان سـ ، سَ فى مستويين مختلفين وهى حالة *الاسقاط المركزى أو المنظورى* (شكل ٦٨) . والحالة التى يكون فيها الشكلان سـ ، سَ فى مستو واحد ويطلق عليها اسم *الحالة المستوية أو الائتلاف المركزى المستوى* (شكل ٦٩) .

بند ٦٤ : الائتلاف المركزى بين شكلين فى مستويين مختلفين

يبين (شكل ٦٨) العلاقات الرئيسية بين شكلين سـ ، سَ مؤتلفين مركزياً ومرسومين فى مستويين مختلفين حيث سَ هو المسقط المركزى للشكل سـ المرسوم فى المستوى P من النقطة الثابتة م على المستوى Π . ونلاحظ على هذين الشكلين ما يأتى :—

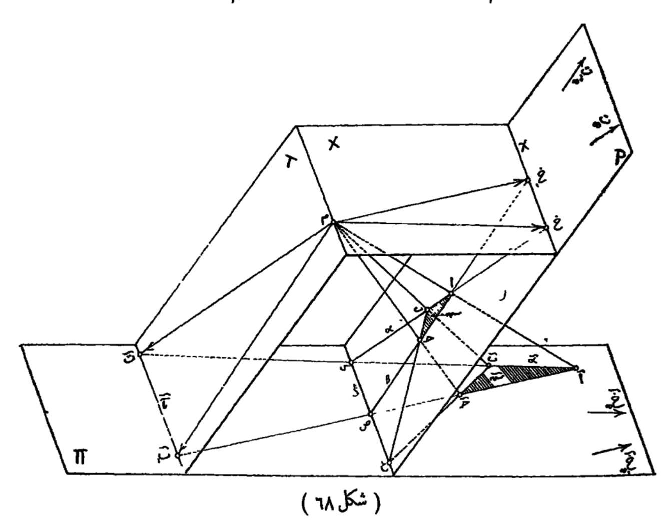
(١) أن المناظرة بين نقط الشكلين هى *مناظرة الفرد للفرد* فكل نقطة مثل ا فى الشكل سـ تناظرها نقطة واحدة اَ فى الشكل سَ وبالعكس .

(٢) أن العلاقة بين الشكلين خطية بمعنى أن كل مستقيم مثل α فى الشكل سه يناظره مستقيم أيضاً $\bar{\alpha}$ فى الشكل سه وبالعكس .

(٣) أن النقط المتناظرة موجودة على مستقيمات مارة بالنقطة م التى هى مركز الائتلاف .

(٤) وينتج من « ثالثاً » أن المستقيمات المتناظرة تتلاقى على مستقيم ثابت ع هو محور الائتلاف .

(٥) اذا أمررنا بالمركز م مستوياً T موازياً للمستوى P فقطع المستوى Π فى المستقيم $\bar{\tau}$ الذى يوازى المحور ع فان هذا المستقيم يعتبر (أنظر بند ٦٥)



(شكل ٦٨)

مناظراً لمستقيم المستوى P الذى فى اللانهاية أى أن $\bar{\tau}$ هو المسقط المركزى لمستقيم المستوى P الذى فى اللانهاية بحيث تكون المساقط المركزية للنقط التى

فى اللانهاية الواقعة فى المستوى P — واقعة على $\bar{\tau}$.

وبالمثل اذا أمررنا بالمركز م مستوياً X موازياً للستوى Π فقطع المستوى P فى المستقيم χ كان هذا المستقيم المحل الهندسى لجميع نقط المستوى P التى مساقطها المركزيه أو النقط المناظرة لها فى المستوى Π هى نقط فى اللانهاية .

فالمستقيمان $\bar{\tau}$ ، χ هما المستقيمان المرسومان فى المستويين Π ، P على التوالى والذى يناظر كل منهما مستقيم المستوى الآخر الذى فى اللانهاية . ويطلق على هذين المستقيمين اسم *المستقيمين المحددين* ويؤخذ من (شكل ٦٨) أنهما يوازيان المحور ع وأن البعد العمودى للمركز م عن أحدهما يساوى بعد الآخر عن المحور .

يتضح مما تقدم أن نقطة فى اللانهاية تناظرها على وجه العموم نقطة على بعد نهائى فى الائتلاف المركزى وذلك بخلاف الحال فى الائتلاف المتوازى .

وقبل أن ننتقل الى الحالة المستوية للائتلاف المركزى نذكر فى البند التالى بعض النظريات المتعلقة بالعناصر التى على أبعاد لا نهائية وهى النقط والمستقيمات التى فى اللانهاية والمستوى الذى فى اللانهاية .

بند ٦٥ : العناصر التى على أبعاد لا نهائية

(١) النقط والمستقيمات التى فى اللانهاية

ذكرنا فى البند السابق بالاشارة الى (شكل ٦٨) أن كل مستقيم مرسوم فى المستوى P يقابله أو يناظره مستقيم فى المستوى Π . وهذه القاعدة وإن كانت صحيحة على وجه العموم إلا أن لها شاذة هامه فى حالة المستقيم المحدد χ المرسوم فى المستوى P والموازى للستوى Π إذ من الواضح أن أى شعاع واصل من م الى أية نقطة من نقط هذا المستقيم لا يلاقى المستوى Π وإذن فهو لا يقطعه فى نقطة يمكن اعتبارها مناظرة لاختها على المستقيم χ ومن السهل رؤية أن جميع النقط فى المستوى P التى لا نظير لها فى المستوى Π واقعة على هذا المستقيم χ .

ويحدث هذا الشذوذ أيضاً فى حالة المستقيم المحدود $\bar{\tau}$ المرسوم فى المستوى Π والموازى للمستوى P فهذا المستقيم هو المحل الهندسى لجميع نقط المستوى Π التى لا نظير لها فى المستوى P .

وقد جرت عادة العلماء على أن يضاف الى المستقيمات المرسومة فى المستوى Π « مستقيم » موجود فى الذهن يسمى « *المستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى* Π » ويعتبر مسقطاً للمستقيم المحدد χ من النقطه م على المستوى Π . وبالمثل يضاف الى مستقيمات المستوى P مستقيم يسمى « *المستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى* P » ويعتبر مسقطاً للمستقيم $\bar{\tau}$ (أو يعتبر المستقيم $\bar{\tau}$ مسقطاً له على المستوى Π) من النقطه م على المستوى P .

بهذه الطريقه يمكن اعتبار أن *كل* مستقيم فى المستوى P يناظره مستقيم فى المستوى Π و*كل* مستقيم فى المستوى Π يناظره مستقيم فى المستوى P ولو أنه لابد من التفرقة بين مناظرة « مستقيمين عاديين » وبين الحالة الشاذة أو الخاصة وهى مناظرة المستقيم العادى χ فى المستوى P للمستقيم « غير العادى » الذى فى اللانهاية فى المستوى Π وكذا مناظرة المستقيم العادى $\bar{\tau}$ فى المستوى Π للمستقيم غير العادى الذى فى اللانهاية فى المستوى P . فالمستقيم الذى فى اللانهاية وإن كان معتبراً مجموعة من النقط إلا أنه يكون من الخطأ تصور أن هذه النقط تحدد اتجاهاً معينا كما يحدث فى حالة المستقيمات العادية . ومن السهل إدراك أن حزمة المستقيمات فى المستوى P التى تتلاقى مع المستقيم χ فى نقطة واحدة عليه مسقطها على المستوى Π هو مجموعة من المستقيمات المتوازية بل إن جميع المستقيمات فى المستوى Π الموازية لاتجاه ثابت هى مساقط لمستقيمات فى المستوى P مارة بنقطة ثابتة واقعة على المستقيم المحدد χ . ويقال مثل ذلك عن المستقيمات الموازية لاتجاه ثابت فى المستوى P فهى تناظر مستقيمات واقعة فى المستوى Π ومارة بنقطة ثابتة على المستقيم $\bar{\tau}$.

من ذلك نشأ اعتبار أن جميع المستقيمات الموازية لاتجاه ثابت تلاقى المستقيم الذى فى اللانهاية فى نقطة ثابتة عليه ويرمز لمثل هذه النقطة الواقعة فى اللانهاية بالاتجاه الثابت المذكور.

وسنضع علامة « ∞ » تحت اسم النقطة والمستقيم للدلالة على أن النقطة أو المستقيم فى اللانهاية . فالمستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى Π والمناظر للمستقيم المحدد χ فى المستوى P هو $\bar{\chi}_{\infty}$ وكذا مستقيم المستوى P الذى فى اللانهاية والمناظر للمستقيم المحدد $\bar{\tau}$ فى المستوى Π هو المستقيم τ_{∞} . ويطلق على نقطة مثل ت واقعة فى اللانهاية الاسم ت$_{\infty}$ *ويرمز لها بسهم يبين الاتجاه الذى يدل عليها* (قارن شكل ٦٨) . وعند الكلام على الائتلاف المركزى المستوى سنطلق غالباً — الا اذا نبهنا الى غير ذلك — اسم λ_{∞} للدلالة على مستقيم المستوى الذى فى اللانهاية .

والخواص الآتى ذكرها للنقط والمستقيمات التى فى اللانهاية يمكن البرهنة عليها بسهولة بالرجوع الى (شكل ٦٨) :—

١) لا يوجد الا مستقيم واحد فى اللانهاية فى أى مستو معين [١] .

---

(١) اذا فرضنا فى (شكل ٦٨) مستوياً آخر مثل P_1 فان المستوى X المار بالنقطة م موازياً المستوى Π سيقطع P_1 فى مستقيم جديد χ_1 وقد يتبادر الى الذهن أن مسقط χ_1 على المستوى Π يجب أن يكون مستقيما جديداً فى اللانهاية فى المستوى Π أى أن المستوى Π يجب أن يكون له اكثر من مستقيم واحد فى اللانهاية إلا أن قليلا من التفكير يدلنا على أنه لما كان χ ، χ_1 واقعين فى مستو واحد X مار بمركز الاسقاط م فان مسقطيهما على Π هو مستقيم واحد . واذا غيرنا مركز الاسقاط م الى نقطة أخرى م$_1$ ورسمنا منها مستوياً X_1 موازياً الى Π فلا يزال من الممكن اثبات أن مسقط الوضع الجديد للمستقيم χ على Π هو نفس مسقط المستقيم الاصلى χ على Π و هذا المسقط هو المستقيم الذى فى اللانهاية المشترك بين المستويات الثلاثة المتوازية : Π ، X ، X_1 (أنظر الفقرة ب من هذا البند) .

٢) جميع النقط التى فى اللانهاية فى أى مستو معين واقعة على المستقيم الذى فى اللانهاية فى هذا المستوى .

٣) تتعين نقطة واحدة فى اللانهاية فى كل مستو بتعيين اتجاه ثابت فى المستوى أى أن النقطة التى فى اللانهاية يمكن أن يرمزلها باتجاه معين يكون دليلا عليها وبذلك يكون الدليل أو الرمز على المستقيم الذى فى اللانهاية فى أى مستو هو مجموعة الاتجاهات المختلفة التى يمكن رسمها فى المستوى .

٤) المستقيم « الواصل » من نقطة عادية الى نقطة فى اللانهاية هو المستقيم المار بالنقطة العادية موازياً للاتجاه المحدد للنقطة التى فى اللانهاية .

٥) « نقطة تقاطع » مستقيم عادى فى مستو معلوم مع المستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى هى النقطة التى فى اللانهاية التى يدل عليها اتجاه المستقيم العادى المعلوم .

٦) « المستقيم الواصل » بين أى نقطتين فى اللانهاية فى مستو معين هو المستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى ويكتفى عند ذلك بكتابة اسمه (مثلا λ_{∞}) حيث لا يمكن رسمه .

وبواسطة الخواص والعمليات السابقة يمكننا الآن التكلم عن النقط والمستقيمات التى فى اللانهاية كأنها نقط ومستقيمات عادية موجودة على بعد نهائى لأن الفارق الذى أشرنا اليه فى أول البند لا يؤثر فى هذه العمليات .

(ب) المستويات المتوازية والمستوى الذى فى اللانهاية

لما كان مسقط المستقيمات التى فى اللانهاية فى جملة مستويات متوازية على مستو ثابت هو مستقيم واحد (وهو خط تلاقى المستوى الثابت مع المستوى المار بمركز الاسقاط موازيا للمستويات المتوازية) لذلك قيل إن المستويات المتوازية تشترك فى مستقيم واحد فى اللانهاية .

فبتحديد اتجاه أو وضع ثابت لجملة مستويات متوازية فى الفضاء يتحدد مستقيم فى اللانهاية ويكون إذن اتجاه هذه المستويات رمزاً أو دليلا على المستقيم الذى فى اللانهاية الذى يتعين بها . وإذا غيرنا هذا الاتجاه تغير المستقيم الذى فى اللانهاية.وبعبارة أخرى اذا علم مستو فمعنى ذلك أن مستقيم الذى فى اللانهاية معلوم أيضاً.

ولما كانت مساقط المستقيمات التى فى اللانهاية فى جملة مستويات على مستو ثابت هو جملة مستقيمات واقعة فى المستوى الثابت لذلك قيل إن المستقيمات التى فى اللانهاية « تقع » كلها فى مستو واحد يسمى المستوى الذى فى اللانهاية للفضاء .

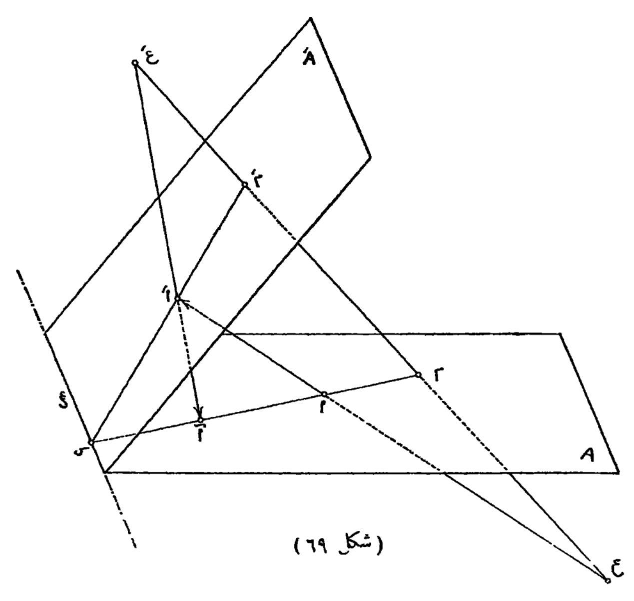
بند ٦٦ : الائتلاف المركزى المستوى

لنفرض أن مجموعة المستويين P ، Π فى (شكل ٦٨) بما فى ذلك الشكلين المؤتلفين ومركز الائتلاف ومحوره — قد أسقطت على مستو ثالث حيثما اتفق فمن الواضح أن مسقطى الشكلين يكونان شكلين مؤتلفين مركزياً فى المستوى الجديد حيث تتناظر نقطهما ومستقيماتهما مناظرة الفرد للفرد وحيث تمر المستقيمات الواصلة بين أزواج النقط المناظرة بنقطة واحدة (هى مسقط المركز الاصلى م) وتتلاقى المستقيمات المتناظرة على مستقيم ثابت (هو مسقط المحور الاصلى ع) .

ويمكن أيضاً الحصول على مثل هذين الشكلين المؤتلفين مركزياً فى مستو واحد بالطريقة الآتية :

لنفرض فى (شكل ٦٩) أن A ، A′ مستويان متقاطعان فى المستقيم ع وأن النقطة ا فى المستوى A قد أسقطت من نقطة فى الفراغ مثل ع على المستوى A′ وأن هذا المسقط قد أسقط ثانية من نقطة أخرى فى الفراغ ع′ على المستوى الأول A . فاذا رمزنا الى مسقط النقطة ا من ع على المستوى A′ بالرمز ا′ والى

مسقط اَ من عَ على المستوى A بالرمز آ والى نقطة تقاطع المستقيم ع عَ مع المستوى A بالرمز م (وهى نقطة ثابتة) فانه يمكن البرهنة بسهولة على أن م ا آ مستقيم (هو خط تقاطع المستوى A مع المستوى ع عَ ا) . وكذلك اذا كانت ب نقطة أخرى فى المستوى A وعينا النقطة المناظرة بَ فى نفس المستوى



(شكل ٦٩)

بالطريقة السابقة فان اب ، آ بَ يتقابلان بمقتضى (بند ٦٢) على خط التقاطع ع[1].

(١) يلاحظ أن م ، ع يناظر كل منهما نفسه مناظرة تامة فى الائتلاف المركزى بين أى شكلين مرسومين فى المستوى A .

فاذا كان س شكلا فى المستوى A مكونا من مجموعة النقط ا ، ب ، ح ، ء . . . وعينا بالطريقة السابقة فى نفس المستوى الشكل سَ المكون من مجموعة النقط اَ ، بَ ، حَ ، ءَ . . . فان العلاقة الهندسية بين الشكلين س ، سَ تكون من النوع السابق تعريفه فى (بند ٦٣) لأن المناظرة بين نقط الشكلين ومستقيماتهما هى مناظرة الفرد للفرد والمستقيمات الواصلة بين النقط المتناظرة تمر جميعا بالنقطة الثابتة م والمستقيمات المتناظرة تتلاقى على المستقيم الثابت ع أى أن هذه العلاقة هى ائتلافية مركزية فى مستو واحد حيث م مركز الائتلاف والمستقيم ع محوره .

وأى شكلين مرسومين فى مستو واحد بحيث تتوافر فيهما الشروط المذكورة آنفا يكونان مؤتلفين مركزيا فى المستوى .

بند ٦٧ : ما يجب معرفته لتحديد الائتلاف المركزى المستوى ونسبة هذا الائتلاف

يتعين الائتلاف المركزى بين شكلين فى مستو واحد اذا أمكن ايجاد النقطة فى أحد الشكلين المناظرة لاية نقطة فى الشكل الآخر .

ويتحقق هذا اذا علم المحور والمركز وزوج واحدمن النقط أو المستقيمات المتناظرة . أو ما يعادل هذه المعالم ويؤدى اليها .

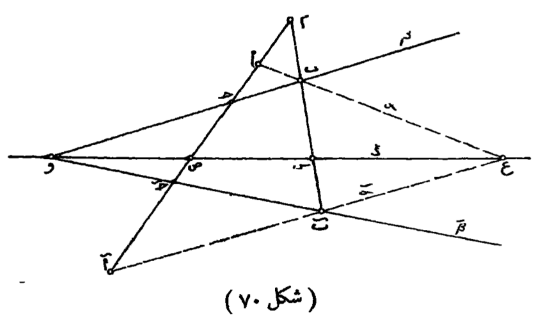
ففى (شكل ٧٠) فرضنا الائتلاف المركزى معلوماً بالمحور ع والمركز م وزوج واحد من النقط المتناظرة ا ، اَ (حيث م ا اَ مستقيم) . فلايجاد النقطة بَ المناظرة لاية نقطة مثل ب نصل النقطتين ا ، ب بالمستقيم α ونفرض أن α يقابل محور الائتلاف ع فى النقطة ع فيكون الخط الواصل بين ع ، اَ هو المستقيم $\bar{\alpha}$ المناظر الى α وتكون النقطة المطلوبة بَ هى نقطة تقاطع $\bar{\alpha}$ ، م ب . واذا كان β مستقيما حيثما اتفق فى الشكل الاول ماراً بالنقطة ب وقاطعاً

ع فى و كان المستقيم المناظر له فى الشكل الآخر هو β̅ ≡ و ب̅ .

ونوجه نظر القارىء الى ما يأتى (١) :—

اولا : مركز الائتلاف هو النقطة الوحيدة التى تناظر نفسها فى الشكلين مناظرة تامة .

ثانياً : محور الائتلاف هو المستقيم الوحيد الذى يناظر نفسه فى الشكلين مناظرة تامة فهو المحل الهندسى لجميع النقط (عدا مركز الائتلاف) التى تناظر كل منها نفسها .



(شكل ٧٠)

ثالثاً : كل مستقيم مار بمركز الائتلاف يناظر نفسه (ولكن ليست مناظرة تامة) بمعنى أن النقطة عليه تناظرها نقطة أخرى عليه أيضاً ولو أن هاتين النقطتين لا تنطبقان (أى لا تناظر النقطة نفسها) إلا عند تقاطعه مع المحور وعند مركز الائتلاف نفسه .

رابعاً : اذا تحدد الائتلاف فى مستو واحد (بالمحور والمركز ونقطتين متناظرتين مثلا) فان أية نقطة فى المستوى يمكن اعتبارها إما نقطة من نقط

(١) قارن بندى ٦١ ، ٦٢ .

الشكل الاول لها نظيرة فى الثانى أو نقطة من نقط الشكل الثانى لها نظيرة فى الاول . وفى الواقع ولو أننا نتحدث عن الائتلاف بين شكلين إلا أن مجرد الائتلاف انما هو تعيين « لمجموعتين » من النقط تملأ كل منهما سطح المستوى وتكون نقط أحد الشكلين نقطاً فى إحدى المجموعتين ونقط الشكل الآخر فى المجموعة الثانية . وسنتكلم فيما يلى عن « مجموعة الشكل الاول » و « مجموعة الشكل الثانى » على هذا الأساس .

النسبة الثابتة للائتلاف المركزى المستوى

اذا قطع المستقيمان م ا اَ ، م ب بَ محور الائتلاف ع فى ص ، س على التوالى (شكل ٧٠) فانه بناء على نظرية پاپس (بند ٥٣ و) يكون :

(م س ب بَ) = ع (م س ب بَ) = (م ص ا اَ) = و (م س ب بَ)

=(م ص حـ حَ) = ... = مقداراً ثابتاً ψ

ومعنى ذلك أنه اذا رسم من مركز الائتلاف م أى مستقيم يقطع المحور ع فى نقطة مثل ص وكان ا ، اَ أى زوج من النقط المتناظرة على المستقيم م ص فان النسبة المضاعفة للنقط الاربع م ، ص ، ا ، اَ تساوى مقداراً ثابتاً وتساوى نظيرتها للنقط الاربع المماثلة الواقعة على أى مستقيم آخر مار بالمركز م [١] .

بند ٦٨ : المستقيمان المحددان فى الائتلاف المركزى المستوى

اذا علم شكلان سه ، سَه مؤتلفان مركزياً ومرسومان فى مستو واحد ورسم أى مستقيم $\bar{\chi} \equiv \tau$ فى مستويهما فانه يمكن دائماً على وجه العموم ايجاد مستقيمين مختلفين χ ، $\bar{\tau}$ بحيث أن χ باعتباره مستقيماً فى مجموعة الشكل سه يناظر المستقيم $\bar{\chi}$ باعتباره مستقيماً فى مجموعة الشكل سَه وأن $\bar{\tau}$ باعتباره

(١) النسبة المضاعفة هنا تقابل النسبة البسيطة فى حالة الائتلاف المتوازى (بند ١٢) .

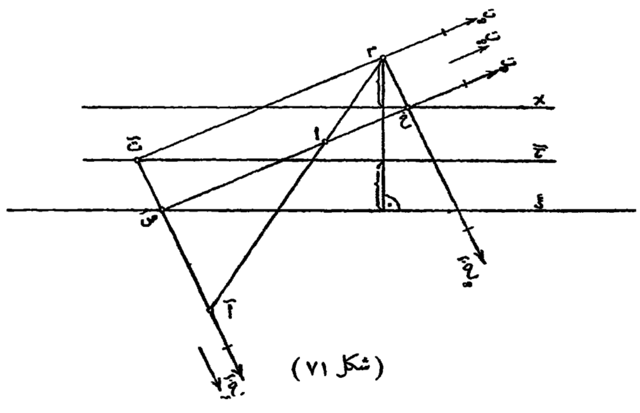
مستقيما مرسوما فى مجموعة الشكل سَهٔ يناظر المستقيم τ نفسه باعتباره جزءاً من مجموعة الشكل سه (بند ٦٧) . فاذا اعتبرنا الحالة التى يكون فيها المستقيم $\tau \equiv \bar{\chi}$ المذكور هو المستقيم الذى فى اللانهاية فى مستوى الشكلين (ورمزنا اليه فى هذه الحالة بالرمز $\bar{\chi}_{\infty} \equiv \tau_{\infty}$) فان χ ، $\bar{\tau}$ يؤولان حينئذ الى المستقيمين المحددين فى الائتلاف المركزى المستوى (راجع المستقيمين المحددين فى حالة الائتلاف المركزى بين شكلين فى مستويين مختلفين فى بند ٦٤)[1] .

فلنفرض الآن فى (شكل ٧١) أن الائتلاف المركزى تحدد بواسطة المركز م والمحور ع وزوج من النقط المتناظرة ا ، اَ ثم نفرض نقطة ما فى اللانهايه ت$_{\infty}$ (اتجاه معين) ونعتبرها نقطة فى مجموعة الشكل سه ثم نجد فى المجموعة الاخرى للشكل سَهٔ النقطة المناظرة تَ كما سبق بيانه فى (بند ٦٧) : « فنصل » لذلك ا « بالنقطة » ت$_{\infty}$ ونفرض أن المستقيم ا ت$_{\infty}$ يقابل المحور ع فى نقطة مثل ص ونصل ص اَ وبذا تكون النقطة المطلوبة تَ هى نقطة تقاطع المستقيم ص اَ مع المستقيم الذى « يصل » م بالنقطة ت$_{\infty}$. ويكون المستقيم المحدد $\bar{\tau}$ المرسوم فى

(١) يستطيع القارىء أن يكون لنفسه فكرة عن الوضع الاصلى فى الفراغ لمثل هذين المستقيمين المحددين فى الائتلاف المركزى المستوى بالرجوع الى (بند ٦٦) . فاذا رسمنا من ع ، ع′ فى (شكل ٦٩) مثلا مستويين موازيين الى A ويلاقيان A′ فى τ' ، χ' على التوالى فان مسقط τ' من ع′ على A ومسقط χ' من ع على A أيضاً يكونان على التوالى المستقيمين المحددين $\bar{\tau}$ ، χ المناظرين الى المستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى A باعتباره جزءاً من مجموعة الشكل سه وجزءاً من مجموعة الشكل سَهٔ فى نفس الوقت . كذلك اذا أسقطنا مجموعة المستويين P ، Π فى (شكل ٦٨) إسقاطاً متوازياً على مستوثالث A فان المستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى A يمثل حينئذ مسقطى المستقيمين اللذين فى اللانهاية فى المستويين P ، Π ويكون مسقطا $\bar{\tau}$ ، χ على A هما المستقيمان المحددان فى الائتلاف المركزى فى المستوى A .

مجموعة الشكل سَ‍ه والذى يناظر مستقيم المستوى الذى فى اللانهاية τ_∞ باعتباره مرسوماً فى مجموعة الشكل سه — هو المستقيم الذى يمر بالنقطة تَ ويتقاطع مع τ_∞ فى نقطة على محور الائتلاف ع . ولما كانت « نقطة تقاطع » المستقيم الذى فى اللانهاية τ_∞ مع المحور ع هى نقطة ع التى فى اللانهاية وجب أن يتقاطع $\bar{\tau}$ مع ع فى اللانهاية أى أن يكون $\bar{\tau}$ موازيا لمحور الائتلاف ع .

واذا اعتبرنا نقطة فى اللانهاية مثل خَ$_\infty$ أنها إحدى نقط مجموعة الشكل سَ‍ه وعينا كما تقدم النقطة خ المناظرة لها فى مجموعة الشكل سه فان المستقيم المحدد الثانى χ المرسوم فى مجموعة الشكل سه والذى يناظر المستقيم الذى فى اللانهاية (ولنسم هذا الأخير لهذا السبب $\bar{\chi}_\infty$ وإن كان هو نفس المستقيم τ_∞ السالف الذكر)



(شكل ٧١)

باعتباره مرسوما فى مجموعة الشكل سَ‍ه — يمر بالنقطة خ ويكون موازيا للمحور ع لنفس السبب الذى من أجله يوازى $\bar{\tau}$ هذا المحور.

ولما كان م خ ص تَ فى (شكل ٧١) متوازى أضلاع وجب أن يكون

بعد م العمودى عن المستقيم المحدد χ مساويا فى الاتجاه المضاد لبعد المحور العمودى عن المستقيم المحدد $\bar{\tau}$.

و يمكن تلخيص ما تقدم فى النظريتين الآتيتين :—

أولا : المستقيمان المحددان فى ائتلاف مركزى مستوى متوازيان ويوازيان محور الائتلاف .

ثانياً : البعد العمودى لأحد المستقيمين المحددين عن مركز الائتلاف يساوى بعد الآخر فى الاتجاه المضاد عن محور الائتلاف . أو بعبارة أوضح : منتصف العمود النازل من مركز الائتلاف على محوره هو فى نفس الوقت منتصف البعدين المستقيمين المحددين . فالمستقيمان المحددان على هذا إما أن يكونا مرسومين معا بين مركز الائتلاف ومحوره أو أن يكون المركز والمحور واقعين بينهما — وعلى بعدين متساويين منهما [١] .

وبمقتضى هاتين النظريتين يكفى لرسم المستقيمين المحددين $\bar{\tau}$ ، χ فى ائتلاف مركزى مستوى أن نعين نقطة واحدة مثل $\bar{ت}$ فى مجموعة أحد الشكلين $\bar{سه}$ تكون مناظرة لنقطة فى اللانهاية $ت_{\infty}$ باعتبارها فى مجموعة الشكل الآخر سه فيكون أحد المستقيمين المحددين $\bar{\tau}$ هو المستقيم المرسوم من $\bar{ت}$ موازيا للمحور ويكون المستقيم المحدد الآخر χ هو المستقيم المرسوم موازيا للمحور أيضا وعلى بعد عمودى منه يساوى ويضاد البعد العمودى للمستقيم $\bar{\tau}$ عن المركز.

---

(١) لما كانت هاتان النظريتان يمكن اعتبارهما فى حالة الائتلاف المركزى بين شكلين فى مستويين مختلفين نتيجة مباشرة لتعريف هذا الائتلاف (أنظر بند ٦٤) فانه يمكن أيضاً البرهنة عليهما فى الحالة المستوية باستخدام نظريات الهندسة الفراغية وذلك بالرجوع مثلا الى (شكل ٦٨) اذا اعتبرنا هذه الحالة الأخيرة ناشئة عن إسقاط شكلين مؤتلفين مركزياً ومرسومين فى مستويين مختلفين على مستو ثالث — أو بالرجوع الى ما ذكرناه فى هامش صحيفة ١٨١ على ضوء (شكل ٦٩) .

بند ٦٩ : حالات خاصة للائتلاف المركزى المستوى

أولا : مركز الائتلاف نقطة فى اللانهاية

فى هذه الحالة يؤول الائتلاف المركزى الى ائتلاف متواز (راجع شكل ١٩) وتؤول النسبة المضاعفة فى حالة الائتلاف المركزى الى النسبة البسيطة :

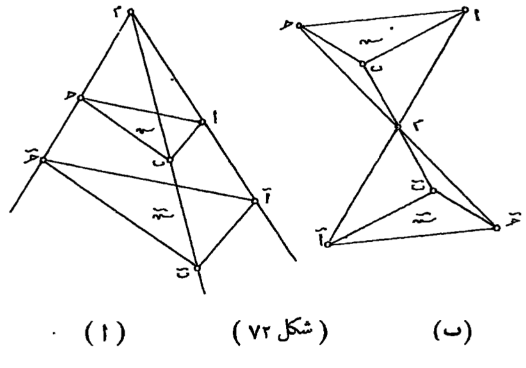
$$\frac{ا ا_١}{ا ا_٢} = \frac{ب ب_١}{ب ب_٢} = \ldots = \text{مقداراً ثابتاً } ك$$

فاذا كانت ك = − ١ أى اذا كان ا ا$_١$ = ا ا$_٢$ وكذا ب ب$_١$ = ب ب$_٢$ ...

فى (شكل ١٩) قيل للشكلين س$_١$ ، س$_٢$ إنهما متماثلان بالنسبة للمحور ويكون هذا التماثل مائلا أو عمودياً على حسب كون اتجاه الائتلاف مائلا أو عمودياً على المحور .

ثانياً : محور الائتلاف المركزى هو المستقيم الذى فى اللانهاية

فى هذه الحالة تتقاطع المستقيمات المتناظرة جميعاً على ابعاد لا نهائية أى تكون



(ا) (شكل ٧٢) (ب)

متوازية (شكل ٧٢ ا) ويقال للشكلين س ، س َ حينئذ إنهما متشابهان شكلا

ووضعاً بالنسبة لمركز التشابه م وتؤول النسبة المضاعفة الثابتة للائتلاف المركزى الى النسبة البسيطة :

$$\frac{\text{م أ}}{\text{م أَ}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م بَ}} = \ldots = \text{مقداراً ثابتاً } \varkappa$$

فاذا كانت $\varkappa = -1$ أى اذا كان م أ = م أَ ، م ب = م بَ ... (شكل ٧٢ ب) قيل للشكلين فى هذه الحالة الخاصة إنهما متماثلان بالنسبة للمركز م (تماثل مركزى) .

ثالثاً : الحالة التى ينطبق فيها المستقيمان المحددان

ذكرنا فى (بند ٦٧) أنه اذا تحدد الائتلاف المركزى بين مجموعتين فى مستو واحد فان أية نقطة فى المستوى يمكن اعتبارها إما نقطة من نقط المجموعة الاولى لها نظيرة فى الثانية أو نقطة من نقط المجموعة الثانية لها نظيرة فى الأولى ويقال مثل ذلك عن المستقيمات . ويستطيع القارىء أن يقنع نفسه بالعمل أن النقطتين المناظرتين لنقطة واحدة هما على وجه العموم وفى الائتلاف العادى نقطتان مختلفتان وواقعتان على مستقيم مار بمركز الائتلاف وأن المستقيمين المرسوم كل منهما فى إحدى المجموعتين مناظراً لمستقيم واحد باعتباره مرسوماً فى المجموعة الأخرى — أى المستقيمين المناظرين لمستقيم واحد هما على وجه العموم مستقيمان مختلفان متقابلان على المحور .

إلا أنه اذا كان أحد المستقيمين المحددين فى منتصف المسافة بين مركز الائتلاف ومحوره فان المستقيم المحدد الآخر ينطبق عليه بحيث يكون ح∞ ≡ حَ (شكل ٧٣) . ومعنى ذلك أن المستقيمين المرسوم كل منهما فى إحدى المجموعتين مناظراً للمستقيم الذى فى اللانهاية باعتباره مرسوماً فى المجموعة الأخرى — هما فى هذه الحالة الخاصة مستقيمان منطبقان وليسا مختلفين كما هو الحال فى الائتلاف العادى .

فاذا فرضت فى (شكل ٧٣) نقطة ما فى المستوى مثل ا ≡ ~ب فان النقطتين ~ا ، ب اللتين يمكن تعيينهما بحيث أن ا باعتبارها إحدى نقط المجموعة ~سه تناظر النقطة ا باعتبارها إحدى نقط المجموعة سه وأن ب باعتبارها نقطة فى المجموعة سه تناظر نفس النقطة المفروضة ~ب باعتبارها نقطة فى المجموعة ~سه — فان هاتين النقطتين تنطبقان فى هذه الحالة (وفيها وحدها) بحيث يكون ~ا ≡ ب أيضاً . ومثل ذلك يقال عن أى مستقيم مرسوم فى المستوى .

(شكل ٧٣)

ويقال لمثل هذا التناظر إنه تناظر متبادل وتؤول النسبة المضاعفة الثابتة للائتلاف المركزى الى نسبة توافقية لأن :

ψ = (م ص ا ~ا) = (م ع خ ~خ$_\infty$) = − ١ (شكل ٧٣)

ولذا سمى الائتلاف المركزى فى هذه الحالة بالوثنوف المركزى التوافقى .[1]

ملحوظة

اذا كان مركز الائتلاف نقطة فى اللانهاية وكان محور الائتلاف هو المستقيم الذى فى اللانهاية فان الائتلاف المركزى يؤول فى هذه الحالة الى تطابق أو تساو .

---

(١) ويسمى أحياناً أيضاً « بالائتلاف المركزى التضامنى » لارتباطه بالتضامن (أنظر بند ٩٤) .

الفصل السادس

المنحنيات المؤتلفة مركزياً مع الدائرة

بند ٧٠ : ارتباط نوع المقطع المخروطي باعتباره مسقطاً مركزياً لدائرة بالعلاقة بين الدائرة والمستقيم المحدد المرسوم فى مستويها

ذكرنا فى(بند ٥١) أن المسقط المركزى للدائرة هو على وجه العموم مقطع مخروطى . فاذا فرضت دائرة فى المستوى P فى (شكل ٦٨) فان مسقطها من م على المستوى Π يكون منحنياً مقفلا أى قطعاً ناقصاً (بند ٤٧) اذا لم تقطع الدائرة المستقيم المحدد χ . أما اذا قطعت الدائرة هذا المستقيم فان جزئى محيطها الواقعين فى ناحيتين مختلفتين من هذا المستقيم يكون مسقطاهما شعبتين منفصلتين لأن نقطتى تلاقيهما (وهما مسقطا نقطتى تقاطع الدائرة مع المستقيم المحدد χ) هما نقطتان على بعد لا نهائى ومعنى هذا أن الشعبتين لا يلتقيان وإذن يكون المسقط فى هذه الحالة قطعاً زائداً (بند ٤٨) . أما اذا مست الدائرة المستقيم المحدد χ فان المسقط فى هذه الحالة يكون منحنياً ذا شعبة واحدة وممتداً من ناحية واحدة الى بعد لا نهائى أى أنه قطع مكافىء (بند ٤٩) .

بند ٧١ : المقطع المخروطى كمنحن مؤتلف مع دائرة فى مستويها

معلوم من الهندسة التحليلية أن كل منحن (غير منحل) من الدرجة الثانية إما أن يكون قطعاً ناقصاً (دائرة) أو زائداً أو مكافئاً ولما كان المستقيم الذى فى اللانهاية باعتباره مستقيما كبقية المستقيمات فى مستوى منحن من الدرجة الثانية — يقطع هذا المنحنى فى نقطتين (حقيقيتين أو تخيليتين) وكان القطع الناقص منحنياً مقفلا ليست له نقط حقيقية فى اللانهاية والقطع الزائد له نقطتان حقيقيتان

(مختلفتان) فى اللانهاية والقطع المكافىء له نقطة واحدة (أى نقطتان حقيقيتان متحدتان) فى اللانهاية فان ينتج أن منحنى الدرجة الثانية (أى المقطع المخروطى) يكون قطعاً ناقصاً أو زائداً أو مكافئاً على حسب كون المستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى غير قاطع له (فى نقط حقيقية) أو قاطعاً له (فى نقطتين حقيقيتين مختلفتين) أو ماسا له على التوالى (١) .

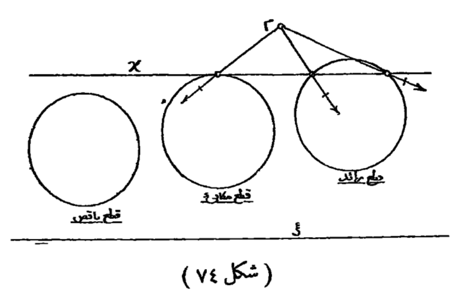
ولما كانت الدرجة من الخواص التى لا تتغير بالاسقاط فانه يمكن أن نستنتج ماسبق أن قررناه من أن المنحنيات المؤتلفة مركزياً مع الدائرة — سواء كان هذا الائتلاف فى مستويين مختلفين أو فى مستو واحد — وكذا المنحنيات المؤتلفة مع الدائرة ائتلافاً إسقاطياً عاماً هى مقاطع مخروطية .

ولتوضيح ذلك فى حالة الائتلاف المركزى المستوى نفرض فى (شكل ٦٩) دائرة مرسومة فى المستوى A وأننا أسقطنا هذه الدائرة من ع على المستوى 'A فيكون المسقط مقطعاً مخروطياً . فاذا أسقطنا هذا المقطع من ع' على المستوى الاول A كان المسقط الاخير منحنياً من الدرجة الثانية أى مقطعاً مخروطياً جديداً فى المستوى A مؤتلفاً ائتلافا مركزيا مع الدائرة المرسومة فى نفس المستوى A وتكون فى هذه الحالة النقطة م مركز الائتلاف كما يكون المستقيم ؏ محور هذا الائتلاف .

فاذا علم ائتلاف مركزى مستوى بالمركز والمحور وزوج من النقط المتناظرة وعلمت كذلك دائرة ثم رسم المستقيم المحدد χ فى مجموعة الدائرة الذى يناظر المستقيم الذى فى اللانهاية باعتباره مستقيما فى مجموعة المنحنى المؤتلف مع الدائرة مركزياً (بند ٦٨) فان هذا المنحنى يكون قطعاً زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً

(١) قارن أيضاً (بند ٧٠) حيث المستقيم المناظر الى χ فى المستوى II هو كما قدمنا المستقيم الذى اللانهاية فى هذا المستوى .

على حسب كون المستقيم المحدد χ (وليس المستقيم المحدد الآخر $\bar{\tau}$ الذى يناظر المستقيم الذى فى اللانهاية باعتباره مرسوماً فى مجموعة الدائرة) قاطعاً للدائرة أو ماساً لها أو غير قاطع لها على التوالى (شكل ٧٤) لأن المستقيم الذى فى اللانهاية المناظر للمستقيم المحدد χ يقطع المنحنى المؤتلف مركزياً مع الدائرة فى الحالة الأولى فى نقطتين ويمس هذا المنحنى فى الحالة الثانية وفى الحالة الاخيرة لا يلاقيه .



(شكل ٧٤)

وبالنظر الى أن نوع المقطع المخروطى يتوقف على المستقيم المحدد χ فانه يطلق على هذا المستقيم أحياناً اسم المستقيم المحدد المعين لنوع المقطع المخروطى .

بند ٧٢ : كيفية رسم المقطع المخروطى المؤتلف مركزياً مع الدائرة .

لرسم المنحنى المؤتلف مركزياً مع الدائرة اذا علمت هذه الدائرة ومركز الائتلاف م ومحوره ع والمستقيم المحدد χ المعين لنوع المنحنى (أى المناظر للمستقيم الذى فى اللانهاية باعتباره مرسوماً فى مجموعة المقطع المخروطى) نفرض أن المطلوب تعيين النقطة ا′ على هذا المنحنى التى تناظر نقطة معينة مثل ا على الدائرة فلذلك نصل م ا ثم نرسم أى مستقيم مار بالنقطة ا ليقطع المحور ع فى نقطة مثل ع

والمستقيم المحدد χ فى نقطة مثل ل ونصل م ل . فاذا رسمنا من ع مستقيما موازياً الى م ل ليقطع م ا فى ا′ فان ا′ تكون هى النقطة المناظرة الى النقطة ا أى تكون إحدى نقط المقطع المخروطى [1] . ويكون المستقيم المناظر لأى مستقيم مار بالنقطة ا هو مستقيم مار بالنقطة ا′ وبنقطة تقاطع المستقيم المعلوم مع المحور ع فاذا كان المستقيم المعلوم هو مماس الدائرة فى ا كان المستقيم المناظر هو مماس المقطع المخروطى فى ا′ (بند ٦٧) .

ولايجاد مركز المقطع المخروطى نجد قطب المستقيم المحدد χ بالنسبة للدائرة وليكن نقطة مثل و ثم نجد و′ المناظرة الى و بالطريقة السابقة فتكون و′ هى مركز المقطع المخروطى .

ولتعيين قطرين مترافقين فى المنحنى نرسم مستقيمين مترافقين بالنسبة للدائرة ومتقاطعين فى و ثم نجد المستقيمين المناظرين لهما (والمتقاطعين فى و′) فيكون هذان المستقيمان قطرين مترافقين فى المقطع المخروطى (بند ٥٥) .

ونترك إثبات صحة العمليات السابقة للقارىء . وسنقتصر فيما يلى على شرح الحالتين التى يكون فيهما المنحنى قطعاً زائداً ومكافئا .

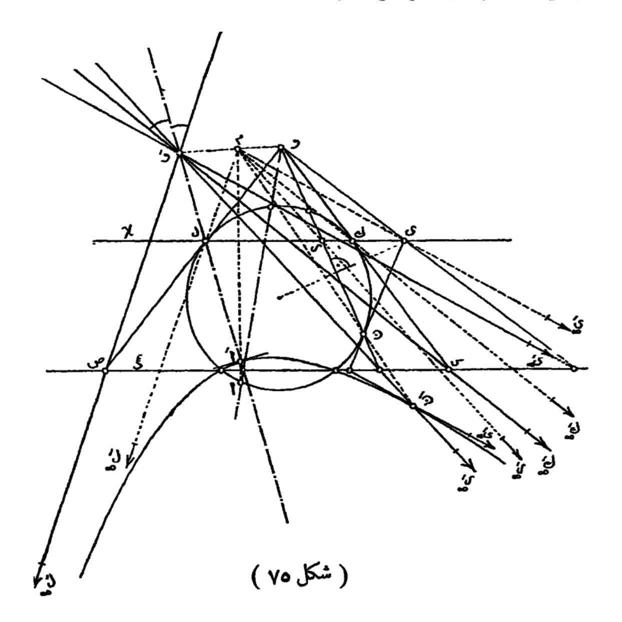
بند ٧٣ : الحالة التى يكون فيها المنحنى قطعاً زائداً — خواص جديدة للقطع الزائد

يبين (شكل ٧٥) الحالة التى يكون فيها المنحنى المؤتلف مركزياً مع الدائرة قطعاً زائداً حيث م مركز الائتلاف ، ع محور الائتلاف ، χ المستقيم المحدد المعين لنوع المنحنى والذى لذلك يقطع الدائرة فى نقطتين حقيقيتين ك ، ل . وقد عينا فى الشكل المركز و′ للقطع الزائد والقطرين المترافقين و′ $ر′_\infty$ ، و′ $ى′_\infty$

---

(١) وذلك لان أية نقطة مثل ل على χ تناظرها فى مجموعة المقطع المخروطى النقطة التى فى اللانهاية $ل_\infty$ التى يدل عليها الاتجاه م ل .

بالطريقة المبينة سابقاً . وسنشرح فيما يلى كيفية رسم المستقيمين التقريبين والرأسين وكذا بعض الخواص الجديدة :ـــ



(شكل ٧٥)

(أ) المستقيمان التقريبيان

هما المستقيمان المناظران لماسى الدائرة فى ك ، ل (نقطتى تقاطع الدائرة مع المستقيم المحدد χ) فاذا قابل هذان المماسان المحور ع فى س ، ص على التوالى كان المستقيمان التقريبيان هما المستقيمان المرسومان من س ، ص موازيين على التوالى المستقيمين م ك ، م ل اللذين يحددان النقطتين ك'∞ ، ل'∞ اللتين فى اللانهاية .

(ب) الرأسان

اذا كان و ا′ هو المحور القاطع فى القطع الزائد (أى منصف الزاوية بين المستقيمين التقريبين) فان المستقيم المناظر له و ا فى مجموعة الدائرة يقابلها فى نقطتين هما المناظرتان للرأسين (وقد اكتفينا فى الشكل بتعيين الرأس ا′ لأن الرأس الثانية تقع بعيداً) .

(ح) الاقطار المترافقة

أى مستقيم مثل و ر يمر بالنقطة و قاطعاً الدائرة فى نقطتين يكون المناظر له فى المنحنى قطراً قاطعاً و′ ه′$_\infty$. فاذا كانت ى قطب المستقيم و ر بالنسبة الى الدائرة (ويجب بمقتضى النتيجة الثالثة من النظرية الثالثة فى بند ٥٤ أن تقع ى على χ لأن و قطب χ بالنسبة للدائرة) ووصل وى كان و ر ؟ و ى مستقيمان مترافقان بالنسبة الى الدائرة . فاذا كان و′ ى′$_\infty$ هو المستقيم المناظر الى و ى وجب أن يكون و′ ر′$_\infty$ ؟ و′ ى′$_\infty$ قطرين مترافقين فى القطع الزائد ولما كان ثانيهما لا يقابل القطع الزائد فانه يسمى قطراً غير قاطع ويكون طوله تخيلياً [1] .

(ى) خواص جديدة

∴ و (ك ل ر ى) = − ١ ∴ و′ (ك′$_\infty$ ل′$_\infty$ ر′$_\infty$ ى′$_\infty$) = − ١

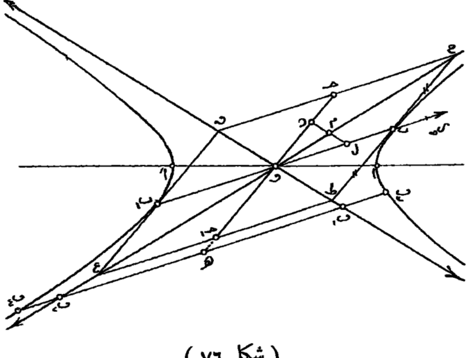
وينتج من ذلك أن حزمة المستقيمات المكونة من المستقيمين التقريبين والقطرين المترافقين و′ ر′$_\infty$ ؟ و′ ى′$_\infty$ هى حزمة توافقية أو بتعبير آخر :

(١) قارن الحالة التى يكون فيها المنحنى المؤتلف مركزياً مع الدائرة قطعاً ناقصاً ففى هذه الحالة يكون قطب χ بالنسبة للدائرة واقعاً داخلها ولذا كانت جميع أقطار القطع الناقص قاطعة له فى نقط حقيقية .

كل زوج من الاقطار المترافقة فى القطع الزائد يفصل المستقيمين التقربيين توافقياً .

وفى حالة القطع الزائد القائم يكون المستقيمان التقريبيان هما المنصفان الداخلى والخارجى للزاوية المحصورة بين أى زوج من الاقطار المترافقة.

وباستخدام الخاصية السابقة يمكن الحصول بسهولة على القطر المرافق لأى قطر معلوم مثل ب ب١ فى قطع زائد. فنفرض لذلك (شكل ٧٦) نقطة ما مثل ل على القطر المعلوم ب ب١ ونرسم منها موازياً لاحد المستقيمين التقريبين فيقطع الآخر فى نقطة مثل م ثم نقيس على هذا الموازى البعد م ى = م ل ونصل و ى فيكون هو القطر المرافق للقطر ب ب١ المعلوم.



(شكل ٧٦)

ويسمى الطول ع ط المحصور بين المستقيمين التقريبين لمماس القطع الزائد فى إحدى نهايتى أى قطر قاطع بطول القطر المرافق له وذلك لانه يساوى البعد (التخيلى) بين نقطتى تقاطع القطر المرافق مع المنحنى مقسوماً على $\sqrt{-1}$ (راجع الهندسة التحليلية) .

فالقطع الزائد يتعين إذن اذا علم منه قطران مترافقان طولا واتجاهاً مثل ب ب١ ، حـ حـ١ (شكل ٧٦).

واذا رسم فى (شكل ٧٦) مستقيم مواز للقطر القاطع ب ب١ فقطع المنحنى فى النقطتين ف٣ ، ف٤ وقابل المستقيمين التقريبين فى ف١ ، ف٢ والقطر المرافق للقطر ب ب١ فى هـ فان هـ لا بد أن تكون منتصف البعد ف١ ف٢ لأن (ف١ ف٢ هـ ∞) = −١ وكذلك تكون هـ منتصف ف٣ ف٤ لأن القطر فى أى مقطع مخروطى ينصف الاوتار الموازية للقطر المرافق له (بند ٥٥).

ينتج مما تقدم أن ف١ ف٣ = ف٢ ف٤ ، ف٣ ف٢ = ف٤ ف١ ولما كان هذا حقيقياً لكل وتر قاطع فى القطع الزائد (لأن القطر ب ب١ حيثما اتفق) فان النتيجة السابقة يكون معناها :

اذا رسم فى القطع الزائد وتر يقطعه فى نقطتين كان جزء الوتر المحدود باحدى النقطتين ونقطة تقاطعه مع أحد المستقيمين التقريبين مساوياً لجزئه المحدود بالنقطة الاخرى ونقطة تقاطعه مع المستقيم التقربى الثانى .

وبالنظر الى أن أى قطرين مترافقين بالنسبة الى القطع الزائد هما أيضا مترافقان بالنسبة الى المستقيمين التقريبين فان النقطة ب فى (شكل ٧٦) تكون منتصف ع ط وهذا معناه :

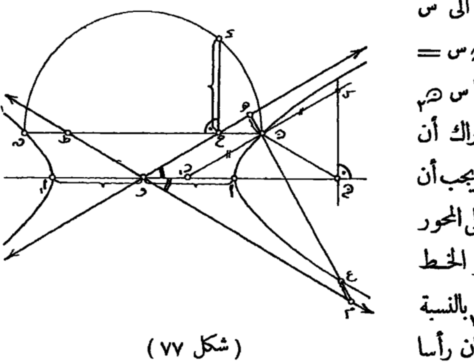
اذا رسم مماس لقطع زائد فقابل المستقيمين التقريبين فى نقطتين كانت نقطة التماس منتصف البعد بين هاتين النقطتين .

(هـ) كيفية رسم القطع الزائد اذا علم منه المستقيمان التقريبيان وإحدى النقط

بواسطة الخواص السابقة يمكن بسهولة تعيين أى عدد من نقط المنحنى بالمماسات فيها . فمثلا اذا رسمنا من ن مستقيما حيثما اتفق يقابل المستقيمين

التقريبين فى هـ ، م (شكل ٧٧) وقسنا عليه البعد م ع = ن هـ كانت ع نقطة جديدة من نقط المنحنى وهكذا . أما المماس فى إحدى النقط فهو مواز للقطر المرافق للقطر المار بها وقد شرحنا فيما تقدم كيفية الحصول على القطر المرافق لقطر معلوم (شكل ٧٦) .

ولتعيين رأسى القطع الزائد فى هذه الحالة ننصف فى (شكل ٧٧) الزاوية المحصورة بين المستقيمين التقريبين بمستقيم فيكون هو المحور القاطع . فاذا رسمنا من النقطة المعلومة ن موازيين للمستقيمين التقريبين فقابلا المحور القاطع فى [illegible] ومددنا ن$_1$ن الى س بحيث يكون ن س = ن ن$_1$ ووصلنا س ن$_2$ فمن السهل إدراك أن س ن$_2$ (الذى يجب أن يكون عموديا على المحور القاطع) هو الخط القطبى للنقطة ن$_1$ بالنسبة للمنحنى . فاذا كان رأسا القطع الزائد المطلوب تعيينهما هما ا ، ا$_1$ فان



(شكل ٧٧)

(ا ا$_1$ ، ن$_1$ ن$_2$) = −١ ∴ و ن$_1$. و ن$_2$ = $\overline{\text{و ا}}^2$ (بند ٥٤)

وبذا يتحدد الطول و ا وهو نصف المحور القاطع .

ولايجاد هذا الطول بواسطة الرسم نرسم من ن الموازى ن ى للمحور القاطع فيلاقى المستقيمين التقريبين فى ح ، ط ونأخذ عليه البعد ط ى = ح ن فتكون ى نقطة على المنحنى ثم نرسم الدائرة التى قطرها ن ى ونرسم من ح عموداً على المحور

القاطع ليقابل الدائرة فى ء فيكون ح ء = و ا

(لأن $\overline{\text{ح ء}}^{2}$ = ن ح . ح ن = ن ح . ن ط = و ن_{1} . و ن_{2} = $\overline{\text{و ا}}^{2}$) .

وبالعكس اذا علم من القطع الزائد الرأسان ا_{2} ، ا_{1} ونقطة عليه مثل ن فانه يمكن رسم المستقيمين التقريبين بعكس الطريقة السابقة .

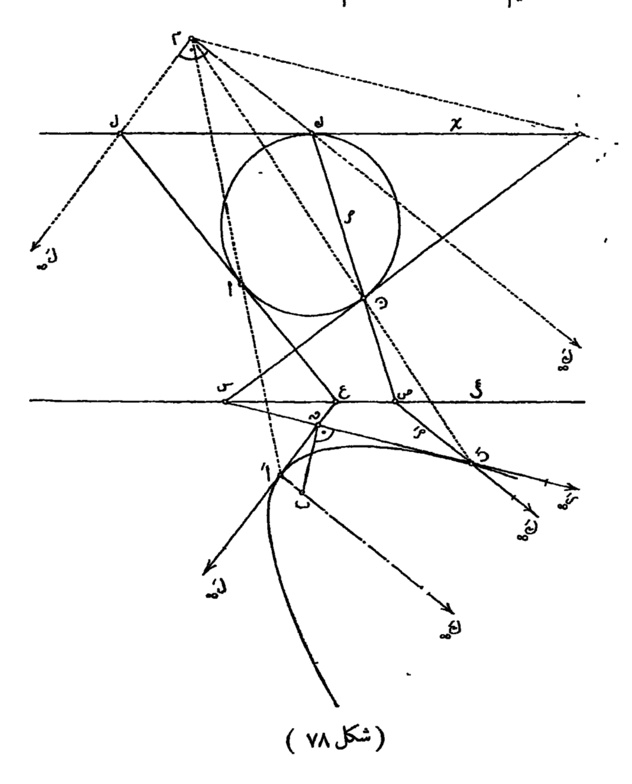
بند ٧٤ : الحالة التى يكون فيها المنحنى المؤتلف مركزياً مع الدائرة قطعاً مكافئاً — خواص جديدة

اذا علم فى (شكل ٧٨) مركز الائتلاف م ومحوره ع والمستقيم المحدد χ المعين لنوع المقطع المخروطى وعلمت دائرة تمس χ فى نقطة ك فان المنحنى المؤتلف مركزياً مع الدائرة يكون فى هذه الحالة كما قدمنا قطعا مكافئاً .

ولما كانت النقطة ك هى قطب المستقيم المحدد χ بالنسبة الى الدائرة فالنقطة التى فى اللانهاية $\text{ك}'_{\infty}$ التى تناظر ك هى مركز القطع أى أن مركز القطع المكافىء هو نقطة فى اللانهاية وهذه النقطة هى التى تحدد اتجاه المحور . وينتج من ذلك أن أقطار القطع المكافىء (المناظرة لأوتار الدائرة المارة بالنقطة ك) تمر جميعاً بالنقطة $\text{ك}'_{\infty}$ أى توازى الاتجاه م ك الذى يدل على هذه النقطة .

ولهذا السبب لا يمكن التكلم فى القطع المكافىء عن « أقطار مترافقة » بنفس المعنى المفهوم من هذه العبارة فى حالة المقاطع المركزية ومع ذلك فان كل قطر فى القطع المكافىء (أى كل مستقيم يوازى المحور) اذا تحدد وضعه تحدد اتجاه فى المستوى يسمى بالاتجاه المرافق لهذا القطر وهو اتجاه المماس فى نهاية هذا القطر وذلك لان جميع الاوتار الموازية لاتجاه هذا المماس ينصفها القطر كما سيأتى بيانه فى آخر هذا البند .

واذا رسم من م المستقيم م ل عمودياً على م ك (الذى يوازى المحور) وقاطعاً المستقيم المحدد χ فى ل ورسم من ل مماس الى الدائرة يقابل ξ فى النقطة



(شكل ٧٨)

ع فان المستقيم المرسوم من ع موازياً الى م ل يكون المماس فى الرأس للقطع المكافىء (وذلك لأن الاتجاه م ل يدل على النقطة التى فى اللانهاية ل′∞ المناظرة

الى ل والتى هى قطب المحور بالنسبة الى القطع المكافىء) . واذا كانت ا نقطة تماس المماس المرسوم من ل الى الدائرة فان النقطة ا' المناظرة اليها هى رأس القطع المكافىء ويكون المستقيم المرسوم من ا' موازياً الى م ك محور القطع المكافىء .

وليكن ρ ≡ ك ه وتراً فى الدائرة ماراً بالنقطة ك فالمستقيم ρ' المناظر له هو قطر فى القطع المكافىء نهايته ه' المناظرة الى ه . واذا كان ه س مماس الدائرة فى ه حيث س نقطة تقاطعه مع محور الائتلاف ع ووصل س ه' كان س ه' مماس القطع المكافىء فى ه' فاذا فرضنا أن س ه' يلاقى المماس فى الرأس فى النقطة و وأقيم من و عمودى على ه' س فان هذا العمود يقابل محور القطع فى البؤرة ب (راجع بند ٤٩) .

واذا علم اتجاه معين فى مجموعة القطع المكافىء فهذا الاتجاه يدل كما قدمنا على نقطة فى اللانهاية مثل ر'∞ فى هذه المجموعة تكون النقطة ر المناظرة لها فى مجموعة الدائرة إحدى نقط المستقيم المحدد χ وحيث إنه لا يمكن حينئذ رسم اكثر من مماس واحد من ر الى الدائرة (زيادة على المستقيم المحدد نفسه) لذلك كان غير ممكن رسم اكثر من مماس واحد للقطع المكافىء موازياً للاتجاه المعلوم الذى يدل على ر'∞ (زيادة على مستقيم المستوى الذى فى اللانهاية والمعتبر مماساً للقطع) .

ويبين (شكل ٧٩) بعض خواص جديدة للقطع المكافىء فالمماس فى النقطه ه يحدد النقطة ر∞ التى فى اللانهاية والتى هى قطب القطر ρ ≡ ه ك∞ المار بالنقطة ه (قارن أيضاً شكل ٧٨) . فاذا فرضت على هذا القطر نقطة ما مثل س وكان خطها القطبي بالنسبة للمنحنى هو σ ≡ ع ع١ الذى يجب أن يمر بالنقطة ر∞ أى يكون موازياً الى المماس فى ه — فانه ينتج أن

(س ء ه ك∞) = — ١ (حيث ء نقطة تقاطع ρ ، σ)

∴ ه منتصف س ى

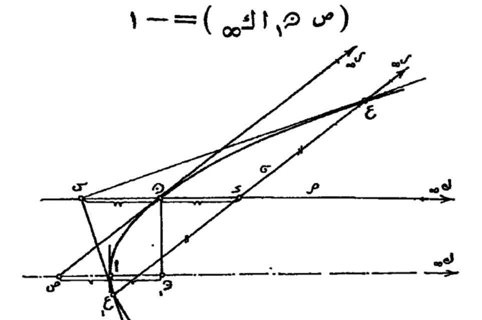
وظاهر من الشكل أيضاً أنه لما كانت النقطة ر∞ قطب القطر م كما قدمنا فان

$$(ع ع_١ ، ى ر_∞) = -١$$

∴ ى منتصف ع ع١

واذا كانت ص نقطة تقاطع المماس فى ه مع المحور وأنزل من ه العمودى ه ه١ على المحور كان ه ه١ الخط القطبي للنقطة ص بالنسبة للمنحنى وينتج من هذا أن

$$(ص ه_١ ، ا ك_∞) = -١$$



(شكل ٧٩)

أى أن ا منتصف البعد ص ه١ الذى يطلق عليه اسم تحت المماس وهذه هى الخاصية نفسها التى حصلنا عليها بطريقة أخرى فى (بند ٤٩ حـ) .

الفصل السابع

استخـــدام الائتلاف المركزى فى حل بعض المســـائل المتعلقة بالمقاطع المخروطية وفي رسم دائرة الانحناء

بند ٧٥ : الائتلاف المركزى بين أى مقطعين مخروطيين مرسومين فى مستو واحد

اذا رسم فى مستو مثل Π مقطعـان مخروطيان $ع_1$ ، $ع_2$ (أو مقطع مخروطى ودائرة باعتبار الدائرة حالة خاصة للمقاطع المخروطية) فمن حيث إنه يمكن دائما إيجاد مقطع مخروطى آخر مثل ع (غير واقع فى المستوى Π) يكون المنحنيان $ع_1$ ، $ع_2$ مسقطين له [1] فان المقطعين المخروطيين $ع_1$ ، $ع_2$ المرسومين فى المستوى Π يمكن اعتبارهما دائماً منحنيين مؤتلفين .

فاذا كانت م نقطة تقاطع مماسين مشتركين للمقطعين المخرطيين $ع_1$ ، $ع_2$ ورسم منها مستقيمات فى المستوى يقطع كل منها المنحنيين فى زوجين من النقط المتناظرة فانه يمكن اعتبار م نقطة مناظرة لنفسها مناظرة تامة (بند ٦١) واعتبار المنحنيين $ع_1$ ، $ع_2$ مؤتلفين مركزياً حيث م مركز الائتلاف (بند ٦٢) .
واذا تقاطع $ع_1$ ، $ع_2$ فى أربع نقط فان أى وتر من الاوتار المشتركة يصلح

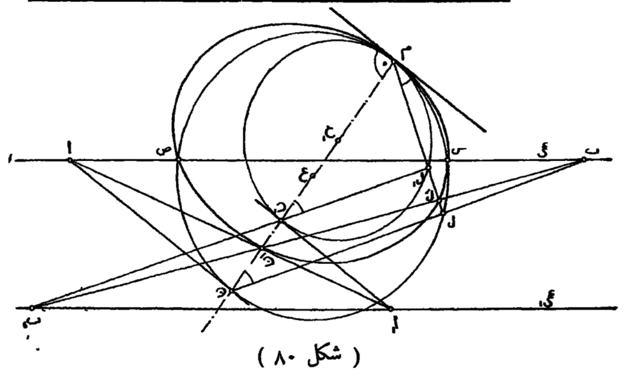
---

(١) اذا كانت $و_1$ رأساً لمخروط دليله $ع_1$ وكانت $و_2$ رأساً لمخروط آخر دليله $ع_2$ بحيث يمر المستقيم $و_1$ $و_2$ بنقطة تقاطع أى اثنين من المماسات المشتركة للمنحنيين $ع_1$ ، $ع_2$ فان المخروطين يكون لهما عندئذ مستويان مماسان مشتركان ولهذا السبب « ينحل » خط تقاطعهما (وهو منحن من الدرجة الرابعة) الى مقطعين مخروطيين يمكن اعتبار أحدهما المقطع المخروطى ع الذى مسقطاه المركزيان من $و_1$ ، $و_2$ على المستوى Π هما المنحنيان $ع_1$ ، $ع_2$ على التوالى .

كمحور لهذا الائتلاف [1] .

واذا تماس المنحنيان ع$_{1}$ ، ع$_{2}$ فى نقطة ما كانا أيضاً مؤتلفين مركزياً ويمكن اعتبار مركز الائتلاف إما نقطة التماس نفسها (باعتبارها نقطة تلاقى مماسين مشتركين متتاليين) ويكون محور الائتلاف هو وتر تقاطع المنحنيين (اذا تقاطعا) أو يكون مركز الائتلاف نقطة تقاطع المماسين المشتركين الآخرين (اذا كانا حقيقيين) ويكون محور الائتلاف فى هذه الحالة هو المماس المشترك فى نقطة التماس (باعتباره وتراً لتقاطع المنحنيين) .

بند ٧٦ : الائتلاف المركزى بين المقطع المخروطى واية دائرة مماسة له



(شكل ٨٠)

لنفرض فى (شكل ٨٠) أنه يراد رسم المقطع المخروطى المؤتلف مع الدائرة التى مركزها ع ولنفرض أننا اخترنا مركزاً لهذا الائتلاف إحدى نقط الدائرة

(١) اذا كانت س إحدى النقطتين غير الواقعتين على محور الائتلاف ووصل م س فقطع المنحنيين ع$_{1}$ ، ع$_{2}$ فى س$_{1}$ ، س$_{2}$ على التوالى فان النقطة المناظرة الى س باعتبارها إحدى نقط ع$_{1}$ تكون س$_{2}$ وباعتبارها إحدى نقط ع$_{2}$ تكون س$_{1}$ أى أن النقطة س لا تكون مناظرة لنفسها فى هذه الحالة .

ولتكن م ومحوراً لمستقيما حيثما اتفق مثل ع . ولكى يتعين الائتلاف المركزى نفرض أن النقطتين ه ، ه′ هما زوج من النقط المتناظرة فى هذا الائتلاف .

فلما كانت النقطة م مناظرة لنفسها وجب أن يمر المنحنى المؤتلف مع الدائرة بهذه النقطة ولما كان مماس الدائرة فى م مستقيما ماراً بالمركز م فالمستقيم المناظر له (وهو مماس المنحنى فى م) يجب إذن أن ينطبق عليه . أى أن المنحنى المؤتلف مركزياً مع الدائرة فى هذه الحالة هو مقطع مخروطى يمس الدائرة فى م ويمر بالنقطتين س ، ص لأنهما نقطتى تقاطع الدائرة مع محور الائتلاف ع .

فاذا كان ع$_1$ مركز دائرة جديدة تمس الدائرة الأولى والمنحنى فى م نفسها فان المقطع المخروطى يكون مؤتلفاً مركزياً مع هذه الدائرة أيضاً (بند ٧٥) . فاذا اعتبرنا م مركزاً لهذا الائتلاف فان المستقيمات المتناظرة تتقاطع على محور جديد ع$_1$ للائتلاف ويتضح بسهولة من تشابه المثلثين ه ا ب ، ه$_1$ ا$_1$ ب$_1$ شكلا ووضعاً بالنسبة الى النقطة ه′ كمركز للتشابه (وينتج هذا التشابه من توازى الضلعين ه ب ، ه$_1$ ب$_1$ باعتبارهما وترين متناظرين فى الدائرتين ع ، ع$_1$ المتشابهتين شكلا ووضعاً بالنسبة الى م [1] وتوازى مماسى الدائرتين

---

(١) معلوم أن الدوائر المرسومة فى مستو واحد تشترك جميعاً فى نقطتين تخيليتين فى اللانهاية يطلق عليهما اسم « النقطتين الدائريتين فى اللانهاية » (انظر بند ٩٤) . ولهذا السبب تتعين الدائرة بثلاث نقط بدلا من خمس كبقية المقاطع المخروطية ولهذا السبب أيضاً تتقاطع أى دائرتين مرسومتين فى المستوى فى نقطتين اثنتين — بدلا من أربع — (حقيقيتين أو تخيليتين) . فاذا اعتبرنا نقطة تقاطع مماسين مشتركين لمثل هاتين الدائرتين بصفتهما مقطعين مخروطيين (بند ٧٥) — مركزاً للائتلاف بينهما فان محور الائتلاف يكون إما وتر التقاطع الذى يصل النقطتين الدائريتين فى اللانهاية أى المستقيم الذى فى اللانهاية وفى هذه الحالة تكون الدائرتان متشابهتين شكلا ووضعاً بالنسبة للمركز أو يكون المحور هو الوتر الذى يصل نقطتى التقاطع الباقيتين (حقيقيتين أو تخيليتين) وفى هذه الحالة تكون الدائرتان مؤتلفتين ائتلافا مركزياً عادياً .

فى ۿ ؟ ۿ$_{1}$) أن ع ؟ ع$_{1}$ متوازيان . وإذن يمكننا أن نقرر :

اذا تماس مقطع مخروطى ودائرة فى نقطة مثل م واعتبرت م مركزاً لائتلاف بينهما فانه محور الائتلاف لا يتغير اتجاهه اذا تحرك مركز الدائرة — مع بقائها ماسة للمنحنى فى م — على العمودى المشترك للمنحنى والدائرة .

بند ٧٧ : امثلة تطبيقية

تطبيقاً لما تقدم فى البندين السابقين نذكر فيما يلى بعض الامثلة على استخدام الائتلاف المركزى بين الدائرة والمقطع المخروطى فى حل كثير من المسائل المتعلقة بالمنحنى الأخير اذا كان بين العناصر المعلومة المحددة له نقطة بالمماس فيها (أى نقطتان متتاليتان فى حالة اعتبار المنحنى مجموعة من النقط) أو مماسان متتاليان (أى مماس بنقطة تماسه) أو غير متتاليين (١) .

المثال الاول

المعلوم مستقيمان α ؟ β متقاطعان فى م وثلاث نقط ا' ؟ ب' ؟ حـ' (شكل ٨١) والمطلوب :

أولا : رسم المماس فى حـ' لأحد المقاطع المخروطية التى تمر بالنقط الثلاث وتمس المستقيمين المعلومين .

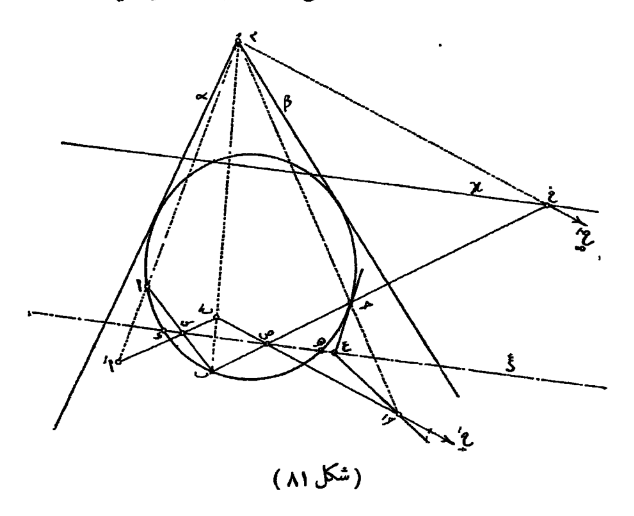
ثانياً : تحديد نوع المقطع المخروطى الذى تعين فى (أولا) .

ثالثا : ايجاد عدد المقاطع المخروطية الممكنة .

لذلك نرسم دائرة حيثما اتفق تمس المستقيمين المعلومين α ؟ β ونعتبرها مؤتلفة مركزياً مع جميع المقاطع المخروطية التى تمس المستقيمين وتمر بالنقط

(١) لرسم دائرة مؤتلفة مركزيا مع مقطع مخروطى اذا كان معلوما بخمس نقط مختلفة ليس بينها نقطتان متتاليتان أنظر (بند ١٩٩) .

الثلاث حيث م مركز الائتلاف (بند ٧٥) ثم نصل م أ′ ، م ب′ ، م حـ′ فتكون النقط المناظرة للنقط المعلومة واقعة على هذه المستقيمات وعلى الدائرة. ولما كان كل واحد من هذه المستقيمات يقطع الدائرة فى نقطتين فان كلا من هاتين النقطتين تصلح أن تكون النقطة المناظرة لنقطة المنحنى الواقعة معها على مستقيم واحد مار بالمركز. فلنفرض أننا اخترنا النقط ا ، ب ، حـ على الدائرة لتناظر نقط المنحنى المعلومة أ′ ، ب′ ، حـ′ على التوالى فهذا الاختيار يحدد واحداً



(شكل ٨١)

(ولنرمز اليه بالرمز ρ) من المقاطع التى تمر بالنقط الثلاث وتمس المستقيمين α ، β ويكون محور الائتلاف ﺀ فى هذه الحالة هو المستقيم الذى يصل النقطة س وهى نقطة تقاطع ا ب ، أ′ ب′ بالنقطة ص وهى نقطة تقاطع ب حـ ، ب′ حـ′. فاذا كان مماس الدائرة فى حـ يقابل ﺀ فى النقطة ع ووصل ع حـ′ كان ع حـ′

المماس المطلوب للمقطع المخروطى ϱ فى النقطة حـ′ .

ولمعرفة نوع المقطع المخروطى ϱ المشار اليه آنفاً نجد النقطة خ فى مجموعة الدائرة المناظرة لأية نقطة فى اللانهاية خ′∞ باعتبارها مرسومة فى مجموعة المقطع المخروطى (بند ٦٧) . فاذا رسم من خ المستقيم χ موازياً للمحور ξ كان χ المستقيم المحدد المعين لنوع المقطع (بند ٧١) . ومن حيث إن χ يقطع الدائرة فى (شكل ٨١) فى نقطتين مختلفتين وجب أن يكون المقطع المخروطى ϱ (الذى يمر بالنقط ا ، ب ، حـ ، ى ، هـ مماساً للمستقيمين α ، β) قطعاً زائداً .

ولتعيين عدد المقاطع الممكنة — وهو المطلوب أخيراً — نجعل الدائرة المؤتلفة مركزياً مع المنحنيات تمر باحدى النقط المعلومة ولتكن ا′ ماسة للمستقيمين المعلومين α ، β [1] ثم نصل م ب′ ، م حـ′ فيقطعان الدائرة فى ب ، ب١ ، حـ ، حـ١ فالمستقيم المناظر للمستقيم ب′ حـ′ يجوز أن يكون واحداً من المستقيمات الأربعة : ب حـ أو ب حـ١ أو ب١ حـ أو ب١ حـ١ فاذا تقاطع ب′ حـ′ مع هذه المستقيمات فى النقط س١ ، س٢ ، س٣ ، س٤ فان أى واحدة منها يجوز اعتبارها واقعة على محور الائتلاف ولما كان هذا المحور لابد أن يمر بالنقطة ا′ الموجودة على الدائرة والمنحنى معاً والتى لذلك تناظر نفسها فان أى مستقيم من المستقيمات الاربعة : ا′ س١ ، ا′ س٢ ، ا′ س٣ ، ا′ س٤ يصلح أن يكون محوراً للائتلاف . وكل واحد من هذه المحاور يعين مقطعاً مخروطياً واحداً .

ينتج مما تقدم أن عدد المقاطع المخروطية التى تمر بثلاث نقط معلومة وتمس مستقيمين معلومين هو اربعة .

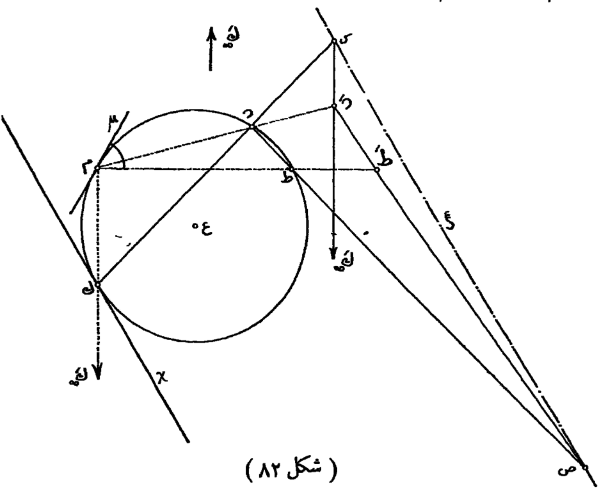
---

(١) نترك للقارىء رسم شكل يوضح هذا البرهان .

المثال الثـانى

قذف مقذوف فى الفراغ من نقطة معلومة م على سطح الارض فاذا علمت الزاوية التى يميل بها خط سير المقذوف على الافق عند نقطة الابتداء أى علم المماس μ لهذا الخط فى م وعلمت أيضا نقطة أخرى من نقطه مثل ٯ′ فالمطلوب تعيين المكان الذى يسقط فيه المقذوف الى الارض (شكل ٨٢) .

معروف من مبادىء المكانيكا أن خط سير المقذوف هو قطع مكافىء محوره مستقيم رأسى وقد علم من هذا المنحنى نقطة الابتداء م والمماس فيها μ وأيضا



(شكل ٨٢)

النقطة ٯ′ فأول ما يتبادر الى الذهن هو هل تكفى هذه المعالم لتعيين القطع المـكافىء ؟ الجواب على هذا السؤال بالايجاب لأنه حيث إن اتجاه المحور معلوم (الاتجاه الرأسى) فمعنى ذلك أن نقطة تماس المستقيم الذى فى اللانهاية مع المنحنى

معلومة أيضا وإذن يكون المعلوم من القطع المكافىء النقطة م والمماس فيها والنقطة ﮬ' وكذا المستقيم الذى فى اللانهاية باعتباره مماسا ونقطة تماسه ومجموع هذه العناصر خمس نقط (لأن النقطة بالمماس فيها تحسب بنقطتين) وهذا يعين القطع المكافىء تمام التعيين (قطع مكافىء واحد) .

بعد هذا نختار دائرة حيثما اتفق تمس المماس المعلوم μ فى النقطة م ونعتبرها مؤتلفة مركزياً مع القطع المكافىء حيث م مركز الائتلاف (بند ٧٥) ونصل م ﮬ' ، م ك'$_\infty$ (حيث ك'$_\infty$ هى النقطة التى فى اللانهاية التى يحددها الاتجاه الرأسى المعلوم لمحور القطع) فيقطعان الدائرة فى النقطتين المناظرتين ﮬ ، ك على التوالى ويكون مماس الدائرة فى ك هو المستقيم المحدد χ الذى يناظر مماس القطع المكافىء فى النقطة ك'$_\infty$ أى يناظر المستقيم الذى فى اللانهاية باعتباره مرسوما فى مجموعة القطع المكافىء فاذا تقاطع المستقيمان المتناظران ك ﮬ ، ك'$_\infty$ ﮬ' فى النقطة س كانت س نقطة على محور الائتلاف ع الذى يمر بها موازيا للمستقيم المحدد χ .

وحيث إن المطلوب هو تعين المكان الذى يسقط فيه المقذوف الى الارض فمعنى ذلك أنه يراد ايجاد نقطة تقاطع القطع المكافىء مع المستقيم الافقى (العمودى على اتجاه المحور) المرسوم من نقطة الابتداء م فاذا أسمينا هذه النقطة ط' كانت النقطة ط المناظرة لها هى نقطة تقاطع المستقيم الافقى المشار اليه مع الدائرة (لأن هذا المستقيم يناظر نفسه) فلتعيين ط' نصل ﮬ ط فيقطع محور الائتلاف ع فى ص ثم نصل ص ﮬ' فيقابل المستقيم الافقى م ط فى النقطة ط' وهى مكان السقوط.

المثال الثالث

المطلوب انشاء أحد المقاطع المخروطية التى تمر بنقطتين معلومتين ا' ، ب' وتمس ثلاثة مستقيمات معلومة α' ، β' ، γ' وايجاد عدد الحلول الممكنة .

اذا رسمت دائرة تمس اثنين من المستقيمات المعلومة مثل α′ ، β′ واعتبرت مؤتلفة مركزياً مع المقاطع المخروطية فانه يمكن بطريقة شبيهة [١] بالطريقة المستعملة لحل الجزء الاول من المثال الاول فى (شكل ٨١) تعيين أحد محاور الائتلاف الذى يحدد واحداً من المقاطع المخروطية الممكنة ثم انشاء هذا المقطع كما قدمنا فى (بند ٧٢) .

ولمعرفة عدد الحلول الممكنة نرسم الدائرة التى تمر بالنقطتين المعلومتين ا′ ، ب′ وتمس أحد المستقيمات الثلاثة وليكن α′ ثم نعتبر هذه الدائرة مؤتلفة مركزياً مع المنحنيات ونعتبر ا′ ب′ محوراً لهذا الائتلاف ففى هذه الحالة حيث إن المماس المشترك α′ هو مستقيم مناظر لنفسه وجب أن يكون مركز الائتلاف واقعا عليه فاذا تقاطع المماسان β′ ، γ′ مع محور الائتلاف فى النقطتين س ، ص على التوالى ورسمت من هاتين النقطتين مماسات للدائرة فانه يمكن اعتبار أى واحد من مماسى الدائرة المتقاطعين فى س مناظراً للماس β′ واعتبار أى واحد من المماسين المتقاطعين فى ص مناظراً للمماس γ′ . وبهذه الطريقة يمكن الحصول على أربع نقط مختلفة (واقعة على α′) يمكن اعتبار كل منها مركزاً لائتلاف يعين مقطعا مخروطيا واحداً . إذن عدد الحلول أربعة أى أن هناك أربعة مقاطع مخروطية يمكن أن تمر جميعاً بنقطتين معلومتين وتمس ثلاثة مستقيمات معلومة .

المثال الرابع

المطلوب انشاء أحد المقاطع المخروطية التى تمر بنقطتين معلومتين ا′ ، ب′ وتمس مستقيمين متقاطعين معلومين α′ ، β′ اذا علم أن ا′ ب′ قطر فى المنحنى .

---

(١) يلاحظ أنه اذا تقاطع المستقيمان ا′ ب′ ، γ′ فى نقطة مثل هـ′ وكانت هـ (الواقعة على ا ب) النقطة المناظرة الى هـ′ فانه يمكن اعتبار أحد المماسين المرسومين من هـ الى الدائرة هو المستقيم γ المناظر الى γ′ .

نترك للقارىء حل هذا المثال على منوال الامثلة السابقة مع ملاحظة أن المستقيم المحدد χ (المعين لنوع المقطع المخروطى) يمر فى هذه الحالة بقطب الوتر ا ب (المناظر الى ا' ب') بالنسبة للدائرة وأنه اذا رسم من م مواز للمستقيم ا' ب' فقطع ا ب فى نقطة فان المستقيم المحدد χ يمر أيضا بهذه النقطة .

بند ٧٨ : دائرة الانحناء

(ا) دائرة الانحناء فى أية نقطة على مقطع مخروطى

اذا فرضنا فى (شكل ٨٠) أن المركز ع للدائرة الاولى الماسة للمقطع المخروطى فى م والمتقاطعة معه فى النقطتين س ، ص — أخذ فى التحرك على العمودى المشترك م ع بحيث تأخذ نقطتا التقاطع المشار اليهما فى الاقتراب من النقطة م فان الوضع النهائى للدائرة الماسة عندما تنطبق إحدى هاتين النقطتين ولتكن س على النقطة م يكون دائرة الانحناء للمقطع المخروطى فى النقطة م نفسها لانها تكون مشتركة مع المنحنى فى هذه الحالة فى ثلاث نقط متتالية (بند ٣٦) . ولما كانت دائرة الانحناء فى م — مثل جميع الدوائر الاخرى التى تمس المنحنى فى م — يمكن اعتبارها مؤتلفة معه مركزيا ولما كان محور الائتلاف (الذى يوازى الاتجاه الثابت للمحاور الاخرى) يمر فى هذه الحالة الخاصة بالنقطة م نفسها وهى مركز الائتلاف وذلك لانطباق النقطة س عليها فاننا نستطيع أن نقول :

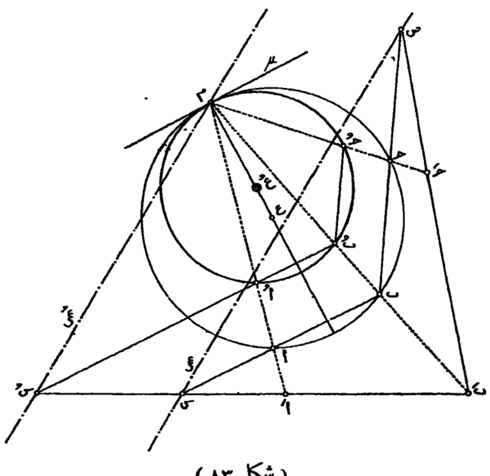
محور الائتلاف بين مقطع مخروطى ودائرة الانحناء له فى احدى نقطه م هو المستقيم المرسوم من م موازياً لمحور الائتلاف بين المقطع وأية دائرة أخرى ماسة له فى م اذا اعتبرنا م فى الحالتين مركزاً للائتلاف .

فاذا لاحظنا أن أى وترين فى الدائرتين مناظرين لوتر واحد فى المقطع المخروطى يكونان متوازيين (قارن الوترين ه ل ، $ه_١ ل_١$ المناظرين الى ه' ل'

فى شكل ٨٠) أمكن باستخدام النظرية السابقة رسم دائرة الانحناء فى إحدى نقط مقطع مخروطى معلوم وأمكن كذلك بالعكس انشاء المقطع المخروطى اذا علمت منه دائرة الانحناء فى إحدى نقطه (وتحسب بثلاث نقط) ونقطتان أخريان كما يتبين من المثالين الآتيين :

(١) اذا علم من مقطع مخروطى النقطة م والمماس فيها μ وكذا النقط أ′ ، ب′ ، حـ′ فالمطلوب رسم دائرة الانحناء فى م (شكل ٨٣) .

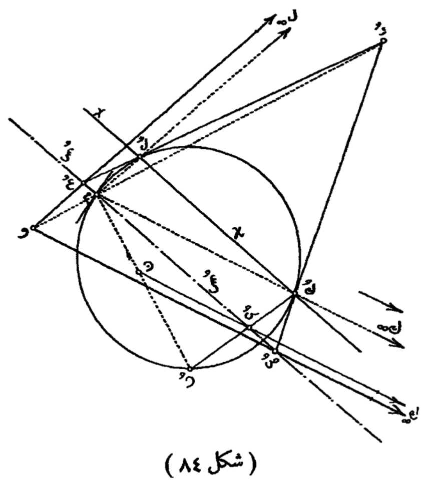
لذلك نرسم دائرة ما مركزها ع تمس المماس المعلوم μ فى النقطة م



(شكل ٨٣)

ونعتبرها مؤتلفة مع المقطع المخروطى المعلوم حيث م مركز الائتلاف . ثم نصل م أ′ ، م ب′ ، م حـ′ فتقطع الدائرة فى النقط أ ، ب ، حـ المناظرة الى أ′ ، ب′ ، حـ′ على التوالى . ثم نعين محور الائتلاف ى بين الدائرة ع والمنحنى ونرسم

من م مستقيما ع′ موازيا للمحور ع فيكون ع′ بمقتضى النظرية السابقة هو محور الائتلاف بين المقطع ودائرة الانحناء المطلوب رسمها . فاذا تقاطع المستقيم ا′ ب′ مع المحور الجديد ع′ فى النقطة س′ وجب أن يمر الوتر ا″ ب″ فى دائرة الانحناء بالنقطة س′ موازيا الى الوتر ا ب فى الدائرة ع لأن هذين الوترين يناظران وتراً واحداً ا′ ب′ فى المقطع المخروطى . فاذا قابل الوتر ا″ ب″ الشعاعين م ا′ ، م ب′ فى النقطتين ا′ ، ب′ على التوالى كانت الدائرة المارة بالنقط ا″ ، ب″ ، م (والتى تمس أيضا μ) هى دائرة الانحناء للمقطع المخروطى فى م .



(شكل ٨٤)

(٢) المعلوم من قطع زائد نقطتان م ، د وداًئرة الانحناء فى م وكذا اتجاه أحد المستقيمين التقريبين وقد رمزنا اليه بالرمز ك∞ والمطلوب رسم المستقيمين التقريبين نفسيهما (شكل ٨٤)

حيث إن دائرة الانحناء فى إحدى نقط المنحنى تشترك معه فى ثلاث نقط متتالية ومتحدة فى هذه النقطة فدائرة الانحناء فى نقطة معلومة على منحن تحسب كما قدمنا بثلاث نقط وحيث ن الاتجاه المعلوم ك∞ لأحد المستقيمين التقريبين يحدد إحدى نقطتى القطع الزائد اللتين فى اللانهاية ولما كانت النقطة ﻫ معلومة أيضاً فينتج من ذلك أن القطع الزائد قد تحدد بهذه النقط الخمس المعلومة .

نعتبر الآن الائتلاف المركزى بين دائرة الانحناء والقطع الزائد حيث م هى مركز الائتلاف ونصل م ﻫ ، م ك∞ فيقطعان الدائرة فى النقطتين ﻫَ ، كَ المناظرتين الى ﻫ ، ك∞ على التوالى . فاذا تقاطع المستقيمان المتناظران ﻫَ كَ ، ﻫ ك∞ فى النقطة سَ كانت سَ نقطة على محور الائتلاف عَ الذى يجب بمقتضى النظرية السابقة أن يمر بمركز الائتلاف م أى أن عَ ≡ م سَ وبذلك يتعين المحور . ويكون المستقيم χ المرسوم من كَ (التى تناظر النقطة ك∞ التى فى اللانهاية) موازياً للمحور عَ هو المستقيم المحدد المعين لنوع المقطع المخروطى فاذا قطع هذا المستقيم الدائرة فى لَ كانت لَ النقطة المناظرة الى نقطة القطع الزائد الثانية ل∞ التى فى اللانهاية والتى يدل عليها اتجاه المستقيم م لَ ويكون المستقيمان المناظران لمماسى الدائرة فى لَ ، كَ هما المستقيمان التقريبيان المطلوبان [1] .

(ب) دائرة الانحناء فى رأس مقطع مخروطى

اذا فرضنا فى (شكل ٨٠) أن محور الائتلاف ع بين المقطع المخروطى والدائرة ع الماسة له فى م — يوازى المماس المشترك فى م فان النقطتين س ، ص

---

(١) اذا حدث أن مس المستقيم المحدد χ المرسوم من كَ موازياً للمحور عَ دائرة الانحناء فى كَ نفسها كان معنى ذلك أن المنحنى قطع مكافىء اتجاه محوره ك∞ .

(نقطتى تقاطع المنحنيين) تكونان متماثلتين بالنسبة للعمودى المشترك م ع . فاذا تحرك المركز ع للدائرة — مع بقائها ماسة للمنحنى فى م — على هذا العمودى بحيث تقترب س من م فان ص تقترب أيضاً بنفس المقدار من م . وفى الوضع النهائى عند ما تنطبق س على م تنطبق أيضاً ص على م ومعنى ذلك أن دائرة الانحناء فى مثل هذه الحالة تشترك مع المنحنى فى أربع نقط متحدة فى م وينطبق عندئذ محور الائتلاف بين المنحنى ودائرة الانحناء على نفس المماس المشترك فى م. وهذا يحدث اذا كانت م رأساً من رؤوس المقطع المخروطى أو بعبارة أخرى :

دائرة الانحناء فى رأس مقطع مخروطى تشترك معه فى أربع نقط متتالية ومتحدة فى الرأس[1]

وإذن يكفى أن تعلم نقطة واحدة ودائرة الانحناء عند رأس معلومة فى مقطع مخروطى لكى يتحدد هذا المقطع .

وبالنظر الى أهمية دوائر الانحناء فى رؤوس المقاطع المخروطية إذ بواسطتها يمكن إنشاء المقاطع فى سرعة ودقة فسنذكر فيما يلى كيفية رسم هذه الدوائر اذا كان المقطع المخروطى معلوما بواسطة محاوره وبؤره :

القطع الناقص (شكل ٨٥ ا)

نكمل المستطيل حـ و ا هـ ثم ننزل من هـ العمودى على القطر حـ ا لهذا المستطيل فيقابل المحورين فى م ٢ ، م ١ فيكونان هما مركزا الانحناء فى الرأسين ا ٢ حـ على التوالى ويكون نصفا قطرى الانحناء هما م ا ٢ ، م ١ حـ .

القطع الزائد (شكل ٨٥ ب)

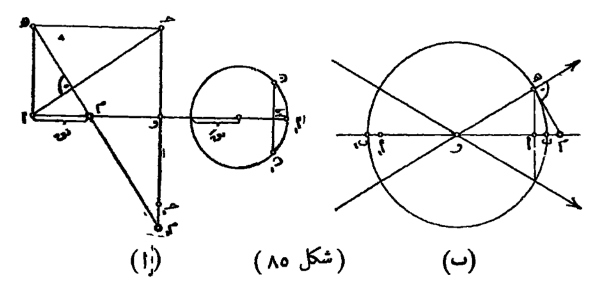
نرسم المماس فى الرأس ا فاذا قابل أحد الخطين التقريبين فى هـ وأقيم من هـ

(١) يلاحظ أن دائرة الانحناء فى مثل هذه الحالة لا تعبر المنحنى عند الرأس كما هو الحال عند النقط الاخرى .

العمود على هذا الخط التقربى فان هذا العمود يقابل المحور القاطع فى المركز م لدائرة الانحناء فى الرأس ا (نصف قطر الانحناء = م ا) .

القطع المكافىء

نصف قطر الانحناء فى الرأس يساوى ضعف البعد بين الرأس والبؤرة .



(ا) (شكل ٨٥) (ب)

وللبرهنة على ما تقدم نفرض فى حالة القطع الناقص (شكل ٨٥ ا) دائرة نصف قطرها نو′ تمس المنحنى فى الرأس $ا_1$ وتقطعه فى النقطتين ى ، $ى_1$ المتماثلين بالنسبة للمحور الاكبر ثم نبرهن على أن

$$نو = نهــــا_{س \to الصفر} نو' = \frac{\overline{و\,حـ}^2}{و\,ا_1}$$

حيث نو هو نصف قطر الانحناء فى $ا_1$ أو ا . كذلك يمكن البرهنة اذا رمزنا الى نصف قطر الانحناء فى حـ أو $حـ_1$ بالرمز $نو_1$ على أن

$$نو_1 = \frac{\overline{و\,ا}^2}{و\,حـ}$$

ومن تشابه المثلثات التى يمكن الحصول عليها بالطريقة المشروحة آنفا يمكن البرهنة بسهولة على أن $\text{م ا} = \frac{\overline{\text{و ح}}^{2}}{\text{و ا}} = \text{ن}$ وأن $\text{م}_{1}\text{ح} = \frac{\overline{\text{و ا}}^{2}}{\text{و ح}} = \text{ن}_{1}$

أما فى حالتى القطعين الزائد والمكافىء فيمكن استنتاج البرهان مباشرة من النظرية العامة الآتية (مع ملاحظة أن البؤرة الثانية للقطع المكافىء هى نقطة فى اللانهاية) :

مركز الانحناء فى رأس منحن من الدرجة الثانية هو النقطة التى توافق الرأس توافقياً بالنسبة للبؤرتين (١) .

وذلك لأن المماس والعمودى فى أية نقطة على المنحنى مثل هـ (شكل ٥٤) يقابلان المحور (المار بالبؤرتين) فى نقطتين مترافقتين توافقياً بالنسبة للبؤرتين . ولما كانت الدائرة التى مركزها نقطة تقابل العمودى مع هذا المحور والتى تمس المنحنى فى هـ لا بد أن تمسه أيضاً فى النقطة و المماثلة الى هـ فان الوضع النهائى لنقطة تقابل العمودى مع المحور عند ما تنطبق هـ ، و على ح_{2} يكون مركز الانحناء فى ح_{2} (لان الدائرة فى هذه الحالة تشترك مع المنحنى فى أربع نقط متحدة فى ح_{2}) . ولما كانت الخاصية التوافقية السالفة الذكر لا تتغير باقتراب هـ ، و من ح_{2} ولما كانت نقطة تقاطع المماس مع المحور تؤول فى الوضع النهائى الى نقطة التماس ح_{2} ذاتها لذلك كانت النظرية السابقة صحيحة (٢) .

---

(١) المعادلة السابقة التى تعين نصف قطر الانحناء فى إحدى رأسى القطع الناقص الواقعتين على المحور الاكبر يمكن استنتاجها كذلك بسهولة من هذه النظرية .

(٢) يلاحظ أن مركز الانحناء م فى (شكل ٨٥ب) هو قطب المماس فى الرأس ا بالنسبة الى الدائرة المرسومة على ب ب_{1} كقطر .

الفصل الثامن

الهندسة الاسقاطية للمقاطع المخروطية

<u>بند ٧٩ : تعريف</u>

تبحث الهندسة الاسقاطية فى الخواص الهندسية التى لا تتغير بالاسقاط أيا كان وهى الخواص التى أطلقنا عليها فى (بند ٣٤) اسم الخواص الاسقاطية .

وقد رأينا فى الفصول السابقة أمثلة كثيرة على هذه الخواص الاسقاطية . أما فى هذا الفصل فسنشرح كيفية استخدام هذه الخواص فى استنباط طرق جديدة لرسم المقاطع المخروطية وحل بعض المسائل المتعلقة بها . وسنبدأ أولا فى هذا البند والبند التالى بتلخيص بعض الحقائق والنظريات التى سردناها متفرقة فى الفصول السابقة والتى سنحتاج اليها لتحقيق الغرض المتقدم .

فلبيان الاساس الذى يقوم عليه علم الهندسة الاسقاطية نفرض أن سـ شكل موجود فى مستو مثل A وأن سـ′ هو المسقط المركزى [1] للشكل سـ من نقطة ما فى الفراغ على المستوى A′ ثم نفرض أننا أسقطنا الشكل سـ′ من نقطة أخرى فى الفراغ على مستو جديد مثل A″ فحصلنا بذلك على شكل مستو جديد سـ″ وأننا أسقطنا سـ″ مرة أخرى على مستو جديد وهكذا فمن الواضح أن العلاقة الهندسية بين أى اثنين من هذه الاشكال هى بحيث توجد بين نقطها ومستقيماتها مناظرة الفرد للفرد . ومعنى ذلك كما قدمنا فى (بند ٥٦) أن أى اثنين غير متتاليين من هذه الاشكال مثل سـ ، سـ″ هما شكلان مؤتلفان أو مؤتلفان اسقاطيا أو اسقاطيان . فاذا كان الشكلان متتاليين أى موضوعين وضعاً

---

(١) نقول المسقط المركزى لأنه أعم من المسقط المتوازى فما ينطبق على الاول ينطبق على الثانى .

خاصاً بحيث تمر المستقيمات الواصلة بين النقط المتناظرة بنقطة واحدة (مركز الاسقاط أو الائتلاف) وذلك مثل الشكلين سه ، سه′ أو سه′ ، سه″ فانهما يكونان مؤتلفين أيضا ولكن يقال لهما على الخصوص إنهما مؤتلفان مركزياً أو منظورياً (بند ٦٣) . ويقال كذلك إن بين الشكلين غير المتتاليين سه ، سه″ مناظرة اسقاطية أما الشكلان سه ، سه′ فيقال إن بينهما مناظرة منظورة (فوق كونها إسقاطية أيضاً) .

فهذه المناظرة الاسقاطية أو مناظرة الفرد للفرد بين نقط ومستقيمات شكلين واقعين فى مستويين مختلفين أو فى مستو واحد هى أساس الهندسة الاسقاطية لأن جميع الخواص المنبنية عليها — كالنسب المضاعفة والخواص القطبية — هى كما بينا فى الفصول السابقة خواص إسقاطية لا تتغير بالاسقاط مهما تعاقب أو تعدد .

بند ٨٠ : الصفوف والحزم المؤتلفة والمنظورة

الصف أو صف النقط هو مجموعة النقط الواقعة على مستقيم واحد يسمى حامل الصف . وحزمة المستقيمات هى مجموعة المستقيمات (أشعة الحزمة) الواقعة فى مستو واحد والمارة بنقطة واحدة يطلق عليها اسم رأس الحزمة (راجع بند ٥٣) .

فاذا كان λ ، λ′ حاملين لصفين من النقط ا ب حـ ء . . . ، ا′ ب′ حـ′ ء′ . . . موجودين فى شكلين مؤتلفين بحيث تتناظر نقطهما المختلفة قيل للصفين إنهما مؤتلفان أو اسقاطيان (أو مؤتلفان إسقاطيا) . وقد رأينا فى (بند ٥٨) أن النسبة المضاعفة لأى أربع نقط من صف تساوى النسبة المضاعفة للنقط الاربع المناظرة لها من الصف المؤتلف معه ويعبر عن هذه العلاقة اصطلاحاً بالعبارة :

(ا ب حـ ء . . .) = (ا′ ب′ حـ′ ء′ . . .)

وإذا كان λ ، λ′ موجودين فى شكلين مؤتلفين مركزيا أى بحيث تمر

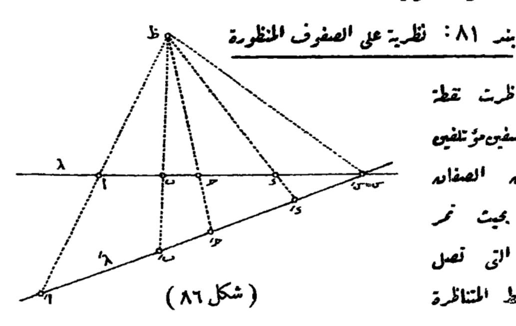
المستقيمات ا ا′ ؛ ب ب′ . . . الواصلة بين أزواج النقط المتناظرة بنقطة واحدة قيل للصفين على الخصوص إنهما *منظوران* أو *مؤتلفان مركزياً* (فوق كونهما إسقاطيين أيضاً) وسميت النقطة *مركز المنظورية* .

و بالمثل اذا تناظرت حزمتان من المستقيمات رأساهما ل ؛ ل′ فى شكلين مؤتلفين كانت النسبة المضاعفة لاى أربعة مستقيمات فى إحدى الحزمتين مساوية للنسبة المضاعفة للمستقيمات الاربعة المناظرة لها فى الحزمة الاخرى (بند ٥٩) ويقال لمثل هاتين الحزمتين إنهما حزمتان *مؤتلفتان أو إسقاطيتان* . فاذا كانت المستقيمات المتناظرة فى الحزمتين المؤتلفتين هى $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \ldots$ ؛ $\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'\ \ldots$ فانه يعبر عن هذه العلاقة اصطلاحا بالعبارة :

$$(\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \ldots) = (\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'\ \ldots)$$

واذا كانت الحزمتان ل ؛ ل′ موجودتين فى شكلين مؤتلفين مركزيا أى بحيث تتلاقى أزواج المستقيمات المتناظرة $\alpha\ \alpha'$ ؛ $\beta\ \beta'$ ؛ $\gamma\ \gamma'$ ... فى الحزمتين على مستقيم واحد (محور الائتلاف المركزى) قيل للحزمتين إنهما على الخصوص *منظورتان* أو *مؤتلفتان مركزياً* (فوق كونهما إسقاطيتين أيضاً) وسمى محور الائتلاف فى هذه الحالة *بمحور المنظورية*

بند ٨١ : نظرية على الصفوف المنظورة



(شكل ٨٦)

اذا تناظرت نقط تقابل حاملى صفين مؤتلفين نفسها كان الصفان منظورين بحيث تمر المستقيمات التى تصل أزواج النقط المتناظرة

جميعاً بنقطة ثابتة هي مركز المنظورية ظ .

للبرهنة على هذه النظرية نفرض فى (شكل ٨٦) أن نقطة تقابل الحاملين λ ، λ' للصفين المؤتلفين ا ب حـ . . . ، ا' ب' حـ' . . . تناظر نفسها أى أن س ≡ س' ونفرض أن ظ هى نقطة تقاطع المستقيمين ا ا' ، ب ب' ونصل ظ حـ ونفرض أنه يقطع الحامل λ' فى نقطة اخرى غير حـ' ولتكن حـ'١ . فبناء على نظرية پاپس (بند ٥٣ و) يكون

(ا ب حـ س) = (ا' ب' حـ'١ س')

ولكن بما أن الصفين λ ، λ' مؤتلفان فرضا وفيهما ا ، ا' ، ب ، ب' ، حـ ، حـ' ، س ، س' أزواج من النقط المتناظرة فيجب أن يكون

(ا ب حـ س) = (ا' ب' حـ' س')

وينتج من ذلك مباشرة أن حـ'١ لابد أن تنطبق على حـ' وإذن تكون النظرية السابقة صحيحة .

بند ٨٢ : قاعدة المثاناة أو المزاوجة — نظرية على الحزم المنظورة

اذا تأمل القارىء فى ما ذكر فى (بند ٨٠) عن الحزم المؤتلفة والمنظورة وجد هناك نوعا من التشابه فى المعنى بينه وبين ما ذكر قبل ذلك فى نفس البند عن الصفوف المؤتلفة والمنظورة . وهذا التشابه أو التقابل أو التزاوج نشأ عن ما يسمى بقاعدة المزاوجة التى نشرحها فيما يلى :—

اذا علمت جملة نقط ا ، ب ، حـ . . . فى مستو ورسمت الخطوط القطبية α ، β ، γ . . . لهذه النقط بالنسبة الى مقطع مخروطى معلوم فى المستوى فان قطب أى مستقيم مثل ا ب واصل بين نقطتين من النقط المعلومة يكون نقطة تلاقى المستقيمين α ، β اللذين هما الخطان القطبيان للنقطتين ا ، ب (أنظر بندى ٥٤ ، ٥٥) .

وسنستخدم الرمز (α β) للدلالة على نقطة تلاقى المستقيمين α ، β كما سنستخدم أحياناً الرمز (ا ب) للدلالة على الخط الواصل بين النقطتين ا ، ب .

ويقال إن كل نقطة فى المستوى مثل ا يناظرها مستقيم α وبالعكس بمعنى أن ا هى قطب المستقيم α وبالعكس كما أن المستقيم (ا ب) يناظر النقطة (α β) بمعنى أن (ا ب) هو الخط القطبى للنقطة (α β) بالنسبة للمقطع المخروطى المعلوم [١] .

فاذا وجد شكل ش مؤلف من مجموعة من النقط والمستقيمات أمكن رسم شكل ش' مؤلف من مجموعة من المستقيمات والنقط (على التوالى) المناظرة .

هذان الشكلان يسميان شكلين متزاوجين وتكون مزاوجتهما منسوبة الى الى المقطع المخروطى المعلوم .

نظرية

اذا كان α ، β ، γ ، δ حزمة من المستقيمات رأسها ل فى مستوى مقطع مخروطى وكان ا ، ب ، حـ ، ى (الواقعة على مستقيم واحد λ هو قطب ل بالنسبة للمقطع) أقطاب هذه المستقيمات بالنسبة للمقطع فان النسبة المضاعفة للحزمة تساوى النسبة المضاعفة للصف أى أن (α β γ δ) = (ا ب حـ ى) .

سنثبت صحة هذه النظرية اذا كان المقطع المخروطى دائرة ثم نسقط الدائرة الى مقطع مخروطى فتنتج النتيجة المطلوبة [٢] .

لذلك نفرض أن و مركز الدائرة فتكون المستقيمات و ا ، و ب ، و حـ ، و ى أعمدة على α ، β ، γ ، δ على التوالى وينتج من ذلك أن

(١) نلفت نظر القارىء الى أن هذا « التناظر » عكس التناظر الاسقاطى أو الائتلافى حيث كل نقطة تناظرها نقطة وكل مستقيم يناظره مستقيم .

(٢) نترك للقارىء رسم الشكل .

$$\text{و } (\text{ا ب حـ ى}) = (\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta)$$

$$\text{ولكن}\quad \text{و } (\text{ا ب حـ ى}) = (\text{ا ب حـ ى})$$

$$\therefore\ (\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta) = (\text{ا ب حـ ى}) \quad \text{وهو المطلوب .}$$

ينتج من النظرية السابقه أنه اذا كان سه ، سه' شكلين متزاوجين فان أى صف من النقط فى الشكل سه تناظره حزمة من المستقيمات فى الشكل سه' مساوية له فى نسبتها المضاعفة وبالعكس .

وباستخدام هذه المناظرة العكسية أو المزاوجة بين الشكلين سه ، سه' يمكن اذا علمت خاصية هندسية فى أحد الشكلين أن نستنتج منها خاصية مناظرة لها فى الشكل الآخر وتسمى مثل هاتين الخاصيتين بخاصيتين متزاوجتين . وتعرف عملية استنتاج إحدى الخاصيتين من الأخرى بعملية الاستنتاج التزاوجى أو المزاوجة . وسنشرح فيما يلى مثالا على تطبيق هذه القاعدة :

أثبتنا فى (بند ٨١) أنه اذا ناظرت نقطة تقابل حاملى صفين مؤتلفين نفسها كان الصفان منظورين بحيث تمر المستقيمات التى تصل أزواج النقط المتناظرة جميعاً بنقطة ثابتة هى مركز المنظورية ظ .

فاذا اعتبرنا فى (شكل ٨٦) الشكل المؤلف من الصفين ا ب حـ . . . ، ا' ب' حـ' . . . اللذين حاملاهما λ ، λ' ومن المستقيمات الواصلة بين أزواج النقط المتناظرة التى هى المستقيمات (ا ا') ، (ب ب') ، (حـ حـ') . . . والتى تؤلف حزمة متلاقية فى النقطة ظ — وجعلناه شكلا سه من شكلين متزاوجين ثم حصلنا بالطريقة الموضحة آنفاً على الشكل سه' المزاوج له فان الشكل سه' سيتألف من حزمتين من المستقيمات α β γ . . . ، α' β' γ' . . . رأساهما ل ، ل' (وهما الحزمتان المناظرتان للصفين λ ، λ' فى الشكل سه) ومن النقط (α α') ، (β β') ، (γ γ') . . . التى هى نقط تقاطع المستقيمات

المتناظرة فى الحزمتين والتى تؤلف صفاً واقعاً على مستقيم ع (المناظر للنقطة ظ فى الشكل ٨٦) . ثم إن النقطة س ≡ س′ لتلاقى الحاملين λ ، λ′ فى (شكل٨٦) سيناظرها مستقيم σ ≡ σ′ واصل بين الرأسين ل ، ل′ للحزمتين α β γ ... ، α′ β′ γ′ ... . كما أن مناظرة النقطة س لنفسها ينتج عنها مناظرة المستقيم σ لنفسه . وعليه تكون الخاصية الهندسية التى يمكن استنتاجها من نظرية (بند ٨١) باستخدام قاعدة المزاوجة هى الآتية :

اذا ناظر المستقيم الواصل بين رأسى حزمتين مؤتلفتين نفسه كانت الحزمتان منظورتين بحيث تقع نقط تقاطع أزواج الاشعة المتناظرة جميعاً على مستقيم ثابت هو محور المنظورية ع .

وبالتأمل فيما سبق نرى أنه من الممكن وضع «قاموس» صغير بواسطته يمكن ترجمة أمثال النظرية السابقة الى النظريات المزاوجة لها ويجد القارىء فيمايلى أهم عبارات هذا القاموس :—

احدى العبارتين	العبارة المزاوجة
نقطة	مستقيم
صف من النقط	حزمة من المستقيمات
نقطة تقع على مستقيم	مستقيم يمر بنقطة
مستقيم يصل نقطتين	نقطة تقاطع مستقيمين

بند ٨٣ : المسألتان الاساسيتان للهندسة الاسقاطية

تتعين العلاقة الاسقاطية أو الائتلافية بين صفين من النقط أو حزمتين من المستقيمات بمعلومية ثلاثة أزواج متناظرة لأنه اذا كانت هذه الازواج فى حالة الصفوف هى ا ، ا′ ؛ ب ، ب′ ؛ حـ ، حـ′ وكانت ء نقطة حيثما اتفق من

الصف الأول فان هذه النقطة تجعل النسبة المضاعفة (ا ب حـ ى) تساوى مقداراً معيناً وليس هناك سوى نقطة واحدة ى′ فى الصف الثانى تجعل النسبة (ا′ ب′ حـ′ ى′) تساوى المقدار المعين الذى تساوية النسبة الأولى (بند ٥٣ ح) أى تجعل

$$(ا' ب' حـ' ى') = (ا ب حـ ى)$$

ويقال مثل ذلك — فى حالة حزمتين مؤتلفتين — عن الشعاع δ' الذى يجعل

$$(\alpha' \; \beta' \; \gamma' \; \delta') = (\alpha \; \beta \; \gamma \; \delta) \,.$$

فاذا كانت العلاقة بين صفى النقط أو حزمتى المستقيمات منظورة فوق كونها ائتلافية كانت طريقة الحصول على النقطة ى′ أو الشعاع δ' بسيطة جداً : فلنفرض لذلك فى (شكل ٨٦) أن العلاقة المنظورة بين صفى النقط λ ، λ' قد تحددت بمعلومية الزوجين ا ، ا′ ، ب ، ب′ من النقط المتناظرة زيادة على نقطة تقاطع الحاملين λ ، λ' وهى النقطة س ≡ س′ المناظرة لنفسها (أى أن العلاقة الائتلافية تعتبر أيضا فى هذه الحالة الخاصة — حالة العلاقة المنظورية — معلومة بالازواج الثلاثة ا ، ا′ ، ب ، ب′ ، س ، س′ من النقط المتناظرة) ونفرض أن ى هى النقطة المعلومة من الصف λ ويراد تعيين النقطة المناظرة ى′ على الصف λ' بحيث يكون (ا′ ب′ س′ ى′) = (ا ب س ى) . فنصل لذلك المستقيمين ا ا′ ، ب ب′ فتكون نقطة تقاطعهما هى مركز المنظورية ظ فاذا وصلت ظ بالنقطة المعلومة ى فان ظ ى يقطع الحامل λ' فى النقطة المطلوبة ى′ .

كذلك اذا علمت العلاقة المنظورية بين حزمتين ل ، ل′ من المستقيمات بالازواج الثلاثة α ، α' ، β ؛ β' ، σ ـ σ' من الاشعة المتناظرة حيث $\sigma \equiv \sigma'$ هو الشعاع ل ل′ المناظر لنفسه وفرضنا أن δ شعاع معلوم حيثما اتفق فى

الحزمة ل ويراد تعيين δ' المناظر له بحيث يكون $(\alpha' \beta' \sigma' \delta') = (\alpha \beta \sigma \delta)$ فاننا نصل النقطتين $(\alpha \alpha')$ ، $(\beta \beta')$ فيكون الواصل هو محور المنظورية ع ويكون الشعاع المطلوب δ' هو المستقيم الذى يصل ل' بنقطة تقاطع δ مع هذا المحور .

وننتقل الآن الى حل المسألتين الاساسيتين المتزاوجتين فى الحالة العامة عند ما تكون العلاقة بين صفى النقط أو حزمتى المستقيمات علاقة ائتلافية فقط (غير منظورة) .

المسألة الاولى

اذا علمت ثلاثة أزواج من النقط المتناظرة ا ، ا' ؛ ب ، ب' ؛ حـ ، حـ' فى صفين مؤتلفين λ ، λ' فالمطلوب تعيين النقطة ء' على الصف λ' التى تناظر نقطة معلومة مثل ء من الصف λ بحيث تكون (ا' ب' حـ' ء') = (ا ب حـ ء) .

بالنظر الى سهولة العلاقة المنظورة كما رأينا فيما تقدم فان أقرب طريق لحل هذه المسألة يكون بتحويل صفى النقط المؤتلفين الى حزمتين منظورتين وذلك بالطريقة الآتية (شكل ٨٧) :

نختار أى زوج من النقط المتناظرة المعلومة مثل ا ، ا' ثم نصل ا بالنقطة ا' ، ب' ، حـ' و نصل ا' بالنقطة ا ، ب ، حـ فبما أن

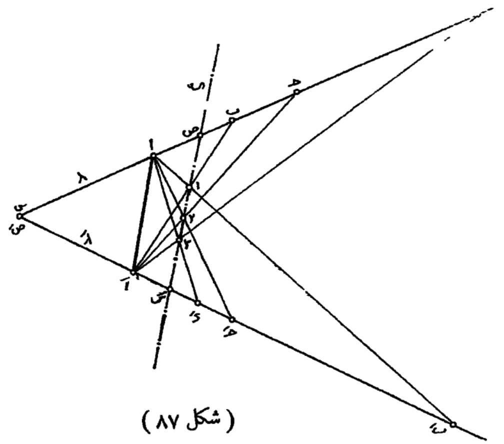
(ا' ب' حـ' . . .) = (ا ب حـ . . .) فرضاً

فتكون الحزمتان اللتان رأساهما ا ، ا' مؤتلفتين أى تكون

ا (ا' ب' حـ' . . .) = ا'(ا ب حـ . . .)

ولما كان الشعاع ا ا' يناظر الشعاع ا' ا فى الحزمتين أى أن المستقيم الواصل بين رأسى هاتين الحزمتين المؤتلفتين يناظر نفسه فينتج بمقتضى النظرية المذكورة فى (بند ٨٢) أن الحزمتين منظورتان فوق كونهما مؤتلفتين وعليه تتقاطع

أزواج الاشعة المتناظرة على مستقيم واحد ع هو محور المنظورية وهو المستقيم الذى يصل نقطة تقاطع المستقيمين المتناظرين ا ب′ ، ا′ ب بنقطة تقاطع المستقيمين المتناظرين ا حـ′ ، ا′ حـ وبذلك يتعين ع .



(شكل ٨٧)

ولايجاد النقطة ء′ المناظرة الى النقطة المعلومة ء من الصف λ نصل ا′ ء فيقطع ع فى النقطة ٣ ونصل ٣ ا فيكون هذا الواصل هو الشعاع ا ء′ المناظر الى ا′ ء وتكون النقطة المطلوبة ء′ هى نقطة تقاطع ا ء′ مع λ′ [1] .

واذا اعتبرنا نقطة تقاطع الحاملين λ ، λ′ نقطة معلومة مثل س من نقط الصف λ وجب أن تكون النقطة المناظرة لها س′ على الصف λ′ هى نقطة تقاطع

---

(١) البرهان :

(ا ب حـ ء) = ا′ (ا ب حـ ء) ، (ا′ ب′ حـ′ ء′) = ا (ا′ ب′ حـ′ ء′)

ولكن ا′ (ا ب حـ ء) = ا (ا′ ب′ حـ′ ء′) .·. (ا′ ب′ حـ′ ء′) = (ا ب حـ ء)

محور المنظورية ع مع λ. واذا اعتبرنا نفس النقطة نقطة معلومة مثل ص′ من نقط الصف λ' كانت النقطة المناظرة لها ص على الصف λ هى نقطة تقاطع محور المنظورية ع مع λ.

ولما كانت النقطتان ص ، س′ نقطتين ثابتتين يتعينان بمعلومية الأزواج ا ، ا′ ، ب ، ب′ ، حـ ، حـ′ من النقط المتناظرة فينتج من ذلك أن هاتين النقطتين وبالتالى محور المنظورية ع الذى يمر بهما — لا يتوقفان على النقطتين المتناظرتين ا ، ا′ اللتين اخترناهما فى بادىء الأمر رأسين للحزمتين المنظورتين . وإذن يجب أن تتلاقى الأزواج الآتية من المستقيمات

ا ب′ ، ا′ ب ، ا حـ′ ، ا′ حـ ، ا ء′ ، ا′ ء ، ب حـ′ ، ب′ حـ ، ب ء′ ، ب′ ء ... الخ

على محور المنظورية ع الذى يتعين لذلك بنقطتى تقاطع أى زوجين معلومين منها .

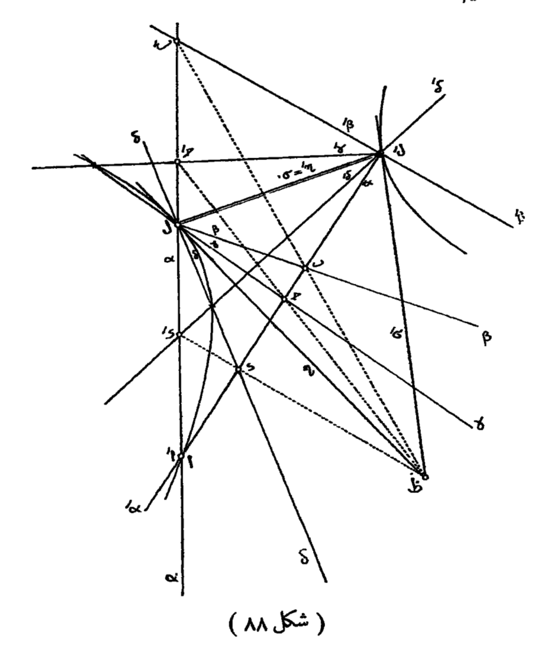
المسألة الثانية المزاوجة

اذا علمت ثلاثة أزواج من الاشعة المتناظرة α ، α' ، β ، β' ، γ ، γ' فى حزمتين مؤتلفتين رأساهما ل ، ل′ فالمطلوب تعيين الشعاع δ' فى الحزمة ل′ الذى يناظر شعاعاً معلوماً مثل δ فى الحزمة ل بحيث تكون

$$(\alpha'\beta'\gamma'\delta') = (\alpha\beta\gamma\delta)$$

نحول الحزمتين المؤتلفتين الى صفين منظورين من النقط فنختار لذلك (شكل ٨٨) أى زوج من الاشعة المتناظرة مثل α ، α' ونجعل α يتقاطع مع α' ، β' ، γ' فى النقط ا′ ، ب′ ، حـ′ وكذلك نجعل α' يتقاطع مع α ، β ، γ فى النقط ا ، ب ، حـ وبذا نحصل على صفين منظورين من النقط (فوق كونهما مؤتلفين) حاملاهما α ، α' لأن (ا′ ب′ حـ′ ...) = (ا ب حـ ...) والنقطة ا ≡ ا′ وهى نقطة تقاطع الحاملين تناظر نفسها . فاذا تلاقى المستقيمان ب ب′ ، حـ حـ′ فى النقطة ظ كانت ظ مركز المنظورية .

ولايجاد الشعاع δ' المناظر للشعاع المعلوم δ نصل نقطة تقاطع δ مع α' وهى النقطة ى بمركز المنظورية ظ فيتقاطع ظ ى مع α فى النقطة ى' التى يجب أن تكون نقطة تقاطع δ' مع α وبذا يكون الشعاع المطلوب δ' هو المستقيم ل' ى' .



(شكل ٨٨)

واذا اعتبرنا المستقيم ل ل' شعاعاً معلوماً مثل σ فى الحزمة ل وجب أن يكون الشعاع المناظر له σ' فى الحزمة ل' هو المستقيم ل' ظ واذا اعتبرنا

نفس المستقيم ل' ل شعاعاً معلوماً مثل η' فى الحزمة ل' كان الشعاع المناظر له η فى الحزمة ل هو المستقيم ل ظ .

فمركز المنظورية ظ الذى هو نقطة تلاقى المستقيمين الثابتين η ، σ' لا يتوقف إذن على الشعاعين المتناظرين α ، α' اللذين اخترناهما من مبدأ الامر حاملين للصفين المنظورين . ينتج من ذلك أنه اذا رمزنا الى النقطة ب بالرمز $(\alpha'\ \beta)$ أى نقطة تقاطع α' ، β وكذلك الى النقطة ب' بالرمز $(\alpha\ \beta')$ والى المستقيم ب' ب بالرمز $(\alpha\ \beta')$ — $(\alpha'\ \beta)$ وبالمثل لبقية النقط — فان المستقيمات الآتية

$(\alpha\ \beta') - (\alpha'\ \beta)$ ، $(\alpha\ \gamma') - (\alpha'\ \gamma)$ ، $(\alpha\ \delta') - (\alpha'\ \delta)$ ،
$(\beta\ \gamma') - (\beta'\ \gamma)$ ، $(\beta\ \delta') - (\beta'\ \delta)$ ... الخ

يجب أن تمر جميعاً بمركز المنظورية ظ الذى يتعين لذلك بمعلومية أى اثنين منها .

بند ٨٤ : النظريتان الاساسيتان

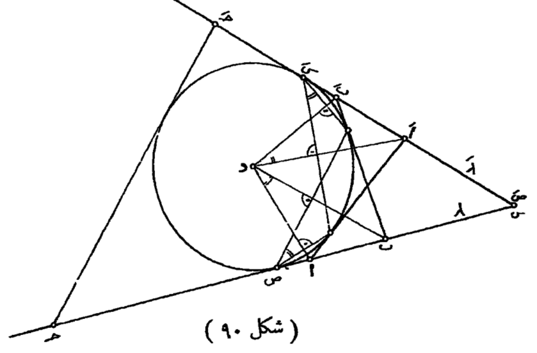
لنفرض أن ل ، ل' نقطتان ثابتتان على الدائرة المبينة فى (شكل ٨٩) وأننا وصلنا هاتين النقطتين بنقط أخرى على الدائرة مثل ا ، ب ، حـ ، ى ... فالحزمتان ل ، ل' اللتان نحصل عليهما بهذه الطريقة هما حزمتان مؤتلفتان (لأن الزوايا المتناظرة فى الحزمتين هى فى هذه الحالة على الخصوص زوايا متساوية مثلا ا لَ̂ ب = ا ل̂' ب) أى أن

(شكل ٨٩)

ل (ا ب حـ ى ...) = ل' (ا ب حـ ى ...)

ويؤخذ من (شكل ٨٩) أيضا أننا اذا اعتبرنا المستقيم ل ل′ أحد أشعة الحزمة ل كان الشعاع المناظر له فى الحزمة ل′ هو مماس الدائرة فى ل′ واذا اعتبرنا نفس المستقيم ل′ ل أحد أشعة الحزمة ل′ كان الشعاع المناظر له فى الحزمة ل هو مماس الدائرة فى ل . وذلك لأن المماس فى ل مثلا هو الوضع النهائى للوتر ل ى عندما تنطبق ى على ل وفى هذه الحالة ينطبق أيضاً الوتر ل′ ى (المناظر الى ى ل) على المستقيم ل′ ل [1] .

واذا فرضنا فى (شكل ٩٠) أن λ ، λ′ مماسان ثابتان للدائرة وأن ا ، ب ، حـ . . . ، ا′ ، ب′ ، حـ′ . . . هى نقط تقاطع هذين المماسين مع مماسات أخرى



(شكل ٩٠)

للدائرة فمن السهل البرهنة على أن صفى النقط ا ب حـ . . . ، ا′ ب′ حـ′ . . . صفان مؤتلفان [لأن الزاويتين المحيطيتين س′ ، ص متساويتان وبما أن

(١) يمكن الوصول الى هذه النتيجه أيضا فى هذه الحالة عن طريق مساواة الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة وأى وتر فيها مار بنقطه التماس للزاوية المحيطية المرسومة على هذا الوتر .

و ب' م و ا' عموديان على ضلعى الزاوية س' وكذا و ب م و ا عموديان على ضلعى الزاوية ص فينتج أن ب' و̂ ا' = ب و̂ ا وبالمثل تتساوى بقية الزوايا المتناظرة فى الحزمتين و (ا' ب' ح' ...) م و (ا ب ح ...) المشتركتين فى الرأس و فهما إذن حزمتان مؤتلفتان فاذا قطعهما مستقيمان حصلنا على صفين مؤتلفين] أى أن

$$(ا ب ح \ldots) = (ا' ب' ح' \ldots)$$

وبطريقة مزاوجة لما ذكر عن (شكل ٨٩) يمكننا أن نستنتج من (شكل ٩٠) أننا اذا اعتبرنا النقطة (λ λ') — وهى نقطة تقاطع الحاملين — نقطة مثل س من الصف λ كانت النقطة المناظرة لها س' فى الصف λ' هى نقطة تماس λ' مع الدائرة واذا اعتبرنا نفس النقطة (λ λ') نقطة مثل ص' من الصف λ' كانت النقطة المناظرة لها ص فى الصف λ هى نقطة تماس λ مع الدائرة .

فاذا استخدمنا ائتلافاً مركزياً معينا فى تحويل الدائرة المبينة فى (شكل ٨٩) الى مقطع مخروطى (وذلك بافتراض مركز للائتلاف ومحور له ونقطتين متناظرتين مثلا كما هو مبين فى بند ٧٢ وكذا فى شكل ٧٥ أو ٧٨) حصلنا على حزمتين مؤتلفتين من المستقيمات رأساهما النقطتان الثابتتان على المقطع المناظرتان الى ل م ل'[1] بحيث تكون نقط تقاطع أزواج الاشعة المتناظرة فى الحزمتين الجديدتين (وهى النقط المناظرة الى ا م ب م ح ...) نقطاً على المقطع المخروطى . وهذا يبرهن على صحة

(١) يلاحظ أن الزوايا المحصورة بين الاشعه المتناظرة فى الحزمتين لا تكون متساوية فى حالة المقطع المخروطى كما هو الحال فى الدائرة ولكن تبقى الخاصية الائتلافية للحزمتين محفوظة لأن النسب المضاعفة لا تتغير بالاسقاط .

النظرية الاساسية الاولى

اذا وصلت نقطتان ثابتتان ل ، ل′ على مقطع مخروطي بنقط الاخرى كانت الحزمتان ل ، ل′ حزمتين مؤتلفتين . ويكون المستقيم المناظر للمستقيم ل ل′ باعتباره شعاعاً في احدى الحزمتين هو مماس المنحنى في رأس الحزمة الاخرى (راجع شكل ٨٨) .

والعكس صحيح أى أن :

المحل الهندسى لنقط تقاطع أزواج الاشعة المتناظرة فى حزمتين مؤتلفتين (غير منظورتين) هو مقطع مخروطى مار برأسى الحزمتين [1] .

وبالمثل اذا استخدمنا الائتلاف المركزى فى تحويل الدائرة المبينة فى (شكل ٩٠) حصلنا على مقطع مخروطى فيه المماسان الثابتان المناظران الى λ ، λ' هما حاملان لصفين مؤتلفين من النقط بحيث تكون المستقيمات الواصلة بين النقط المتناظرة على الصفين هى مماسات جديدة للمقطع المخروطى . وهذه هى النظرية المزاوجة للنظرية السابقة ويمكن تلخيصها فيما يلى :

النظرية الاساسية الثانية

اذا تقاطع مماسان ثابتان λ ، λ' لمقطع مخروطى مع مماسات الاخرى كان الصفان λ ، λ' صفين مؤتلفين . وتكون النقطة المناظرة للنقطة (λ . λ') باعتبارها احدى نقط الصفين هى نقطة تماس حامل الصف الآخر مع المقطع (راجع شكل ٨٧) .

وعكس هذه النظرية صحيح وهو

غلاف المستقيمات الواصلة بين أزواج النقط المتناظرة فى صفين مؤتلفين (غير منظورين) هو مقطع مخروطى يمس حاملى الصفين .

---

(١) فى حالة الحزمتين المنظورتين تتلاقى الاشعه المتناظرة على مستقيم واحد هو كما قدمنا محور المنظورية . وفى هذه الحالة يعتبر المقطع المخروطى منحلا الى هذا المحور والى المستقيم المار برأسى الحزمتين .

بند ٨٥: تطبيق مبدأ المزاوجة على المقاطع المخروطية

اذا تأمل القارىء فى النظريتين السابقتين (بند ٨٤) وجد أنهما متشابهتان والحقيقة أنهما متزاوجتان بالمعنى الذى بيناه فى (بند ٨٢) للصفوف والحزم ونشرح الآن كيفية تطبيق مبدأ المزاوجة على المقاطع المخروطية .

نفرض أن النقطة ا ترسم منحنياً م فى مستوى مقطع مخروطى ثابت Γ فالخط القطبي α للنقطة ا بالنسبة الى المقطع Γ سيغلف منحنياً م' بحيث تناظر مماسات المنحنى م' نقط المنحنى م وفى الوقت ذاته يجب أن نلاحظ أن مماسات المنحنى م تناظرها نقط على المنحنى م' لأنه اذا كانت ا ، ب نقطتين متقاربتين على المنحنى م فان خطيهما القطبيين α ، β يتقابلان فى نقطة (α β) تناظر المستقيم (ا ب) فاذا اقتربت ب من ا على المنحنى م فان (ا ب) يؤول الى المماس للمنحنى م عند النقطة ا وفى الوقت نفسه تؤول النقطة (α β) الى نقطة تماس المستقيم α مع الغلاف م' . ويسمى المنحنيان م ، م' فى هذه الحالة منحنيين متزاوجين بالنسبة الى المقطع المخروطى الثابت Γ .

نظرية

اذا كان م مقطعاً مخروطياً فان م' يكون مقطعاً مخروطياً كذلك .

لاثبات ذلك نفرض ل ، ل' نقطتين على المنحنى م ونصلهما بنقط أخرى ا ، ب ، حـ . . . على نفس المنحنى فبناء على النظرية الاولى فى (بند ٨٤)تكون ل (ا ب حـ . . .)= ل' (ا ب حـ . . .) أى تكون الحزمتان ل ، ل' مؤتلفتين .

فاذا كان λ ، λ' هما المماسان للمنحنى م' المناظران الى ل ، ل' وتقاطع هذان المماسان مع المماسات α ، β ، γ . . . (المناظرة الى النقط ا ، ب ، حـ ...) لنفس المنحنى م' وجب بمقتضى النظرية المذكورة فى (بند ٨٢) أن تكون النسبة المضاعفة للحزمة ل مساوية للنسبة المضاعفة للصف λ وبالمثل النسبة

المضاعفة للحزمة ل′ تساوى النسبة المضاعفة للصف λ' أى أن الصفين λ ، λ' مؤتلفان وإذن فالمستقيمات α ، β ، γ ... تغلف بمقتضى عكس النظرية الاساسية الثانية فى (بند ٨٤) مقطعاً مخروطياً يمس أيضاً λ ، λ' . أى أن م′ مقطع مخروطى .

ومن الممكن اثبات هذه النظرية الهامة بالطريقة البسيطة الاتية :

بما أن المنحنى م مقطع مخروطى فهو منحن من الدرجة الثانية أى أن أى مستقيم فى مستويه يقطعه فى نقطتين (حقيقيتين أو تخيليتين) وإذن فالمنحنى م′ هو منحن من الرتبة الثانية أى أنه يمكن رسم مماسين أثنين له (حقيقيين أو تخيليين) من أية نقطة فى مستويه وعليه فهو مقطع مخروطى .

نظرية اخرى

اذا كان م ، م′ مقطعين مخروطيين متزاوجين بالنسبة الى مقطع مخروطى ثابت Γ فان أى قطب وخط القطبى بالنسبة الى م يناظرهما على التوالى خط قطبى وقطب بالنسبة الى م′ وبالعكس .

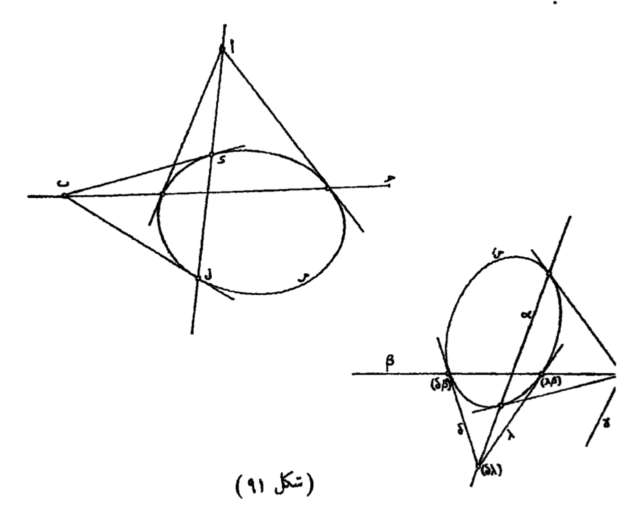
البرهان :

لنفرض فى (شكل ٩١) أن ا هو قطب المستقيم (ب ح) بالنسبة الى المنحنى م [١]. وليكن المستقيم (ى ل) أى قاطع للمنحنى م مار بالنقطة ا فيتقاطع حينئذ المماسان عند ى ، ل على المستقيم (ب ح) فى نقطة مثل ب (ى ، ل

(١) ليلاحظ القارىء أن المستقيم (ب ح) ليس هو الخط القطبى للنقطة ا بالنسبة الى المقطع المخروطى الثابت Γ إذ أن الخط القطبى للنقطة ا بالنسبة الى المقطع Γ (الذى هو منحن موجود فى الذهن فقط) هو المستقيم الذى نسميه α فى المنحنى المزاوج م′ .

نقطتان على المقطع المخروطى م) أى أن ا ، ب نقطتان مترافقتان بالنسبة للمنحنى م (بند ٥٤) .

وإذن ففى الشكل المزاوج تكون العلاقة بين المستقيم α والنقطة (β γ) هى بحيث أننا اذا أخذنا أية نقطة مثل (λ δ) على α فان وتر التماس β للماسين من النقطة (λ δ) الى م′ يمر بالنقطة (β γ) أى أن α ، β مستقيمان مترافقان بالنسبة الى م′ وإذن فالمستقيم α والنقطة (β γ) هما خط قطبى وقطبه بالنسبة الى المنحنى م′ .



(شكل ٩١)

نتيجة أولى : النقط المترافقة بالنسبة الى المنحنى م تزاوجها مستقيمات مترافقة بالنسبة الى المنحنى م′ وبالعكس .

نتيجة ثانية : أى مثلث قطبي (بند ٥٤) بالنسبة الى المنحنى م يزاوجه مثلث قطبي بالنسبة الى المنحنى م′

ونستطع الآن أن نضيف الى عبارات القاموس المبين فى (بند ٨٢) عبارات جديدة مثل :

احدى العبارتين	العبارة المزاوجة
المحل الهندسى لنقطة متحركة	غلاف مستقيم متحرك
نقط المنحنى	مماسات المنحنى
رسم مماس لمنحن فى إحدى نقطه	تعيين نقطة تماس أحد مماسات منحن
قطب وخطه القطبى	خط قطبي وقطبه
النقط المترافقة بالنسبة الى المقطع	المستقيمات المترافقة بالنسبة الى المقطع

بند ٨٦ : نتائج المسألتين والنظريتين الاساسيتين

النتيجة الاولى :

يتعين المقطع المخروطى اذا علم منه خمس نقط أو خمسة مماسات .

وذلك لان العلاقة الائتلافية بين صفين من النقط أو حزمتين من المستقيمات تتعين (بند ٨٣) بمعلومية ثلاثة أزواج متناظرة فاذا علم من مقطع مخروطى خمس نقط واختير منها اثنتان ل ، ل′ كنقطتين ثابتتين ووصلت بالنقط الثلاث الباقية لأمكن الحصول على ثلاثة أزواج من الاشعه المتناظرة فى الحزمتين المؤتلفتين اللتين رأساهما ل ، ل′ وبذلك تتعين العلاقة الائتلافية بينهما بحيث اذا رسم فى إحدى الحزمتين شعاع رابع لأمكن بتطبيق المسألة الاساسية الثانية (شكل ٨٨) تعيين الشعاع المناظر له فى الحزمة الاخرى وتكون نقطة تقاطع

الشعاعين نقطة جديدة من نقط المنحنى وهكذا يمكن تعيين أى عدد من نقط المقطع المخروطى .

وبتطبيق قاعدة المزاوجة على ما تقدم يتضح أنه بمقتضى المسألة الاساسية الاولى يمكن الحصول على أى عدد من المماسات الجديدة (مثل المماس ى ى′ فى شكل ٨٧) لمقطع مخروطى اذا علم منه خمسة مماسات .

النتيجة الثانية

اذا تعين مقطع مخروطى بخمس نقط واختير اثنتان منها مثل ل ، ل′ رأسين للحزمتين المؤتلفتين (اللتين يمكن الحصول عليهما بتوصيل ل ، ل′ بالنقط الثلاث الباقية) كان المماسان للمنحنى فى ل ، ل′ هما بمقتضى النظرية الاولى (بند ٨٤) المستقيمان ظ ل ، ظ ل′ على التوالى حيث ظ مركز المنظورية (شكل ٨٨) .

وبتطبيق مبدأ المزاوجة يمكن وضع هذه النتيجة فى الصورة الآتية :

اذا تعين مقطع مخروطى بخمسة مماسات واختير اثنان منها مثل λ ، λ′ حاملين للصفين المؤتلفين (اللذين يمكن الحصول عليهما بجعل λ ، λ′ يتقاطعان مع المماسات الثلاثة الباقية) كانت نقطتا تماس λ ، λ′ مع المنحنى هما النقطتان (ع λ) ، (ع λ′) على التوالى حيث ع محور المنظورية (شكل ٨٧) .

النتيجة الثالثة

اذا كان المطلوب رسم المماس فى إحدى نقط مقطع مخروطى معلوم بخمس نقط (أو ما يعادلها) فاننا نختار النقطة المطلوب رسم المماس فيها رأساً لاحدى الحزمتين المؤتلفتين ثم نجد مركز المنظورية ظ فيكون المماس المطلوب هو المستقيم الذى يصل ظ بالنقطة .

واذا أريد تعيين نقطة تماس مقطع مخروطى معلوم بخمسة مماسات (أو ما يعادلها) مع أحد هذه المماسات فاننا نختار هذا المماس الاخير حاملا لاحد

الصفين المؤتلفين ثم نجد محور المنظورية ع فتكون نقطة التماس المطلوبة هى نقطة تقاطع ع مع المماس.

النتيجة الرابعة

اذا علم من مقطع مخروطى نقطة بالمماس فيها واخترنا هذه النقطة رأساً لاحدى الحزمتين المؤتلفتين فان مركز المنظورية يقع على المماس المعلوم .

واذا علم من المقطع مماس بنقطة تماسه واخترنا هذا المماس حاملا لاحد الصفين المؤتلفين فان محور المنظورية يمر بنقطة التماس المعلومة .

بند : ٨٧ حل المسائل الرئيسية من الدرجة الاولى بواسطة الصفوف والحزم المؤتلفة

كل مسألة لا تسمح باكثر من حل واحد يفى بالشروط المفروضة يطلق عليها اسم *مسألة من الدرجة الاولى* لانه يمكن وضعها تحليلياً على صورة معادلة من الدرجة الاولى لها حل واحد فقط . ولحل مثل هذه المسائل بواسطة الرسم لا يحتاج الانسان الا الى استعمال المسطرة وذلك بخلاف مسائل الدرجة الثانية التى سنتكلم عنها فيما بعد (أنظر بند ٩٢) حيث تستلزم لحلها استعمال البرجل أيضاً .

ويمكن تركيز مسائل الدرجة الاولى للمقاطع المخروطية فى أربع :

المسألة الاولى : كيفية انشاء مقطع مخروطى معلوم بتعيين نقط جديدة عليه

المسألة الثانية : كيفية رسم مماس للمنحنى فى نقطة معلومة عليه .

المسألة الثالثة : كيفية انشاء مقطع مخروطى معلوم برسم مماسات جديدة له .

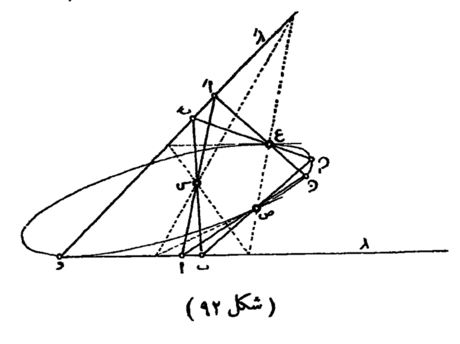
المسألة الرابعة : كيفية تعيين نقطة تماس مماس معلوم للمنحنى .

وهذه المسائل يجدها القارىء محلولة ضمناً فى المسألتين الاساسيتين (بند ٨٣) فعلى ضوء النتائج السابقة (بند ٨٦) يجد حل المسألتين الاولى والثانية (حيث نفرض المقطع المخروطى معلوماً بخمس نقط أو ما يعادلها) مبيناً فى (شكل

٨٨) وحل المسألتين المزاوجتين الثالثة والرابعة (حيث نفرض المقطع معلوماً بخمسة مماسات أو ما يعادلها) مبيناً فى (شكل ٨٧).

بند ٨٨ : أمثلة تطبيقية على الصفوف والحزم المؤتلفة

مثال ١ : ﺤ ا ا' مثلث يتحرك فى المستوى بحيث تمر أضلاعه ا' ا ، ا ﺤ ، ﺤ ا' دائماً بثلاث نقط ثابتة هى س ، ص ، ع على التوالى (شكل ٩٢). فاذا كانت ا ، ا' تتحركان على مستقيمين ثابتين λ ، λ' على التوالى فاثبت أن المحل الهندسى للرأس ﺤ هو مقطع مخروطى (طريقة ماك لوران لرسم مقطع مخروطى).



(شكل ٩٢)

البرهان : لنفرض أن ﺤ₁ ب ب' وضع جديد للمثلث فبما أن كل نقطة مثل ا من الصف λ تناظرها نقطة واحدة ا' من الصف λ' (هى نقطة تقاطع λ' مع المستقيم ا س) وبالعكس فالصفان ا ب . . . ، ا' ب' . . . مؤتلفان (وهما فوق ذلك منظوران لأن المستقيمات ا ا' ، ب ب' . . . تمر جميعاً بالنقطة س) وإذن فالحزمتان اللتان رأساهما ص ، ع حزمتان مؤتلفتان أى أن

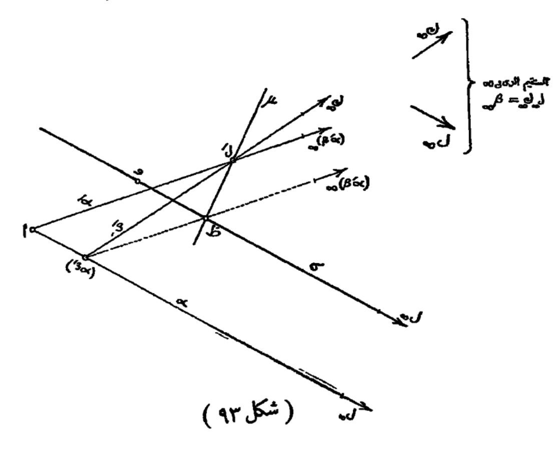
ص (ا ب . . .) = ع (ا' ب' . . .)

وينتج من ذلك (بمقتضى عكس النظرية الاساسية الاولى) أن نقط تقاطع أزواج الاشعة المتناظرة فى هاتين الحزمتين وهى النقط ء، ء، ... تقع على مقطع مخروطى يمر أيضاً بالنقطتين ص، ع .

أوجد الطريقة المزاوجة لرسم المقطع المخروطى باعتباره غلافاً لمستقيم متحرك.

مثال ٢ : اذا علم من قطع زائد الاتجاهان ك∞، ل∞ لخطيه التقريبين ونقطتان من نقطه مثل ل′، ا وكذا المماس μ فى النقطة ل′ فالمطلوب رسم الخط التقربى σ الذى يمس المنحنى فى ل∞ (شكل ٩٣).

المعلوم فى هذه المسألة من المقطع المخروطى خمس نقط (باعتبار ل′ نقطتين لأن المماس فيها معلوم) منها اثنتان فى اللانهاية والمطلوب رسم المماس σ فى



(شكل ٩٣)

فى إحدى هذه النقط وهى النقطة ل∞ التى فى اللانهاية وهذا يطابق المسألة الرئيسية الثانية (بند ٨٧)

لذلك نختار النقطة $ل_\infty$ رأساً لاحدى الحزمتين المؤتلفتين ونختار الرأس الثانية لنقطة $ل'$ لأن المماس فيها معلوم ويجب لذلك أن يقع مركز المنظورية ظ على هذا المماس (قارن النتيجتين الثالثة والرابعة فى بند ٨٦) ثم نصل :

$ل_\infty ا \equiv \alpha$ ، $ل_\infty ك_\infty \equiv$ المستقيم الذى فى اللانهاية $\equiv \beta_\infty$ ونصل أيضاً :

$ل' ا \equiv \alpha'$ ، $ل' ك_\infty \equiv \beta'$.

فالمستقيمان α ، α' هما شعاعان متناظران فى الحزمتين المؤتلفتين $ل_\infty$ ، $ل'$ وكذلك المستقيمان β_∞ ، β' . ويكون المستقيم الذى يصل النقطة (α β') بالنقطة (α' β_∞) [1] يمر بمركز المنظورية ظ (بند ٨٣) فهو يقابل المماس μ فى مركز المنظورية ظ .

فاذا وصل المستقيم ظ $ل_\infty$ كان هو الخط التقربى المطلوب σ .

ملحوظة :

اذا كان معلوماً من القطع الزائد بدلا من المماس فى $ل'$ نقطة خامسة فان رأس إحدى الحزمتين يجب أن تكون كما تقدم النقطة $ل_\infty$ التى يراد رسم المماس فيها أما الرأس الاخرى فيجوز أن تكون إحدى النقط الاربع الاخرى . ولكن اذا اخترناها النقطة الثانية $ك_\infty$ التى فى اللانهاية ووجدنا مركز المنظورية ظ بالطريقة الموضحة فى (شكل ٨٨) مع مراعاة ما سبق ذكره فى (بند ٦٥) عن النقط والمستقيمات التى فى اللانهاية كانت ظ فى هذه الحالة مركز القطع الزائد .

بند ٨٩ : نظريتا باسكال وبريانشون

(١) مقدمة

اذا علمت ست نقط فى المستوى قيل للخط المنكسر المقفل الناشيء عن

---

(١) أى المستقيم الذى يمر بالنقطة (α β') موازياً الى α' لأن النقطة (α' β_∞) هى نقطة المستقيم α' التى فى اللانهاية .

توصيل واحدة من هذه النقط باخرى ثانية ثم توصيل هذه الثانية باخرى ثالثة وهكذا الى السادسة ثم توصيل السادسة بالاولى إنه *شكل سداسى* وظاهر أنه يمكن اجراء عمليه التوصيل هذه بعدد مقداره لـ٦ = ٧٢٠ طريقة من الطرق المختلفه إلا أنه قد اصطلح على الا يفرق بين الشكلين السداسيين اذا اتفقا فى الترتيب الدائرى لرؤوسهما سواء اكان هذا الاتفاق فى نفس الاتجاه أو اتجاهين متضادين فى الترتيب الدائرى فالشكلان ا١ ا٢ ا٣ ا٤ ا٥ ا٦ ، ا٢ ا٣ ا٤ ا٥ ا٦ ا١ يعتبران شكلا واحداً كما أن كلا منهما يعتبر منطبقاً على كل من الشكلين ا٦ ا٥ ا٤ ا٣ ا٢ ا١ ، ا١ ا٦ ا٥ ا٤ ا٣ ا٢ وبذلك يكون هناك $\frac{٧٢٠}{٦ \times ٢}$ = ٦٠ شكلا سداسياً مختلفاً رؤوسه ا١ ، ا٢ ، ا٣ ، ا٤ ، ا٥ ، ا٦ .

واذا وقعت هذه النقط الست على منحن قيل إن كلا من الاشكال السداسية السابقة (والبالغ عددها ٦٠ شكلا) *مرسوم داخل المنحنى* .

وفيما يلى سنرمز للنقطة برقم عددى مع حذف الحرف فنتكلم عن النقطة ١ والنقطة ٢ . . . الخ بدلا من ا١ ، ا٢ . . . الخ ونرمز للواصل من النقطة ١ الى النقطة ٢ بالرمز (٢١) وهكذا .

تعريف : اذا علم شكل سداسى ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ فان أزواج الاضلاع (٢١) ؛ (٥٤) ، (٣٢) ؛ (٦٥) ، (٤٣) ؛ (١٦) تسمى *أزواج الاضلاع متقابلة* .

(ب) نظرية پاسكال[1]

نقط تقاطع الازواج الثلاثة للاضلاع المتقابلة فى أى شكل سداسى مرسوم داخل مقطع مخروطى تقع على خط مستقيم يسمى « بخط باسكال » .

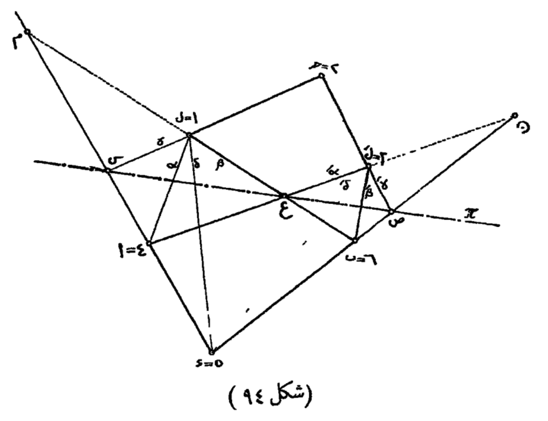
البرهان :

نفرض فى (شكل ٩٤) أن ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ شكل سداسى مرسوم داخل

(١) برهن پاسكال B. Pascal هذه النظرية سنة ١٦٤٠ وهو فى السادسة عشرة من عمره !

مقطع مخروطى وأنه يراد البرهنة على أن النقط س ، ص ، ع وهى نقط تقاطع أزواج الاضلاع المتقابلة : (٢١) ، (٥٤) ؛ (٣٢) ، (٦٥) ؛ (٤٣) ، (١٦) على استقامة واحدة .

لذلك نعتبر النقطتين ١ ، ٣ رأسين للحزمتين المؤتلفتين α β γ δ ، α' β' γ' δ' اللتين يمكن الحصول عليهما بتوصيل النقطتين ١ ، ٣ (المرموز لهما بالرمزين ل ، ل')



(شكل ٩٤)

بالنقط الباقية : ٤ = ١ ، ٦ = ب ، ٢ = حـ ، ٥ = ء فبناء على النظرية الاساسية الاولى (بند ٨٤) تكون

$$(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = (\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta')$$

فاذا فرضنا أن الحزمة ل قطعت الضلع (٥٤) ≡ اء فى النقط ١ ، م ، س ، ء على التوالى وأن الحزمة ل' قطعت الضلع (٦٥) ≡ ء ب فى النقط ه ، ب ، ص ، ء على التوالى فان صفى النقط المتكونة حينئذ على الحاملين (٥٤) ، (٦٥) يكونان صفين مؤتلفين لأن

(ا م س ى) = ($\gamma\ \beta\ \gamma\ \delta$) = ($\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$) = (ه ب ص ى)

وحيث إن النقطة ى في هذين الصفين وهي نقطة تقابل حامليهما تناظر نفسها فيكون الصفان إذن منظورين ويجب لذلك أن تمر المستقيمات الواصلة بين أزواج النقط المتناظرة في الصفين بنقطة واحدة أى أن المستقيمات ا ه ، م ب ، س ص يجب أن تمر جميعاً بالنقطة ع وإذن فالنقط س ، ص ، ع يجب أن تكون على استقامة واحدة .

ملحوظه : سنرمز غالباً في المسائل والامثلة الآتية بالرمز س لنقطة تقاطع الضلعين المتقابلين (٢١) ، (٥٤) كما سنرمز بالرمز ص لنقطة تقاطع الضلعين المتقابلين (٣٢) ، (٦٥) وبالرمز ع لنقطة تقاطع الضلعين المتقابلين (٤٣) ، (١٦) . وأخيراً سنرمز لخط پاسكال بالرمز π أى أن $\pi \equiv$ س ص ع .

(ح) نظرية بريانشون [1]

المستقيمات التي تصل أزواج الرؤوس المتقابلة في أى شكل سداسي مرسوم خارج مقطع مخروطي تتقابل في نقطة واحدة تسمى « بنقطة بريانشون » .

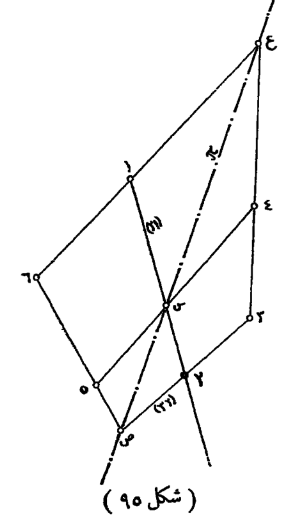
نترك إثبات صحة هذه النظرية كتمرين للقارىء على قاعدة المزاوجة (بند ٨٢) مع ملاحظة أن الشكل السداسي المؤلف من ستة مستقيمات يسمى مرسوماً خارج (أو حول) منحن معلوم اذا كانت أضلاعه جميعاً تمس المنحنى . واذا رمزنا لاضلاع الشكل السداسي في هذه الحالة مأخوذة على الترتيب بالارقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ولنقطة تلاقى الضلعين ١ ، ٢ بالرمز (٢١) وهكذا فان أزواج النقط (٢١) ، (٥٤) ، (٣٢) ؛ (٦٥) ، (٤٣) . (١٦) تسمى رؤساً متقابلة .

[1] Brianchon (١٨٠٦) .

وسنرمز غالباً فى المسائل والأمثلة الآتية للمستقيمات الثلاثة التى تصل كل زوج من تلك الرؤوس المتقابلة بالرموز α ، β ، γ على التوالى كما سنرمز لنقطة بريانشون التى تتلاقى فيها هذه المستقيمات بالرمز « ب » .

بند ٩٠ : حل المسائل الرئيسية من الدرجة الاولى بواسطة باسكال وبريانشون

نذكر فيما يلى كيفية حل المسائل الرئيسية الاربعة التى يرجع اليها فى حل مسائل الدرجة الاولى للمقاطع المخروطية (بند ٨٧) وذلك بواسطة نظريتى باسكال (اذا كان المقطع معلوماً بخمس نقط) وبريانشون (اذا كان المقطع معلوما بخمسة مماسات) :



(شكل ٩٥)

المسألة الاولى

اذا علم من منحنى مقطع مخروطى خمس نقط ورسم من إحداها مستقيم فالمطلوب تعيين نقطه تقاطع هذا المستقيم مع المنحنى (١).

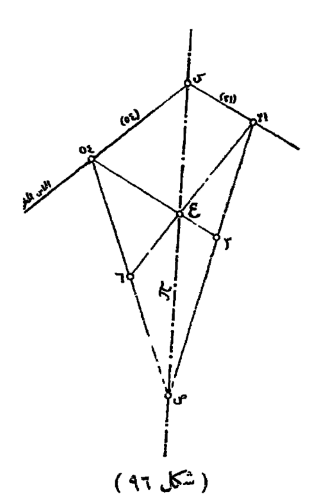
لذلك نفرض النقط المعلومة كما هو مبين فى (شكل ٩٥) . فاذا رمزنا للنقطة المرسوم منها المستقيم المعلوم بالرقم ١ فيجب أن نرمز للنقطة المطلوب تعيينها بالرقم ٢ أو بالرقم ٦ لأن المستقيم المعلوم هو أحد أضلاع الشكل السداسى

(١) أو بعبارة أخرى : المطلوب إنشاء مقطع مخروطى معلوم بخمس نقط وذلك بتعيين نقط جديدة عليه .

الذى يصل رأسين متتاليين من رؤوسه . فاذا فرضنا أن النقطة المطلوب تعينها هى ٢ بحيث يكون المستقيم المعلوم هو الضلع (٢١) فانه يمكن تسمية النقط الباقية باى ترتيب كان : ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ . ويكون خط پاسكال هو π ≡ س ع حيث س هى نقطه تقاطع الضلع (٢١) مع الضلع المقابل له (٥٤) وحيث ع هى نقطه تقاطع الضلع (٤٣) مع الضلع المقابل له (١٦) .

فاذا رسم خط پاسكال أمكن تعيين النقطة الباقية المجهولة ص عليه والتى هى نقطة تقاطع الضلع المجهول (٣٢) مع الضلع المعلوم (٦٥) إذ أن ص هى نقطة تقاطع π مع الضلع (٦٥) فاذا وصل (٣ ص) كان هذا الواصل نفس الضلع (٣٢) الذى يقطع لنلك الضلع (٢١) فى النقطة المطلوبة ٢ .

ملحوظة : إذا كان المقطع المخروطى معلوماً بأربع نقط والمماس فى إحداها فان هذا لايغير من طريقة الحل المشروحة آنفاً لأن النقطة المعلوم فيها المماس تحسب فى هذه الحـــالة بنقطتين (متتاليتين) ويرمزلها لنلك برقمين متتالين مثل ١ ، ٢ فيكون المماس فيها هو الضلع (٢١) .



(شكل ٩٦)

المسألة الثانية ·

المطلوب رسم المماس فى إحدى نقط مقطع مخروطى معلوم بخمس نقط

لشرح الملحوظة السابقة نفرض فى (شكل ٩٦) أن المعلوم هو أربع نقط والمماس فى إحداها (وهـذا

يعادل خمس نقط) وأن المطلوب هو رسم المماس فى واحدة من النقط الاخرى .

لذلك نرمز للنقطة المعلوم فيها المماس برقمين متتاليين كما قدمنا مثل ١ ، ٢ (وتكتب : ٢١) فيكون المماس هو الضلع (٢١) من الشكل السداسى المرسوم داخل المقطع . وبالمثل نرمز للنقطة المطلوب رسم الماس فيها برقمين متتالين (إذ يجب أن تحسب مثل النقطة الاولى بنقطتين متتاليتين) مثل ٤ ، ٥ فيكون المطلوب إذن هو إيجاد الضلع (٥٤) وأخيراً نرمز للنقطتين الباقيتين بالرقمين ٣ ، ٦ . ثم نرسم خط پاسكال π ≡ ص ع حيث ص هى نقطة تقاطع الضلع (٣٢) مع الضلع المقابل له (٦٥) وحيث ع هى نقطة تقاطع الضلع (٤٣) مع الضلع المقابل له (١٦) . فاذا تقاطع الضلع (٢١) مع π فى النقطة س ووصلت س بالنقطة ٥٤ المطلوب رسم المماس فيها كان هذا الواصل هو الضلع (٥٤) اى المماس المطلوب .

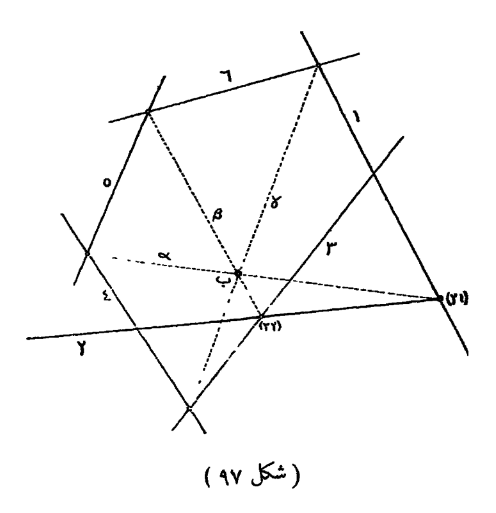
المسألة الثالثة (مزاوجة للاولى)

إذا علم من مقطع مخروطى خمسة مماسات فالمطلوب رسم مماس سادس له من نقطة معلومة على أحد المماسات الخمسة [1] .

إذا رمزنا فى (شكل ٩٧) للمماس المعلومة عليه النقطة بالرقم ١ فيجب أن يكون المماس المجهول والمطلوب رسمه من هذه النقطة إما التالى للمماس ١ مباشرة أو السابق له مباشرة أى يجب أن نسميه إما ٢ أو ٦ وقد رمزنا فى الشكل لهذا المماس المطلوب بالرقم ٢ فتكون النقطة المعلومة هى نقطة تقاطع الضلعين ١ ، ٢ أى النقطة (٢١) من أضلاع الشكل السداسى ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ المرسوم خارج المقطع المخروطى . فالمستقيم α الذى يصل الرأسين المتقابلين

(١) أو بعبارة آخرى : المطلوب إنشاء مقطع مخروطى معلوم بخمسة مماسات وذلك برسم مماسات جديدة له .

(٢١) ؟ (٥٤) يمر بنقطة بريانشون ب وكذا المستقيم γ الذى يصل الرأسين المتقابلين (٤٣) ؟ (١٦) فتكون ب هى نقطة تقاطع α ؟ γ . فاذا وصلت ب بالنقطة (٦٥) وجب أن يكون هذا الواصل هو المستقيم الثالث β الذى يصل الرأسين المتقابلين (٣٢) ؟ (٦٥) وبذلك [illegible] تلاقى β مع المماس ٣ ويكون المماس المطلوب ٢ هو المستقيم الذى يصل النقطتين (٢١) ؟ (٣٢) .



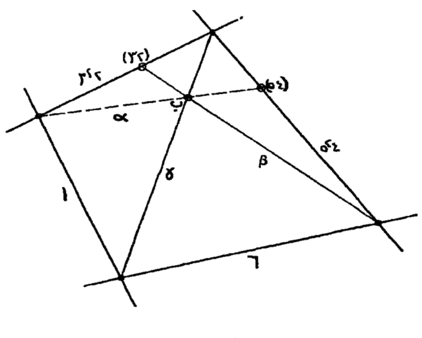
(شكل ٩٧)

ملحوظة : إذا علم من المقطع المخروطى مماس بنقطة التماس فيعتبر مماسين متتاليين ويرمز له لذلك برقمين متتالين مثل ١؟٢ وتكون نقطة التماس هى الرأس (٢١) .

المسألة الرابعة (مزاوجة للثانيـة)

المطلوب تعيين نقطة تماس أحد المماسات لمقطع مخروطى معلوم بخمسة مماسات .

لشرح الملحوظة السابقة نفرض فى (شكل ٩٨) أن المعلوم أربعة مماسات ونقطة تماس أحدها (وهذا يعادل خمسة مماسات) وأن المطلوب تعيين نقطة تماس أحد المماسات الاخرى .



(شكل ٩٨)

لذلك نرمز للمماس المعلومة نقطة تماسه برقمين متتاليين كما قدمنا مثل ٢،٣ وبذا تكون نقطة التماس هى الرأس (٣٢) ونرمز بالمثل للمماس المطلوب تعيين نقطة تماسه برقمين متتاليين مثل ٤،٥ فتكون نقطة التماس المطلوبة هى الرأس (٥٤) ثم نكمل الشكل السداسى بتسمية الضلعين الباقيين ١،٦ .

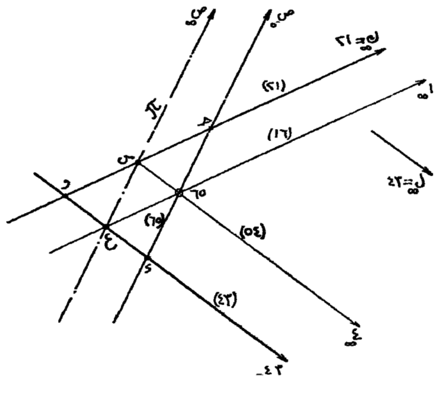
فنقطة بريانشون ب تتعين فى هذه الحالة بتقاطع المستقيم β الذى يصل الرأسين المتقابلين (٣٢)،(٦٥) مع المستقيم γ الذى يصل الرأسين المتقابلين (٤٣)،(١٦) . فاذا وصلنا ب بالرأس (٢١) كان هو المستقيم الثالث α

الذى يصل الرأسين المتقابلين (٢١) ، (٥٤) والذى يقطع لذلك المماس ٥٤ ، ٥٤ فى الرأس (٥٤) وهى نقطة التماس المطلوبة .

بند ٩١ أمثلة تطبيقية على نظريتى باسكال وبريانشون

إذا لاحظنا ما سبق ذكره فى (بند ٦٥) فيما يتعلق بالعمليات الهندسية البسيطة الخاصة بالنقط والمستقيمات التى فى اللانهاية فان الامثلة الآتية وكلها من الدرجة الأولى لا تختلف عن المسائل الرئيسية المشروحة فى البند السابق مع جواز تكرار هذه المسائل فى المثال الواحد .

مثال ١ : إذا علم من قطع زائد أحد الخطين التقربيين واتجاه الآخر وعلمت أيضاً نقطة عليه والمماس فيها فالمطلوب رسم الخط التقربى الثانى نفسه (شكل ٩٩) .



(شكل ٩٩)

المعلوم فى هذا المثال خمس نقط من المنحنى لأن الخط التقربى المعلوم وهو المماس فى إحدى نقطتى القطع الزائد اللتين فى اللانهاية — يمكن اعتباره نقطة على المقطع المخروطى المماس فيها معلوم وبالمثل النقطة الاخرى المعلوم فيها

المماس ولذلك يصح اعتبار كل من هاتين النقطتين نقطتين متتاليتين ومجموع ذلك أربع نقط واتجاه الخط التقربى الآخر يعين نقطة القطع الزائد الثانية التى فى اللانهاية أى النقطة الخامسة على المقطع [١] .

ولما كان المطلوب فى المسألة هو الخط التقربى الثانى أى المماس فى النقطة الثانية $ل_\infty$ التى فى اللانهاية فان هذا المثال يطابق المسألة الرئيسية الثانية (شكل ٩٦) . ولذا رمزنا فى (شكل ٩٩) للنقطة $ك_\infty$ المعلوم فيها الخط التقربى بالرقمين المتتاليين ٢١ وللنقطة $ل_\infty$ المطلوب رسم خطها التقربى بالرقمين ٤٣ وللنقطة المعلوم فيها المماس بالرقمين ٦٥ وبذا يكون الخط التقربى المعلوم هو الضلع (٢١) والمماس المعلوم هو الضلع (٦٥) والخط التقربى المطلوب رسمه هو الضلع (٤٣) ويكون خط پاسكال فى هذه الحالة هو المستقيم $\pi \equiv$ س $ص_\infty$ حيث س هى نقطة تقاطع الضلعين المتقابلين (٢١) ، (٥٤) وحيث $ص_\infty$ هى نقطة تقاطع الضلعين المتقابلين (٣٢)$_\infty$ ، (٦٥) والأول منهما هو نفس المستقيم الذى فى اللانهاية لأنه يصل النقطتين ٢ ، ٣ اللتين فى اللانهـــاية . فاذا تقابل الضلع (١٦) مع π فى النقطة الثالثة ع ورسم من ع مواز للاتجاه $ل_\infty$ أى وصلت ع بالنقطة $ل_\infty$ كان هو الضلع (٤٣) أى الخط التقربى المطلوب [٢] .

مثال ٢ : إذا علم من قطع مكافىء ثلاثة مماسات ونقطة التماس على أحدها فالمطلوب رسم مماس القطع الموازى لاتجاه معلوم [٣] .

---

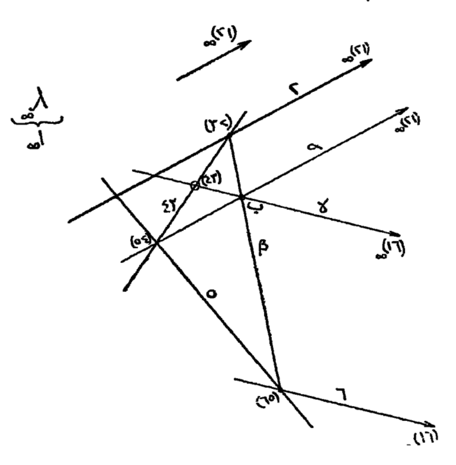
(١) يلاحظ أنه كان يمكن اعتبار الخط التقربى والمماس فى النقطة المعلومة — أربعة مماسات لو كان المعلوم من القطع الزائد مماس خامس بدلا من النقطة الخامسة .

(٢) يلاحظ أن النقطة المعلومة ٦٥ يجب أن تكون بمقتضى خاصية القطع الزائد المشروحة فى (بند ٧٣ ى) — فى منتصف البعد حـ ى (شكل ٩٩) فباستخدام هذه الخاصية يمكن رسم الخط التقربى المطلوب بطريقة بسيطة جداً .

(٣) مثل هذا المثال فى القطع الناقص أو الزائد مسألة من الدرجة الثانية (أنظر بند ٩٢ حـ) ولكنه فى القطع المكافىء حيث لا يمكن رسم اكثر من مماس واحد له مواز لاتجاه معلوم (بند ٧٤) — من الدرجة الاولى .

لما كان المستقيم λ_∞ الذى فى اللانهاية فى المستوى يعتبر مماساً للقطع المكافىء وكان المماس المعلومة نقطة تماسه يحسب بمماسين فالمقطع المخروطى يعتبر فى هذه الحالة معلوماً بخمسة مماسات . ولما كان الاتجاه المعلوم يمكن اعتباره نقطة معلومة على المماس λ_∞ الذى فى اللانهاية كان هذا المثال مطابقاً للمسألة الرئيسية الثالثه (شكل ٩٧) .

لذلك نرمز فى (شكل ١٠٠) للماس λ_∞ الذى فى اللانهاية بالرقم ١_∞ ونرمز للمماس المطلوب بالرقم ٢ فتكون النقطة التى فى اللانهاية « الواقعة » على المماس λ_∞



(شكل ١٠٠)

والتى يحددها الاتجاه المعلوم هى الرأس $(٢١)_\infty$. ثم نكمل الشكل السداسى المرسوم حول المنحنى بتسمية المماسات الثلاثة الباقية : ٤٣ ، ٥ ، ٦ فتكون نقطة التماس المعلومة على المماس ٤٣ هى الرأس (٤٣) .

ثم نجد نقطة بريانشون ب بمعلومية α وهو المستقيم الذى يصل الرأسين المتقابلين $(21)_\infty$ ، (٥٤) ومعلومية المستقيم γ الذى يصل الرأسين المتقابلين (٤٣) ، (١٦)$_\infty$ فتكون ب نقطة تقاطع هــذين المستقيمين . فاذا وصلنا ب بالرأس (٦٥) كان هذا الواصل هو المستقيم الثالث β الذى يصل الرأسين المتقابلين (٣٢) ، (٦٥) والذى يقطع لنلك المماس ٣ فى الرأس (٣٢) فيكون المستقيم المرسوم من هذه الرأس موازياً للاتجاه المعلوم [أى الذى يصل الرأس (٣٢) بالرأس $(21)_\infty$] هو المماس ٢ المطلوب .

مثال ٣ : اذا علم من قطع مكافىء مماسان ونقطة التماس لكل منهما فالمطلوب تعيين الرأس والمحور بواسطة نظرية بريانشون .

لحل هذا المثال تتبع الخطوات الآتية :

اولا — تعيين اتجاه المحور أو بعبارة أخرى تعيين نقطة تماس المستقيم λ_∞ الذى فى اللانهاية والذى هو المماس الخامس (وهذا يطابق المسألة الرئيسية الرابعة فى شكل ٩٨) .

ثانياً — رسم المماس الموازى للاتجاه العمودى على اتجاه المحور (وهذا يطابق كما قدمنا فى المثال الثانى المسألة الرئيسية الثالثة فى شكل ٩٧) [1] فيكون هو المماس فى الرأس .

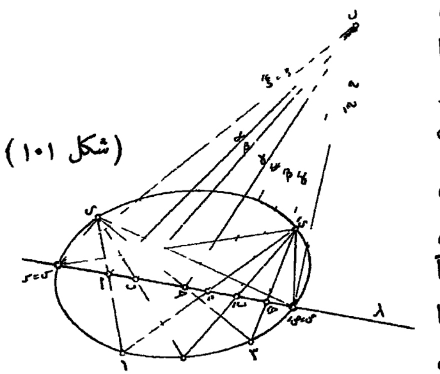
ثالثاً — تعيين نقطة التماس للماس فى الرأس (بعد جعل عدد المماسات المعلومة خمسة فقط ليطابق المسألة الرئيسية الرابعة فى شكل ٩٨) فتكون هى رأس القطع المكافىء ومنها نرسم موازياً لاتجاه المحور فيكون هو المحور المطلوب .

(١) يلاحظ أنه بعد تعيين اتجاه المحور فى الخطوة الأولى يصبح معلوماً من المنحنى ستة مماسات (ثلاثة مماسات بنقطة التماس لكل منها) فيحسن قبل البدء بحل الجزء الثانى من المثال — أن نستغنى عن أحد هذه المماسات وذلك مثلا بحذف إحدى نقطتى التماس المعلومتين فى رأس المسألة

بند : ٩٢ مسائل الدرجة الثانية ودائرة شتاينر [1]

(ا) الصفوف المؤتلفة الواقعة على حامل واحد والحزم المؤتلفة المارة براس واحـدة

اذا فرضنا فى (شكل ١٠١) مستقيما λ يقطع المقطع المخروطى المتعين بالنقط الخمس ر ، ر′ ، ١ ، ٢ ، ٣ فى النقطتين س ، ص ويقطع أشعة الحزمتين المؤتلفين اللتـين رأساهما ر ، ر′ فى النقط ا ، ب ، حـ ، ا′ ، ب′ ، حـ′ فمن الواضح أن صفى النقط الواقعين معاً على الحامل λ هما صفـان مؤتلفان



(شكل ١٠١)

فيهما ا ، ا′ ، ب ، ب′ ، حـ ، حـ′ أزواج من النقط المتناظرة وأن العلاقة الائتلافية بينهما قد تحددت بمعلومية هذه الازواج الثلاثة . فاذا كانت ى نقطة ما من الصف الاول أمكن تعيين النقطة ى′ فى الصف الثانى المناظرة الى ى (وذلك بتوصيل الشعاع ر ى فى الحزمة ر ثم تعيين الشعاع المناظر له فى الحزمة ر′ كما تقدم فى بند ٨٣) بحيث يكون (ا′ ب′ حـ′ ى′) = (ا ب حـ ى) .

(1) J. Steiner (١٨٣٣)

ويؤخذ من الشكل أن كلا من النقطتين س ≡ س′ ؛ ص ≡ ص′ تناظر نفسها فى هذين الصفين المؤتلفين والمحدى الحامل ويطلق على هاتين النقطتين اسم النقطتين المضاعفتين .

وفى كل علاقة ائتلافية من النوع السابق لا يمكن أن يوجد اكثر من نقطتين مضاعفتين اثنتين . ويجوز أن تكون هاتان النقطتان إما حقيقيتين مختلفتين كما فى (شكل ١٠١) أو حقيقيتين متحدتين (كما لوكان λ مماسا) أو حقيقيتين تخيليتين (كما لو كان λ غير قاطع للمنحنى) . أما اذا وجدت ثلاث نقط مضاعفة (مناظرة لنفسها) فان كل نقطة على الحامل المشترك للصفين تناظر نفسها أيضاً لأن العلاقة الائتلافية بين الصفين يمكن اعتبارها قد تحددت فى هذه الحالة بهذه النقط الثلاث المناظرة لنفسها .

واذا فرضنا فى (شكل١٠١) نقطةمامثل ل ووصلناهابالنقط ا ، ب ، حـ ... ؛ ا′ ، ب′ ، حـ′ ... حصلنـــا على حزمتين مؤتلفتين مشتركتين فى الرأس ل فيهما $\xi \equiv \xi'$ ؛ $\eta \equiv \eta'$ شعاعان يناظر كل منهما نفسه ويطلق عليهما اسم المستقيمين المضاعفين أو الشعاعين المضاعفين .

(ب) المسألتان الاساسيتان

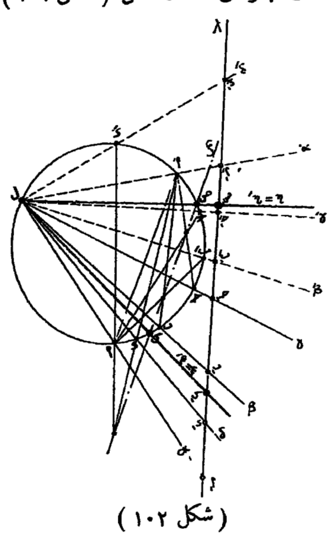
المسألة الاولى :

اذا علمت العلاقة الائتلافية بين حزمتين مؤتلفتين مشتركتين فى الرأس ل بثلاثة أزواج من الأشعة المناظرة α ، α' ؛ β ، β' ؛ γ ، γ' فالمطلوب رسم :

أولا — الشعاع δ' فى إحدى الحزمتين المناظر للشعاع δ فى الحزمة الاخرى بحيث يكون $(\alpha' \ \beta' \ \gamma' \ \delta') = (\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta)$

ثانياً — الشعاعين المضاعفين

لذلك نرسم دائرة حيثما اتفق مارة بالرأس المشتركة ل (شكل ١٠٢) ونفرض أن أزواج الاشعة المتناظرة فى الحزمتين تقطع هـــذه الدائرة فى الازواج ا، ا′ ؟ ب، ب′ ؟ حـ، حـ′ من النقط المتناظرة ثم نختار أى زوج منها مثل ا ؟ ا′ ونصل ا بالنقط ا′ ؟ ب′ ؟ حـ′ ونصل ا′ بالنقط ا ؟ ب ؟ حـ فتتكوّن بذلك حزمـــتان جديدتان رأساهما ا ؟ ا′. هاتان الحزمتان مؤتلفتان لأن :



(شكل ١٠٢)

ا (ا′ ب′ حـ′ ...) = (α′ β′ γ′ ...) (راجع بند ٧٧)

وكذلك ا′ (ا ب حـ ...) = (α β γ ...)

ولكن (α β γ ...) = (α′ β′ γ′ ...) فرضاً

∴ ا (ا′ ب′ حـ′ ...) = ا′ (ا ب حـ ...)

ومن حيث إن المستقيم ا ا′ الذى يصل رأسى هاتين الحزمتين المؤتلفتين يناظر نفسه فهما إذن حزمتان منظورتان بحيث يكون محور المنظورية هو المستقيم الذى يصل نقطة تقاطع المستقيمين المتناظرين ا ب′ ؟ ا′ ب بنقطة تقاطع ا حـ′ ؟ ا′ حـ (راجع بند ٨٢).

فاذا كان δ شعاعاً حيثما اتفق من إحدى الحزمتين المشتركتين فى الرأس ل وقطع هذا الشعاع الدائرة فى النقطة ى فان المستقيمين ا' ى ، ا ى' من الحزمتين المنظورتين ا' ، ا يتلاقيان أيضاً على محور المنظورية ع وبذا تتعين ى' ويكون δ' ≡ ل ى' هو الشعاع المطلوب المناظر الى δ لأن

(α' β' γ' δ') = ا'(ا ب حـ ى) = ا(ا' ب' حـ' ى') = (α β γ δ)

واذا أردنا تعيين الشعاعين المناظرين للمستقيمين ل س ، ل ص اللذين يصلان الرأس ل بنقطتى تقاطع محور المنظورية مع الدائرة بالطريقة السابقة وجدنا أن كلا منهما يناظر نفسه فهما إذن الشعاعان المضاعفان ع ≡ ع' ، η ≡ η' فى الحزمتين .

وتعرف الدائرة المساعدة المارة بالرأس ل باسم *دائرة شتاينر* (1) .

ولما كان محور المنظورية ع يمر بالنقطتين س ، ص وهما نقطتا تقاطع الشعاعين المضاعفين مع الدائرة فانه اذا رسمت دائرة ما من دوائر شتاينر (أو مقطع مخروطى يمر بالرأس ل) تحدد *محور واحد* للمنظورية (بفرض ثبوت أزواج الاشعة المتناظرة المحددة للعلاقة الائتلافية بين الحزمتين) أى أن هذا المحور لا يتوقف على النقطتين ا ، ا' اللتين اخترناهما فى مبدأ الامر رأسين للحزمتين المنظورتين . ولذلك سنتكلم فيما يلى عن هذا المحور باسم *محور المنظورية للدائرة* (*أو للمقطع المخروطى*) وهو يمر — نظراً لعدم توقفه على النقطتين ا ا' كما قدمنا — بنقط تقاطع أزواج المستقيمات

ا ب' ، ا' ب ؛ ا حـ' ، ا' حـ ؛ ب حـ' ، ب' حـ ؛ ا ى' ، ا' ى ؛ ب ى' ، ب' ى ؛ حـ ى' ، حـ' ى ...

ويتعين لهذا السبب بمعلومية أى اثنتين من هذه النقط .

---

(1) يلاحظ أنه كان يمكن استخدام مقطع مخروطى ماراً بالرأس ل بدلا من الدائرة وانما اختيرت الدائرة للسهولة .

المسألة الثانية :

اذا علمت العلاقة الائتلافية بين صفين مؤتلفين واقعين على حامل واحد بثلاثة أزواج من النقط المتناظرة فالمطلوب تعيين النقطتين المضاعفتين .

هذه المسألة مزاوجة للاولى وتحل بنفس الطريقة السابقة بعد تحويل الصفين الى حزمتين مؤتلفتين مشتركتين فى الرأس التى يجوز أن تكون أية نقطة غير واقعة على حامل الصفين .

ملحوظة هامة

يعرف بعض العلماء النسبة المضاعفة لاربع نقط ا ، ب ، حـ ، ى على مقطع مخروطى بأنها النسبة المضاعفة للاشعة الاربعة التى تصل هذه النقط باية نقطة مثل ل على المنحنى ويطلقون كذلك اسم الصف على مجموعة النقط الواقعة على المقطع .

ويقال لصفين من النقط ا ب حـ ى . . . ، ا' ب' حـ' ى' . . . على مقطع مخروطى (شكل ١٠٢) إنهما صفان مؤتلفان اذا تساوت نسبتاهما المضاعفتان . فاذا علمت ثلاثة أزواج ا ، ا' ، ب ، ب' ، حـ ، حـ' من النقط المتناظرة فى صفين مؤتلفين على مقطع مخروطى فان طريقة الحصول على النقطة ى' فى أحد الصفين المناظرة لنقطة ما مثل ى من الصف الآخر وكذلك طريقة تعيين النقطتين المضاعفتين س ≡ س' ، ص ≡ ص' تكون بتحويل الصفين على المقطع الى حزمتين رأسهما المشترك إحدى نقط المنحنى ثم تعيين محور المنظورية كما بينا فى (شكل ١٠٢) وبذلك يمكننا القول ان النقطتين المضاعفتين (حقيقيتين أو تخيليتين) فى صفين مؤتلفين على منحنى مقطع مخروطى هما نقطتا تقاطع محور المنظورية مع المنحنى [(١)]

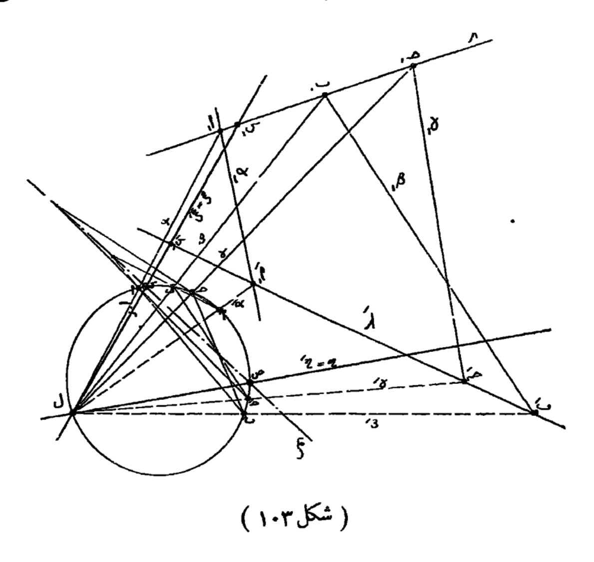
(١) ولهذا السبب أطلقنا على هذا المحور اسم « محور المنظورية للدائرة أو للمقطع » فهو إذن المحور الذى يمكن الحصول عليه اذا تعينت العلاقة الائتلافيه بين صفين على المنحنى أو حزمتين مشتركتين فى رأس واقعة على المنحنى .

(حـ) المسألتان الرئيسيتان ذواتا الدرجة الثانية

المسألة الاولى :

اذا علمت نقطة مثل ل فالمطلوب برسم المماسين منها الى مقطع مخروطى معلوم بخمسة مماسات λ ، λ' ، α_1 ، β_1 ، γ_1 (شكل ١٠٣)

لذلك نجعل ثلاثة من المماسات المعلومة مثل α_1 ، β_1 ، γ_1 تقطع الاثنين الباقيين λ ، λ' فى أزواج النقط $ا_1$ ، $ا'_1$ ؛ $ب_1$ ، $ب'_1$ ؛ $حـ_1$ ، $حـ'_1$ فيتكون بذلك صفان مؤتلفان حاملاهما λ ، λ' ثم نصل ل بتلك النقط فنحصل على ثلاثة أزواج



(شكل ١٠٣)

α . α' ، β ، β' ، γ ، γ' من الاشعة المتناظرة فى حزمتين مؤتلفتين مشتركتين فى الرأس ل ثم نجد الشعاعين المضاعفين $\xi \equiv \xi'$ ، $\eta \equiv \eta'$ فى هاتين

الحزمتين كما تقدم فى (شكل ١٠٢) فيكونان هما المماسان المطلوبان . لأنه اذا كانت $س_١$ ، $س'_١$ نقطتى تقاطع ع مع λ ، λ' على التوالى فمن حيث إن

$$(\alpha \ \beta \ \gamma \ \xi) = (\alpha' \ \beta' \ \gamma' \ \xi')$$ بالعمل

$$\therefore (ا_١ ب_١ حـ_١ س_١) = (ا'_١ ب'_١ حـ'_١ س'_١)$$

وينتج من ذلك أن المستقيم ع الذى يصل النقطتين المتناظرتين $س_١$ ، $س'_١$ مماس (راجع بند ٨٤) .

واذا كانت النقطة ل المطلوب رسم المماسين منها الى المقطع المخروطى هى نقطة فى اللانهاية $ل_\infty$ كانت جميع الاشعة المتناظرة α ، α' ؛ β ، β' ؛ γ ، γ' فى هذه الحالة متوازية . فللحصول على الشعاعين المضاعفين نقطع الحزمتين بمستقيم حيثما اتفق وبذلك نحول الحزمتين المؤتلفتين المشتركتين فى « الرأس » $ل_\infty$ الى صفين مؤتلفين على حامل واحد ثم نجد النقطتين المضاعفتين فى هذين الصفين ونصلهما بالرأس $ل_\infty$ أو بعبارة أخرى نرسم منهما موازيين لاشعة الحزمتين فيكونان هما الشعاعان المضاعفان أى المماسان المطلوبان[1] .

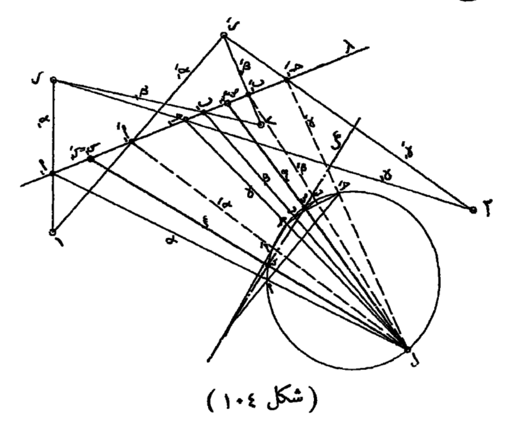
المسألة الثانية :

اذا علم مستقيم مثل λ فالمطلوب تعيين نقطتى تقاطعه مع مقطع مخروطى معلوم بخمس نقط ر ، ر' ، ١ ، ٢ ، ٣ (شكل ١٠٤) .

لذلك نصل ثلاثا من النقط المعلومة مثل ١ ، ٢ ، ٣ بالنقطتين الباقيتين ر ، ر' فنحصل بذلك على ثلاثة أزواج $\alpha_١$ ، $\alpha'_١$ ؛ $\beta_١$ ، $\beta'_١$ ؛ $\gamma_١$ ، $\gamma'_١$ من الاشعة المتناظرة فى الحزمتين المؤتلفتين اللتين رأساهما ر ، ر' . فاذا تقاطع λ مع هذه الاشعة فى النقط $ا_١$ ، $ا'_١$ ؛ $ب_١$ ، $ب'_١$ ؛ $حـ_١$ ، $حـ'_١$ وهى ثلاثة

(١) فى القطع المكافىء تؤول هذه الحالة الاخيرة الى مسألة من الدرجة الاولى (راجع المثال الثانى فى بند ٩١) .

أزواج من النقط المتناظرة تحدد العلاقة بين الصفين المؤتلفين المتحدى الحامل λ كانت النقطتان المضاعفتان س١ ≡ س١′ ، ص١ ≡ ص١′ فى هذين الصفين هما نقطتا التقاطع المطلوبتان



(شكل ١٠٤)

ولمعرفة نوع المقطع المخروطى اذا علمت منه خمس نقط نعين نقطتى تقاطعه مع المستقيم الذى فى اللانهاية وذلك بنفس الطريقة المشروحة أنفاً مع ملاحظة ما ذكر فى (بند ٦٥) عن النقط والمستقيمات التى فى اللانهاية[1] . فيكون المنحنى قطعاً زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً على حسب ما اذا كانت نقطتا التقاطع حقيقيتين مختلفتين أو حقيقيتين متحدتين أو تخيليتين أى على حسب ما اذا كان محور المنظورية لدائرة شتاينر قاطعاً لهذه الدائرة (فى نقطتين حقيقيتين مختلفتين) أو ماساً لها أو غير قاطع لها .

(١) ففى هذه الحالة يكون المستقيم الذى فى اللانهاية هو الحامل المشترك لصفى النقط ا١ ، ب١ ، حـ١ ، ا١′ ، ب١′ ، حـ١′ وتكون هذه النقط هى النقط التى فى اللانهاية للمستقيمات α_1 ، β_1 ، γ_1 ، α_1' ، β_1' ، γ_1' على التوالى

ملحوظة : اذا أريد رسم مماسين من نقطة الى مقطع مخروطى معلوم بخمس نقط أو أريد تعيين نقطتى تقاطع مستقيم مع مقطع مخروطى معلوم بخمسة مماسات فانه يجب كخطوة أولى استخدام نظرية باسكال فى الحالة الاولى فى تحويل النقط المعلومة الى مماسات واستخدام نظرية بريانشون فى الحالة الثانية فى تحويل المماسات المعلومة الى نقط .

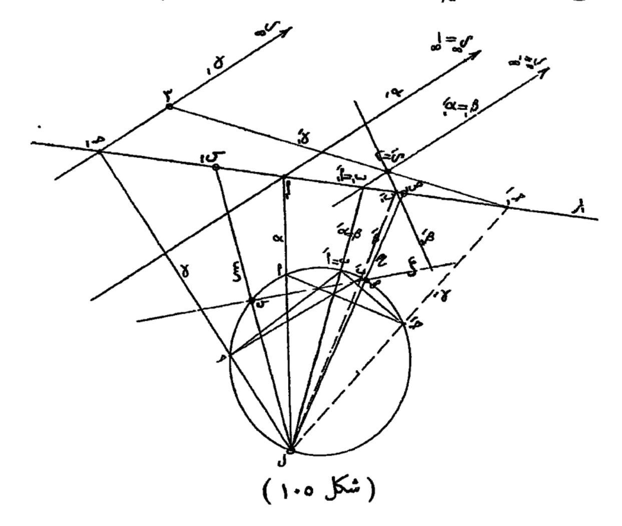
بند ٩٣ : أمثلة تطبيقية من الدرجة الثانية

مثال ١ : المعلوم من قطع زائد أحد خطيه التقريبيين ونقطتان والمماس فى إحداهما والمطلوب تعيين نقطتى تقاطعه مع مستقيم معلوم λ (شكل ١٠٥)

الخطوة الاولى — نختار نقطتين من النقط المعلومة ونجعلهما رأسين ر ، ر' للحزمتين المؤتلفتين الناتجتين من توصيلهما بالنقط الاخرى على المنحنى . فاذا كان المقطع المخروطى معلوماً بخمس نقط مختلفة (ليس بينها نقط متتالية) كما هو الحال فى المسألة الرئيسية الثانية (بند ٩٢) أخذت ر ، ر' حيثما اتفق من بين النقط الخمس أما اذا كان المماس فى إحدى النقط معلوماً فتختار هذه النقطة بالذات رأساً لاحدى الحزمتين المذكورتين . ففى هذا المثال نختار النقطتين المعلوم فى كل منهما المماس (إحداهما نقطة فى اللانهاية) ليكونا الرأسين $ر_\infty$ ، ر' .

الخطوة الثانية — نرمز للثلاث نقط ، الاخرى ، بالارقام ١ ، ٢ ، ٣ فبما أن كلا من الرأسين $ر_\infty$ ، ر' تمثل نقطتين متتاليتين لذلك نرمز للنقطة المجاورة للرأس $ر_\infty$ والمنطبقة عليها بواحد من هذه الارقام وليكن ١_∞ وبالمثل نرمز للنقطة المجاورة للرأس ر' بالرقم ٢ مثلا أى أن $ر_\infty \equiv ١_\infty$ ، $ر' \equiv ٢$ وتكون النقطة الباقية ٣ .

الخطوة الثالثة — نصل كلا من $ر_{\infty}$ ، $ر'$ بالنقط الثلاث ١ ، ٢ ، ٣ فتقطع الاشعة المستقيم المعلوم λ فى النقط $ا_١$ ، $ب_١$ ، $حـ_١$ ؛ $ا'_١$ ، $ب'_١$ ، $حـ'_١$



(شكل ١٠٥)

ويلاحظ أن الشعاع الذى يصل إحدى الرأسين بنقطة مجاورة لها هو نفس المماس فى الرأس فالشعاع الذى يصل $ر_{\infty}$ بالنقطة $ا_{\infty}$ هو نفس الخط التقربى المعلوم (أى المماس فى الرأس $ر_{\infty}$) ويقطع المستقيم λ فى النقطة $ا_١$ وبالمثل الشعاع $ر'$ — ٢ هو نفس المماس المعلوم فى $ر'$ ويقطع المستقيم λ فى النقطة $ب'_١$.

الخطوة الرابعة — نعين النقطتين المضاعفتين $س_١$ ، $ص_١$ للصفين $ا_١ ب_١ حـ_١$ ... ، $ا'_١ ب'_١ حـ'_١$ ... بواسطة طريقة شتاينر . فنصل لذلك أية نقطة مثل ل بالنقط $ا_١$ ، $ب_١$ ، $حـ_١$ ، $ا'_١$ ، $ب'_١$ ، $حـ'_١$ فاذا قطعت الاشعة أية دائرة مارة بالنقطة ل (دائرة شتاينر) فى النقط ا ، ب ، حـ ، $ا'$ ، $ب'$ ، $حـ'$

على التوالى وكان ع محور المنظورية (لهذه الدائرة) الذى يصل نقطة تقـ ا ب' مع ا' ب [١] بنقطة تقاطع ا حـ' مع ا' حـ (ويمر أيضاً بنقطة تقاطع ب حـ' مع ب' حـ) فان المستقيمين ل س ، ل ص اللذين يصلان ل بالنقطتين س ، ص [٢] لتقاطع ع مع الدائرة هما الشعاعان المضاعفان ع ، η فى الحزمتين المؤتلفتين المشتركتين فى الرأس ل ويقطعان المستقيم المعلوم λ فى النقطتين المضاعفتين $س_١$ ، $ص_١$ وهما نقطتا تقاطعه مع القطع الزائد .

مثال ٢ : المطلوب رسم مقطع مخروطى يمر بنقطة مثل ل ويمس أربعة مستقيمات معلومة .

لذلك نرمز الى هذه المماسات بالرموز λ ، λ' ، $\alpha_١$ ، $\beta_١$ ونفرض أن $\alpha_١$ ، $\beta_١$ يقطعان λ ، λ' فى الزوجين $ا_١$ ؛ $ا'_١$ ، $ب_١$ ؛ $ب'_١$ من النقط المتناظرة ثم نبدأ بتعيين المماس للمنحنى فى ل (كما لو كانت ل غير واقعة على المنحنى) بالطريقة الآتية :

نرسم أية دائرة تمر بالنقطة ل (دائرة شتاينر) ونصل ل $ا_١$ ، ل $ا'_١$ ، ل $ب_١$ ، ل $ب'_١$ فتقطع هذه الاشعة الدائرة فى النقط ا . ا' ، ب ؛ ب' على التوالى . فاذا وصلنا ا ب' ، ا' ب فان هذين المستقيمين يتلاقيان فى نقطة مثل ظ تكون واقعة على محور المنظورية ع لدائرة شتاينر (بالنسبة للحزمتين المؤتلفتين المشتركتين فى الرأس ل واللتين تمر أشعتهما المتناظرة بنقط تقاطع مماسات المنحنى المطلوب رسمه مع المماسين λ ، λ') ولرسم المماس للمنحنى فى ل نلاحظ

(١) يلاحظ أن المستقيم ا' ب هو فى هذه الحالة مماس الدائرة فى النقطة ا' .

(٢) النقطتان س ، ص هما النقطتان المضاعفتان للصفين المؤتلفين ا ب حـ . . . ، ا' ب' حـ' . . . على دائرة شتاينر (قارن الملحوظة المذكورة فى آخر الفقرة ب من بند ٩٢) .

أن محور المنظورية يجب أن يمس دائرة شتاينر وذلك لانه لا يمكن رسم أكثر من مماس واحد للمنحنى من نقطة عليه أى أن المماسين المرسومين من ل الى المنحنى يجب أن يكونا حقيقيين متحدين . فاذا رسمنا من النقطة ظ مماساً لدائرة شتاينر يمسها فى نقطة مثل س فان المستقيم ل س يكون مماس المنحنى فى ل ومتى تعين هذا المماس تعين المنحنى .

ملحوظة : لما كان من الممكن رسم مماسين على وجه العموم من النقطة ظ للدائرة كان للمسألة حلان أى أنه *يوجد على وجه العموم مقطعان مخروطيان يمس كل منهما أربعة مستقيمات ويمر بنقطة معلومة .*

فاذا وقعت ظ داخل دائرة شتاينر كانت المسألة مستحيلة الحل أى أن المقطعين يكونان تخيليين فى هذه الحالة .

ونلفت النظر الى أنه لا يمكن أن ينطبق المقطعان المذكوران وذلك لعدم إمكان وقوع ظ على دائرة شتاينر (إلا اذا كانت ل واقعة على أحد المماسات الاربعة ففى هذه الحالة تكون ل نقطة التماس وتؤول المسألة الى مقطع مخروطى متعين بما يعادل خمسة مماسات) .

مثال ٣ : المطلوب رسم مقطع مخروطى يمس مستقيماً مثل λ ويمر بأربع نقط معلومة .

نترك للقارىء حل هذا المثال على منوال المثال السابق باعتباره مزاوجا له وإثبات أنه إما أن يكون للمسألة حلان أو ليس لها حل .

ونوجه النظر الى أنه ينتج من هذا المثال أنه اذا علمت أربع نقط فى المستوى فانه يوجد عدد لانهاية له من القطاعات الناقصة أو الزائدة التى تمر بها ولكن لا يوجد سوى قطعين مكافئين اثنين (يجوز أن يكونا تخيليين) لأن هذين القطعين — فضلا عن كونهما يمران بالنقط الاربع — يمسان أيضاً المستقيم الذى فى اللانهاية .

مثال ٤ : اذا تماس مقطعان مخروطيان فى نقطه مثل م وعلم من كل منهما زيادة على م والماس المشترك فيها ثلاث نقط أخرى فالمطلوب تعيين نقطتى تقاطعهما .

نعتبر المنحنيين مؤتلفين مركزياً حيث م مركز الائتلاف (بند ٧٥) فاذا وصلنا م بالنقط الثلاث الواقعة على أحد المنحنيين وعينا بواسطة نظرية پاسكال نقط تقاطع هذه المستقيمات الثلاثة مع المنحنى الثانى حصلنا على ثلاثة أزواج من النقط المتناظرة فى هذا الائتلاف المركزى وبذلك يمكن تعيين محور الائتلاف . ثم نجد نقطتى تقاطع هذا المحور مع أحد المقطعين المخروطيين بواسطة دائرة شتاينر فيكونان النقطتين المطلوب تعيينهما .

مثال ٥ : اذا تماس مقطعان مخروطيان فى نقطة مثل ا وعلم من كل منهما زيادة على المماس المشترك ع ونقطة التماس ا ثلاثة مماسات أخرى فالمطلوب رسم المماسين المشتركين الباقيين .

لذلك نعتبر المنحنيين مؤتلفين مركزياً حيث المماس المشترك ع هو محور الائتلاف فاذا تقاطع ع مع المماسات الثلاثة الاخرى لاحد المنحنيين فى النقط س ، ص ، ع ثم رسم من هذه النقط بواسطة نظرية بريانشون المماسات الثلاثة الممكنة للمنحنى الثانى لأمكن الحصول على ثلاثة أزواج من المستقيمات المتناظرة فى هذا الائتلاف المركزى وبذا يتعين مركز الائتلاف م ويكون المماسان المشتركان المطلوب رسمهما هما المماسان المرسومان من م لاحد المنحنيين (شتاينر) .

مثال ٦ : اذا علم من مقطعين مخروطيين مماسان مشتركان وعلمت نقطتا تماس كل منهما مع هذين المماسين وعلمت كذلك نقطة خامسة على كل من المنحنين فالمطلوب تعيين نقط تقاطعهما الاربع .

نعتبر المقطعين مؤتلفين مركزياً حيث مركز الائتلاف هو النقطة م ملتقى المماسين المشتركين . فاذا تقاطع وترا التماس فى المنحنيين (أى الخطان القطبيان

للنقطة م بالنسبة الى كل منهما) فى س كانت س نقطة على محور الائتلاف .
لنفرض الآن أن النقطة الخامسة على المنحنى الاول هى ا وعلى الثانى ب وأن المستقيم م ا يقابل المقطع المخروطى المار بالنقطة ب فى نقطتين ا$'$ ؛ ا$''$ (يمكن ايجادهما بواسطة شتاينر) فكل واحدة من هاتين النقطتين يصح اعتبارها مناظرة للنقطة ا فى الائتلاف المركزى وعلى ذلك يمكن الحصول على محورين للائتلاف مارين بالنقطة س وكل محور منهما يقطع أحد المنحنيين فى نقطتين (شتاينر) فتكون هذه النقط الاربع هى نقط تقاطع المنحنيين .

مثال ٧ : اذا علم من مقطعين مخروطيين نقطتان مشتركتان من نقط تقاطعهما وعلم أيضاً المماسان فى هاتين النقطتين ومماس آخر (مماس خامس) غيرهما لكل واحد من المنحنيين فالمطلوب رسم مماساتهما المشتركة الاربعة .

نترك للقارىء حل هذا المثال على منوال المثال السابق باعتباره مزاوجاً له (يؤخذ فى هذه الحالة وتر تقاطع المنحنيين محوراً للائتلاف المركزى بينهما ثم يعين مركزا الائتلاف ويرسم من كل واحد من هذين المركزين مماسان لأحد المنحنيين) .

بند ٩٤ : التضامن

لنفرض فى (شكل ١٠٢) أن ا$_1$ ، ا$_1'$ ؛ ب$_1$ ، ب$_1'$ ؛ ح$_1$ ، ح$_1'$ ثلاثة أزواج من النقط المتناظرة تحدد العلاقة الائتلافية بين صفين مؤتلفين واقعين على حامل واحد λ ولنفرض أننا اخترنا نقطة جديدة على هذا الحامل ورمزنا اليها بالرمز ى$_1$ باعتبارها إحدى نقط الصف ا$_1$ ب$_1$ ح$_1$ . . . ثم عينا (باستخدام دائرة شتاينر كما هو مبين فى بند ٩٢) النقطة ى$_1'$ المناظرة لها فى الصف ا$_1'$ ب$_1'$ ح$_1'$ . . .
فاذا اعتبرنا نفس النقطة ى$_1$ إحدى نقط الصف ا$_1'$ ب$_1'$ ح$_1'$ . . . ورمزنا اليها لهذا السبب بالرمز هـ$_1'$ (أى أن هـ$_1' \equiv$ ى$_1$) ثم عينا النقطة هـ$_1$ المناظرة لها فى الصف ا$_1$ ب$_1$ ح$_1$ . . . فانه يتضح مباشرة من طريقة شتاينر أن هـ$_1$ لا تنطبق

على وجه العموم على $ى'_١$. أما اذا انطبقت عليها قيل لهذا الزوج من النقط المتناظرة: $ى_١ \equiv هـ'_١$ ، $ى'_١ \equiv هـ_١$ إنه قابل للمبادلة وفى هذه الحالة يكون الشعاعان اللذان يصلان هاتين النقطتين باية نقطة مثل ل زوجا قابلا للمبادلة فى الحزمتين المؤتلفتين المشتركتين فى الرأس ل .

ونبرهن الآن على النظرية الآتية :

اذا أمكن اجراء عملية مبادلة بين زوج واحد من النقط المتناظرة فى صفين مؤتلفين متحدى الحامل فانه يمكن اجراء مثل هذه العملية بين جميع الازواج الاخرى .

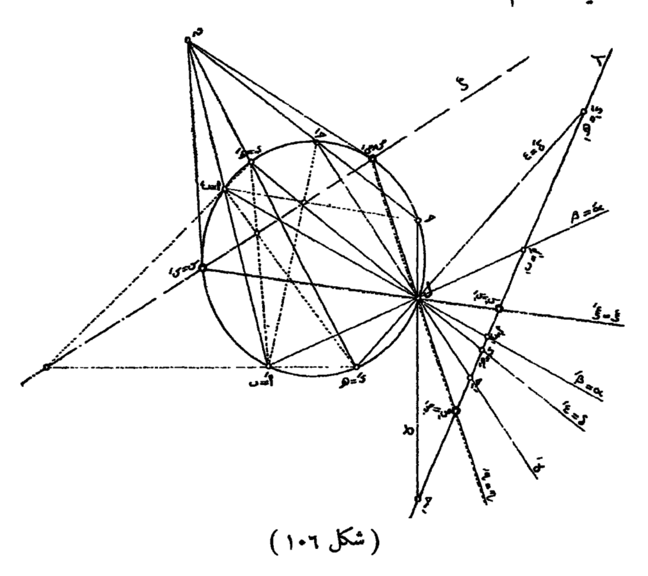
ويطلق على العلاقة الائتلافية بين النقط فى هذه الحالة اسم *العلاقة المتضامنة* أو *التضامن* كما يطلق على صفى النقط اسم *مجموعة متضامنة من النقط* أو *صف متضامن* ويقال لاى نقطتين متناظرتين إنهما *نقطتان مترافقتان* .

ويقال ما يزاوج هذا تماماً عن *الاشعة المترافقة فى مجموعة أو حزمة متضامنة من المستقيمات* .

وتتضح صحة النظرية السابقة اذا فرضنا فى (شكل ١٠٦) أن العلاقة الائتلافية بين صفين من النقط واقعين على الحامل λ قد تحددت بالازواج الثلاثة $١_١$ ، $١'_١$ ؛ $ب_١$ ، $ب'_١$ ؛ $حـ_١$ ، $حـ'_١$ من النقط المتناظرة وفرضنا أنه أمكن إجراء عملية مبادلة بين الزوجين الاولين بحيث يؤولان الى زوج واحد : $١_١ \equiv ب'_١$ ، $١'_١ \equiv ب_١$. فاذا كانت $ى'_١$ فى الصف $١'_١ ب'_١ حـ'_١ ...$ تناظر نقطة ما مثل $ى_١$ فى الصف $١_١ ب_١ حـ_١ ...$ وفرضت نقطة مثل $هـ'_١$ فى الصف $١'_١ ب'_١ حـ'_١ ...$ منطبقة على $ى_١$ فالنقطة $هـ_١$ المناظرة لها فى الصف $١_١ ب_١ حـ_١ ...$ لابد أن تنطبق على $ى'_١$ وذلك بمقتضى العملية المذكورة فى بند (٩٢ ب) إذ فى هذه الحالة يمكن اعتبار الوترين $١' ى$ ، $١ ى'$ فى دائرة شتاينر (اللذين بتلاقيهما على محور المنظورية ع للدائرة يحددان $ى'$ وبالتالى $ى'_١$) هما نفس الوترين $ب هـ'$ ، $ب' هـ$ (اللذين بتلاقيهما على ع يحددان هـ وبالتالى $هـ_١$) .

وبالمثل اذا اعتبرنا الحزمة المتضامنة من المستقيمات α β γ . . . ، α' β' γ' ...
فانه يمكن القول إن النظرية المزاوجة للنظرية السابقة صحيحة.

ويمكننا الآن بالاشارة الى (شكل ١٠٦) استخلاص الحقائق والنظريات الآتية مما تقدم:



(شكل ١٠٦)

(١) — يقال للصفين المؤتلفين ا ب حـ . . . ، ا' ب' حـ' . . . الواقعين على الدائرة أو أى مقطع مخروطى (راجع الملحوظة المذكورة فى آخر الفقرة ب من بند ٩٢) إنهما يكوّنان مجموعة متضامنة من النقط على المنحنى اذا كانت أزواج النقط المتناظرة قابلة للمبادلة أو اذا أمكن الحصول على نقط المجموعة كنقط تقاطع المنحنى مع الاشعة المترافقة فى حزمة متضامنة من المستقيمات رأسها إحدى نقط المنحنى.

(٢) — المستقيمات ا ا′ ، ب ب′ ، حـ حـ′ التى تصل أزواج النقط المترافقة فى مجموعة متضامنة على مقطع مخروطى تمر جميعاً بنقطة واحدة ن هى قطب محور المنظورية ع بالنسبة للمقطع وتسمى بقطب التضامن .

تنتج هذه النظرية مباشرة من الخواص القطبية البسيطة للمقاطع المخروطية حيث محور المنظورية ع هو المحل الهندسى لاقطاب المستقيمات ا ا′ ، ب ب′ ، حـ حـ′ ، ... بالنسبة للمنحنى .

(٣) — يتعين التضامن بين مجموعة متضامنة من النقط على مستقيم أو على مقطع مخروطى بمعلومية زوجين اثنين من النقط المترافقة لانه اذا علم على المستقيم λ الزوجان $ا_١$ ، $ا_١'$ ، $حـ_١$ ، $حـ_١'$ وعلى المقطع (دائرة شتاينر فى شكل ١٠٦) الزوجان ا ، ا′ ، حـ ، حـ′ وتقابل المستقيمان ا ا′ ، حـ حـ′ فى النقطة ن التى هى قطب التضامن لأمكن بكل سهولة ايجاد النقطة ء′ المرافقة لاية نقطة مثل ء على المنحنى (ء′ هى نقطة تقاطع المستقيم ن ء مع المنحنى) ومتى علمت ء′ أمكن تعيين النقطة $ء_١'$ المرافقة الى النقطة $ء_١$ على المستقيم λ .

(٤) — يؤخذ من (شكل ١٠٦) أنه لما كانت

$(ا_١ ب_١ حـ_١ ء_١) = (ا_١' ب_١' حـ_١' ء_١')$ وكانت $ب_١ \equiv ا_١'$ ، $ب_١' \equiv ا_١$ فان

$$(ا_١ ا_١' حـ_١ ء_١) = (ا_١' ا_١ حـ_١' ء_١')$$

ومعنى هذا أنه لما كان التضامن يتعين بمعلومية زوجين من النقط المترافقة فانه اذا علمت ثلاثة أزواج ا ، ا′ ، ب ، ب′ ، حـ ، حـ′ من النقط المتناظرة فان الشرط اللازم والكافى لكى تكون هذه النقط صفاً متضامناً هو أن تكون

$$(ا ب حـ ا′) = (ا′ ب′ حـ′ ا)$$

(٥) — اذا حذفنا فى (شكل ١٠٦) الرقم «١» من الحروف الدالة على نقط الحامل λ وفرضنا أن النقطة و على هذا الحامل هى النقطة المرافقة للنقطة $و_\infty'$ التى فى اللانهاية فبمقتضى النظرية السابقة تكون

$$(\text{ا ب و و}'_{\infty}) = (\text{ا}'\,\text{ب}'\,\text{و}'_{\infty}\,\text{و})\text{ ؛ }(\text{ا حـ و و}'_{\infty}) = (\text{ا}'\,\text{حـ}'\,\text{و}'_{\infty}\,\text{و})\text{ ؛}$$

$$\therefore \frac{\text{ا و}}{\text{ب و}} : \frac{\text{ا و}'_{\infty}}{\text{ب و}'_{\infty}} = \frac{\text{ا}'\,\text{و}'_{\infty}}{\text{ب}'\,\text{و}'_{\infty}} : \frac{\text{ا}'\,\text{و}}{\text{ب}'\,\text{و}}\text{ ؛}$$

$$\frac{\text{ا و}}{\text{حـ و}} : \frac{\text{ا و}'_{\infty}}{\text{حـ و}'_{\infty}} = \frac{\text{ا}'\,\text{و}'_{\infty}}{\text{حـ}'\,\text{و}'_{\infty}} : \frac{\text{ا}'\,\text{و}}{\text{حـ}'\,\text{و}}\text{ ؛ } \ldots$$

$$\frac{\text{ا و}}{\text{ب و}} : ١ = ١ : \frac{\text{ا}'\,\text{و}}{\text{ب}'\,\text{و}}\text{ ؛ }\frac{\text{ا و}}{\text{حـ و}} : ١ = ١ : \frac{\text{ا}'\,\text{و}}{\text{حـ}'\,\text{و}}\text{ ؛ } \ldots$$

$$\text{ا و . ا}'\text{ و} = \text{ب و . ب}'\text{ و ؛ ا و . ا}'\text{ و} = \text{حـ و . حـ}'\text{ و ؛} \ldots$$

أى أن $\text{و ا . و ا}' = \text{و ب . و ب}' = \text{و حـ . و حـ}'$

$= \text{و ى . و ى}' = \ldots$ مقداراً ثابتاً ك

وتسمى النقطة و بمركز التضامن ويكون معنى المعادلات السابقة أن حاصل ضرب بعدى أى نقطتين مترافقتين فى صف متضامن (على مستقيم) عن مركز التضامن لهذا الصف يساوى مقداراً ثابتاً .

وكثيراً ما يعتبر عكس هذه النظرية تعريفاً للصف المتضامن .

(٦) — يؤخذ من النظرية السابقة أنه اذا علم زوجان من النقط المترافقة فى صف متضامن ورسمت دائرتان تمر كل منهما بنقطتين مترافقتين كان مركز الضامن هو نقطة تقاطع المحور الرئيسى للدائرتين (وتر تقاطعهما) مع حامل الصف . هذا اذا تقاطعت الدائرتان أما اذا لم تتقاطعا (كما فى شكل ١٠٦ لو رسمت مثل هاتين الدائرتين) فان مركز التضامن يكون نقطة تقاطع حامل الصف مع المحل الهندسى لجميع النقط المتساوية القوة بالنسبة للدائرتين [١] .

---

(١) اذا رسم من نقطة مثل ه فى مستوى دائرة مستقيم يقطعها فى نقطتين مثل ا ؛ ا' فان ه ا . ه ا' يسمى « قوة » النقطة ه بالنسبة للدائرة . فاذا كانت $م_١$ ؛ $م_٢$ مركزى دائرتين غير متقاطعتين فى المستوى ورسمت دائرة ثالثة مساعدة قاطعة لهما وتقابل وترا تقاطعها مع الدائرتين فى نقطة مثل س كان العمود النازل من س على المستقيم $م_١ م_٢$ هو المحل الهندسى لجميع نقط المستوى المتساوية القوة بالنسبة للدائرتين $م_١$ ؛ $م_٢$.

(٧) — النقطتان س ، ص (فى شكل ١٠٦) هما النقطتان المضاعفتان للصف المتضامن على المقطع المخروطى (دائرة شتاينر) والنقطتان $س_1$ ، $ص_1$ هما النقطتان المضاعفتان للصف المتضامن على الحامل λ . ويؤخذ من النظرية الخامسة (حيث كل من هاتين النقطتين تناظر نفسها) أن

$$\overline{و س_1}^2 = و ا . و ا' = \overline{و ص_1}^2$$

ومعنى هذا أن بعد كل من النقطتين المضاعفتين (فى صف متضامن على مستقيم) عن مركز التضامن و يساوى طول المماس المرسوم من و الى أية دائرة مارة بنقطتين مترافقتين .
فاذا وقعت و داخل هذه الدائرة أى اذا تقاطعت أى دائرتين تمر كل منهما بنقطتين مترافقتين فان النقطتين المضاعفتين تكونان فى هذه الحالة تخيليتين .
ويؤخذ من (شكل ١٠٦) أنه لما كان غير ممكن أن يمس محور المنظورية ع الدائرة أى غير ممكن أن تنطبق النقطتان المضاعفتان سواء على الدائرة أو على المستقيم λ لذلك فان النقطتين المضاعفتين لصف متضامن اما أن يكونا معاً حقيقيتين مختلفتين أو أن يكونا معاً تخيليتين .

(٨) — بما أن $(س_1 ص_1 ، ا_1 ب_1) = (س_1 ص_1 ، ا_1' ب_1')$ ولكن $ب_1 \equiv ا_1'$ ، $ب_1' \equiv ا_1$ فبالتعويض : $(س_1 ص_1 ، ا_1 ا_1') = (س_1 ص_1 ، ا_1' ا_1) = -1$

وينتج من ذلك أن أى نقطتين مترافقتين فى صف متضامن يكونان مترافقتين توافقياً بالنسبة للنقطتين المضاعفتين وبالعكس .

(٩) — اذا رسمت فى مستو من نقطة ما مستقيمات متعامدة بعضها على بعض فان هذه المستقيمات تكوّن حزمة متضامنة تضامناً عمودياً (وذلك لأن العلاقة ائتلافية والمناظرة بين أى زوج من هذه الاشعة المتعامدة مناظرة تبادلية) . فمثلا الاقطار المترافقة فى دائرة تكوّن حزمة من هذا النوع .

(١٠) — مجموعة النقط المترافقة بالنسبة الى مقطع مخروطى (بند ٥٤) والواقعة على مستقيم ثابت (لا يمس المنحنى) تكوّن صفاً متضامناً نقطتاه المضاعفتان هما

نقطتا تقاطع المستقيم (حقيقيتين أو تخيليتين) مع المنحنى [1] .

[يتضح من ذلك أنه اذا اتحدت على مستقيم واحد مجموعتان متضامنتان من النقط المترافقة بالنسبة الى مقطعين مخروطيين وكوّنت بذلك مجموعة واحدة متضامنة على المستقيم فان النقطتين المضاعفتين لهذا التضامن هما نقطتا تقاطع المستقيم مع كل من المنحنيين أى يكونان نقطتين من نقط تقاطع المنحنيين (حقيقيتين أو تخيليتين) . ولما كان المستقيم الذى فى اللانهاية فى مستوى أى دائرتين يمكن اعتباره حاملا لمجموعة واحدة متضامنة من النقط المترافقة بالنسبة للدائرتين (لأن كل قطرين مترافقين — أى متعامدين — فى إحدى الدائرتين يمكن رسم قطرين مترافقين وموازيين لهما فى الدائرة الاخرى بحيث يلاقيان المستقيم الذى فى اللانهاية فى نفس نقطتى تقاطعه مع القطرين المترافقين فى الدائرة الاولى أى أن هاتين النقطتين مترافقتان بالنسبة الى الدائرتين معاً) لذلك قيل إن المستقيم الذى فى اللانهاية يلاقى الدائرتين فى نفس النقطتين التخيليتين وإن جميع دوائر المستوى تتقاطع فى نقطتين تخيليتين على المستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى يطلق عليهما اسم النقطتين الدائريتين فى اللانهاية] .

وبالمثل مجموعة المستقيمات المترافقة بالنسبة الى مقطع مخروطى والمارة بنقطة ثابتة (غير واقعة على المنحنى) تكوّن حزمة متضامنة شعاعاها المضاعفان هما المماسان المرسومان من النقطة الى المنحنى .

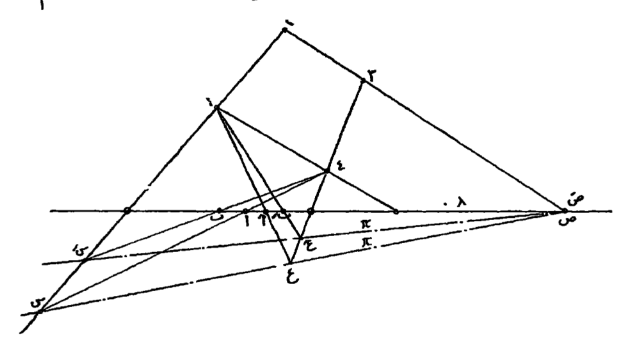
(١) لانه اذا كان λ مستقيماً فى مستوى مقطع مخروطى وكانت ا إحدى نقطه فانه توجد نقطة « واحدة » ا′ مرافقة لها بالنسبة الى المقطع (بند ٥٤) وواقعة على λ ولما كانت النقطة المرافقة الى ا′ بالنسبة الى المقطع هى نفس النقطة الاولى ا ومعنى هذا أن المناظرة تبادلية فأزواج النقط ا ، ا′ تكوّن لذلك صفاً متضامناً على الحامل λ .

(١١) — فى أية حزمة متضامنة يوجد زوج واحد متعامد من الاشعة المتناظرة (ويمكن الحصول عليه فى شكل ١٠٦ بتوصيل مركز الدائرة بالنقطة ه فاذا تقاطع هذا الواصل مع الدائرة فى م ، م′ كان ل م ≡ ل م′ هو الزوج المتعامد فى الحزمة المتضامنة التى رأسها ل) ولا يمكن أن يوجد أكثر من زوج واحد إلا اذا كانت الحزمة متضامنة تضامنا متعامدا .

بند ٩٥ : مثال على التضامن

لنأخذ مثال ٣ فى (بند ٩٣) فهناك طريقة جديدة للحل نشرحها فيما يلى تطبيقاً للتضامن :

نختار فى (شكل ١٠٧) نقطة ما مثل ا على المستقيم المعلوم λ ثم نعين (بواسطة پاسكال) النقطة الثانية ا′ التى يقابل فيها المستقيم λ المقطع المخروطى المتعين بالنقط الخمس : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ا [لذلك نرمز للنقطة ا بالرقم ٥



(شكل ١٠٧)

فتكون النقطة ا′ المطلوب تعيينها هى النقطة ٦ ويكون المستقيم المعلوم λ هو الضلع (٦٥)] فتكون ا′ على وجه العموم نقطة جديدة غير النقطة الاولى ا

لأنه اذا صادف وانطبقت أ′ على أ كانت أ هي نقطة تماس المستقيم λ مع المنحنى وبذا يكون هذا المنحنى قد تحدد .

ثم نختار نقطة جديدة مثل ب على λ ونجد بنفس الطريقة النقطة ب′ لتقاطع λ مع المنحنى المتعين بالنقط الخمس : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ب .

فمن حيث إن

(أ ب . . .) = (س س′ . . .) = (ع ع′ . . .) = (أ′ ب′ . . .)

فينتج من ذلك أن صفي النقط أ ب . . . ، أ′ ب′ . . . صفان مؤتلفان واقعان على الحامل المشترك λ [1] . وتكون النقطتان المضاعفتان (التي تناظر كل منهما نفسها) في هذين الصفين هما نقطتا تماس المستقيم λ مع المقطعين المخروطيين اللذين يمكن أن يمر كل منهما باربع نقط ويمس مستقيماً معلوماً .

ولما كانت المناظرة بين أزواج النقط في هذين الصفين هي مناظرة تبادلية فمثلا اذا فرضنا نقطة مثل حـ من الصف الاول منطبقة على أ′ فان حـ′ (وهي النقطة الثانية التي يقابل فيها المستقيم λ المقطع المخروطي ١ ٢ ٣ ٤ حـ) لابد أن تنطبق على أ — فينتج من ذلك أن أزواج النقط أ ، أ′ ؛ ب ، ب′ ؛ . . . على الحامل λ تكوّن صفاً متضامناً ويكفي لتعيين التضامن أن يعلم زوجان اثنان من النقط المترافقة . ولما كان كل زوج من هذه النقط المترافقة مثل أ ، أ′ هو نقطتا تقاطع المستقيم المعلوم λ مع أحد المقاطع المخروطية التي تمر بالنقط الاربع فالنظرية الآتية المعروفة باسم نظرية دزارج — شتورم [2] صحيحة :—

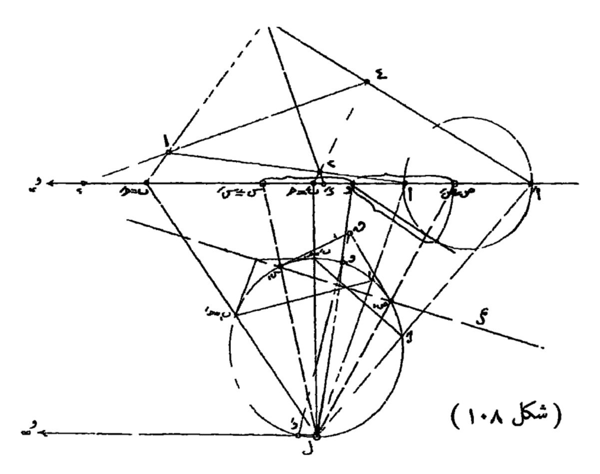
(١) يمكن استنتاج هذه العلاقة الائتلافية مباشرة من مناظرة الفرد للفرد بين أزواج النقط أ ، أ′ ؛ ب ، ب′ ؛ . . . إذ أن أية نقطة مثل أ من الصف الاول تحدد مقطعاً مخروطياً واحداً يقابل λ في نقطة واحدة أ′ مناظرة الى أ .

(٢) Desargues—Sturm

جميع المقاطع المخروطية المارة باربع نقط معلومة تقطع مستقيماً معلوما فى انواع مترافقة من مجموعة متضامنة من النقط . وتكون النقطتان المضاعفتان لهذا التضامن هما نقطتا تماس المستقيم مع المقطعين المخروطيين (حقيقيين مختلفين أو تخيليين) اللذين يمر كل منهما بالنقط الاربع ويمس المستقيم .

ويزاوج هذه النظرية النظرية الآتية :

اذا علمت أربع مستقيمات ونقطة ورسم من النقطة مماسان لكل مقطع مخروطى يمس المستقيمات الاربعة فان أزواج هذه المماسات هى أشعة متناظرة فى حزمة متضامنة . ويكون الشعاعان المضاعفان فى هذا التضامن هما المماسان فى



(شكل ١٠٨)

النقطة المعلومة للمقطعين المخروطين (حقيقين مختلفين أو تخيليين) اللذين يمس كل منهما المستقيمات الاربعة ويمر بالنقطة .

فاذا فرضنا فى (شكل ١٠٨) أن أزواج المستقيمات (٢١) ، (٤٣) ؛ (٣١) ، (٤٢) ؛ (٤١) ، (٣٢) تقطع المستقيم المعلوم ٪ فى أزواج النقط

ا ، ا′ ؛ ب ، ب′ ؛ ء ، ء′ على التوالى فبمقتضى نظرية « دزارج » تكون هذه الازواج أزواجاً مترافقة فى مجموعة متضامنة من النقط على المستقيم λ لان بين جميع المقاطع المخروطية التى تمر باربع نقط معلومة ١ ؛ ٢ ؛ ٣ ؛ ٤ توجد ثلاثة كل منها « منحل » الى مستقيمين فكل زوج من أزواج المستقيمات السالفة الذكر يمثل مقطعاً مخروطياً ماراً بالنقط الاربع المعلومة وقاطعاً λ فى زوج من النقط المترافقة .

وبمعلومية زوجين اثنين مثل ا ، ا′ ؛ ب ، ب′ من هذه النقط المترافقة يتعين التضامن على المستقيم λ وتكون النقطتان المضاعفتان س ؛ ص فى هذا التضامن (ويمكن تعيينهما إما بواسطة دائرة شتاينر أو باستخدام مركز التضامن و كما تقدم فى النظريتين السادسة والسابعة من البند السابق) هما نقطتا تماس λ مع المقطعين المخروطيين .

الباب الرابع

السطـــوح الدورانيـــة

الفصل الاول

الراسم خط منحن

<u>بند ٩٦ : تعاريف</u>

ذكرنا فى (بند ٤٥) *أن السطح الدورانى يمكن اعتباره متولداً عن دوران « خط » ما يسمى الراسم حول محور ثابت.* وهذا الخط الراسم يجوز أن يكون خطاً مستقيماً كما سنرى فى الفصل الثانى أو منحنياً مستوياً أو منحنياً فراغياً كما أنه يجوز فى حالة المنحنى المستوى أن يكون مستويه ماراً أو غير مار بالمحور [1] .

فكل نقطة من نقط الراسم ترسم أثناء الدوران دائرة مستويها عمودى على المحور ومركزها واقع عليه وتسمى هذه الدوائر *بدوائر العرض* .

وأى مستو مار بالمحور يسمى *مستوى زوال* ويقطع السطح فى منحن يسمى *خط زوال* أو *مقطع جانبى* . وظاهر أن جميع خطوط الزوال متساوية ومتماثلة فى

(١) لا ينشأ عن كون المنحنى الراسم فراغياً ولا عن عدم مرور مستويه اذا كان مستوياً بالمحور ــ لا ينشأ عن هذين الاعتبارين زيادة فى عمومية تعريف السطح الدوراني ــ كما عرفناه فى (بند ٤٥) ــ بأنه سطح ناشىء عن دوران منحن مستو حول محور فى مستويه إذ من الممكن دائما قطع السطح الدوراني بمستو مار بالمحور واتخاذ منحنى التقاطع (خط الزوال) مولداً للسطح . أى أن السطح الواحد يمكن أن يتولد بطرق مختلفة إحداها دائماهى طريقة تولده عن دوران منحن مستو حول محور فى مستويه.

الشكل والهيئة وأن مسقطي أي اثنين من هذه الخطوط على مستو مواز للمحور (أو مار به) هما منحنيان مؤتلفان ائتلافاً متوازياً حيث محور الائتلاف هو مسقط محور السطح (أو محور السطح نفسه) واتجاه الائتلاف عمودي على المحور .

ولتمثيل السطح الدوراني في المسقطين الافقي والرأسي يختار المحور عادة رأسياً [1] ويسمى في هذه الحالة المقطع الجانبي الواقع في المستوى المار بالمحور موازياً للمستوى الرأسي بخط الزوال الرئيسي .

بند ٩٧ : بعض المسائل المتعلقة بالسطوح الدورانية

يمكن تلخيص أهم المسائل العملية المتعلقة بالسطوح على وجه العموم فيما يلي:

١ — اذا علم أحد مسقطي نقطة على السطح فالمطلوب تعيين مسقطها الآخر.
٢ — تعيين المستوى المماس للسطح في نقطة معلومة عليه .
٣ — رسم منحنى تقاطع السطح بمستو معلوم أي المقطع المستوى للسطح.
٤ — تعيين نقط تقاطع السطح مع مستقيم معلوم .
٥ — رسم المحيطات الظاهرية للسطح .
٦ — رسم الظلال الحقيقية والظاهرية المترتبة على وجود مصدر ضوء معلوم
٧ — رسم منحنى تقاطع سطحين .

وسنبين باختصار في البنود التالية كيفية حل هذه المسائل للسطوح الدورانية مستعينين على شرح المسائل الاولى والثانية والثالثة والرابعة بشكل (١٠٩) الذي يمثل ما يسمى بالسطح الكعكي أو السطح الحلقي وقد فرضناه معلوماً بمحوره الرأسي وبالمنحنى الراسم وهو في هذه الحالة دائرة يمر مستويها بالمحور .

---

(١) اذا لم يكن المحور رأسياً فانه يمكن دائماً تغيير مستوى الاسقاط بحيث يصبح عمودياً على أحدهما (بند ١٩) .

بند ٩٨ : المسألة الاولى

اذا علم المسقط الرأسى ﻫ″ لنقطة مثل ﻫ على السطح الكعكى المبين فى (شكل ١٠٩) فالمطلوب تعيين ﻫ′ .

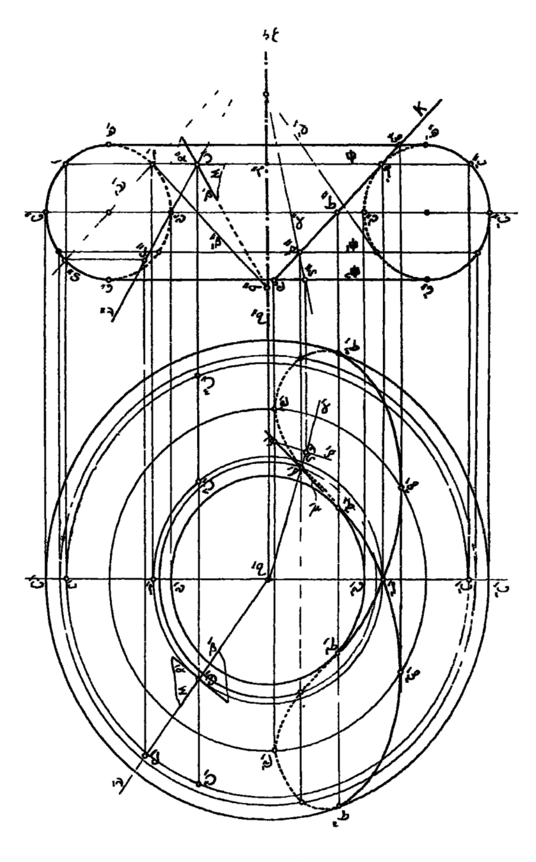
لذلك نرسم من ﻫ″ مستقيماً أفقياً يمثل مستويا أفقياً Φ ماراً بالنقطة ﻫ فاذا قطع هذ المستقيم خط الزوال الرئيسى فى النقط ا″ ، ب″ ، $ا_١$″ ، $ب_١$″ وقطع المحور فى م″ كان البعدان م″ ا″ ، م″ ب″ مساويين لنصفى قطرى دائرتى العرض الواقعتين فى المستوى Φ واللتين يمكن رسمهما فى المسقط الافقى بالمركز المشترك ع′ . فاذا تقاطع خط التناظر المار بالمسقط المعلوم ﻫ″ مع هاتين الدائرتين فى النقط الاربع $ﻫ_١$′ ، $ﻫ_٢$′ ، $ﻫ_٣$′ ، $ﻫ_٤$′ أمكن اعتبار أية واحدة منها المسقط الافقى المطلوب أى أن ﻫ″ هى المسقط الرأسى المشترك لاربع نقط $ﻫ_١$ ، $ﻫ_٢$ ، $ﻫ_٣$ ، $ﻫ_٤$ كلها واقعة على السطح . فالنقطتان الاوليتان ($ﻫ_١$′ ، ﻫ″) ، ($ﻫ_٢$′ ، ﻫ″) واقعتان على الطبقة الداخلية المتولدة عن دوران نصف الدائرة ﻫ ا و حول المحور فهما لذلك نقطتان زائديتان (راجع شكل ٤٨) بينما النقطتان الباقيتان ($ﻫ_٣$′ ، ﻫ″) ، ($ﻫ_٤$′ ، ﻫ″) واقعتان على الطبقة الخارجية المتولدة عن دوران نصف الدائره ﻫ ب و فهما إذن نقطتان ناقصيتان .

بند ٩٩ : المسألة الثانية

المطلوب تعيين المستوى المماس Σ وكذا عمودى السطح ν فى النقطة $ﻫ_١$.

يتحدد المستوى المماس فى نقطة على السطح كما قدمنا فى (بند ٤٣) اذا علم مماسان لهذا السطح مارين بالنقطة المذكورة . وفى حالة السطوح الدورانية يختار عادة للسهولة المماسان فى النقطة لدائرة العرض ولخط الزوال المارين بها .

فالمماس الاول α (المماس لدائرة العرض) مسقطه الرأسى α″ هو المستقيم



(شكل ١٠٩)

الافقى المار بالمسقط الرأسى ح″ للنقطة ومسقطه الافقى α′ هو مماس دائرة العرض فى المسقط الافقى ح′ للنقطة .

أما المماس الثانى β (المماس لخط الزوال) فيمكن الحصول عليه كما يأتى :

نصل ع′ ح′ فيكون هو المسقط الافقى β′ للماس β ثم نرسم المماس β_1″ لخط الزوال الرئيسى فى النقطة ا″ (حيث ا هى إحدى النقطتين الواقعتين فى مستوى خط الزوال الرئيسى لدائرة العرض المارة بالنقطة ح) فيلاقى المحور فى س″ ثم نصل س″ ح″ فيكون هو المسقط الرأسى β″ للماس β . وذلك لان المماس β_1 يبقى أثناء الدوران ماساً للاوضاع المختلفة لخط الزوال فى نقط دائرة العرض المشار اليها ويلاقى محور السطح دائماً فى النقطة الثابتة س .

وبتعين α ، β يتعين المستوى المماس Σ للسطح عند النقطة ح ويلاحظ أنه لما كان المماس β هو مستقيم ذو ميل أعظم فى المستوى Σ بالنسبة للمستوى الافقى فانه يكفى بمفرده لتعيين المستوى Σ (بند ٧) .

ويتضح بسهولة من (شكل ١٠٩) أنه لما كان المستقيم α عمودياً على مستوى الزوال المار بالنقطة ح وجب أن يكون هذا المستوى عمودياً على المستوى Σ أو بعبارة أخرى :

المستوى المماس فى أية نقطة على سطح دورانى عمودى دائماً على مستوى خط الزوال المار بالنقطة .

ولرسم العمودى v للسطح فى النقطة ح نرسم العمودى v_1″ لخط الزوال الرئيسى فى النقطة ا″ فاذا قابل v_1″ المحور فى ع″ ووصل ع″ ح″ كان هذا الواصل هو المسقط الرأسى v″ للعمودى المطلوب وذلك لان عموديات السطح فى نقط دائرة عرض واحدة تمر جميعاً بنقطة ثابتة على المحور وهذه النقطة هى ع فى حالة دائرة العرض المارة بالنقطة ح . ويتعين العمودى المطلوب v بواسطة

مسقطه الرأسى v'' ومسقطه الافقى v' (وهو المستقيم ح′ ه′١) .

ولما كان المستوى المماس فى نقطة على السطح ومستوى خط الزوال المار بها متعامدين كما قدمنا لذا كان عمودى السطح فى أية نقطة واقعاً دائماً فى مستوى الزوال المار بها .

ويسمى المخروط س المتولد عن دوران المماس β_1 **بالمخروط المماس** فى دائرة العرض ا ا١ كما يسمى المخروط ع الناشىء عن دوران العمودى v_1 **بالمخروط العمودى** بالنسبة لدائرة العرض ذاتها .

بند ١٠٠ : المسألة الثالثة

المطلوب رسم منحنى تقاطع السطح مع مستو معلوم (شكل ١٠٩) .

لذلك نفرض تسهيلا للعمل أن المستوى القاطع K هو نفس المستوى المماس للسطح فى النقطة الزائدية ا١ فيكون K فى هذه الحالة عمودياً على المستوى الرأسى (الذى يوازى مستوى الزوال الرئيسى المار بالنقطة ا١) على أن الطريقة المستعملة لرسم منحنى التقاطع فى الحالة العامة لا تختلف فى الجوهر عنها فى هذه الحالة الخاصة .

فللحصول على نقط المنحنى نختار عدة مستويات أفقية مساعدة مثل المستوى Φ فيقطع كل منها السطح فى دوائر عرض ويقطع المستوى القاطع K فى مستقيم وبذلك تكون نقط المنحنى هى نقط تقاطع كل مستقيم من هـذه المستقيمات مع دوائر العرض الموجودة معه فى مستو أفقى واحد .

فاذا كانت (ح′ ، ح″) إحدى هذه النقط (وقد أمكن الحصول عليها بواسطة المستوى الافقى المساعد Φ_1) وأريد رسم المماس μ فيها لمنحنى التقاطع فاننا نعين المستوى المماس Γ للسطح فى هذه النقطة (وذلك بتعيين المماس γ لخط الزوال المار بها كما تقدم فى بند ٩٩) فيكون μ هو خط تقاطع المستويين

K ٩ Γ [1] (بند ٤٣) .

ويلاحظ أن المماس لمنحنى التقاطع فى كل واحدة من النقط ك١ ٩ ك٢ ٩ ص١ ٩ ص٢ يكون عمودياً على المستوى الرأسى لان المستوى المماس للسطح فى كل منها عمودى على المستوى الراسى .

كذلك يلاحظ أن النقطة ١١ يجب أن تكون طبقا لما سبق ذكره فى (بند ٤٣) نقطة مضاعفة (وهى فى هذه الحالة نقطة معقودة) على منحنى التقاطع .

بند ١٠١ : المسألة الرابعة

المطلوب تعيين نقط تقاطع مستقيم معلوم مع السطح .

لذلك نختار مستوياً مناسباً ماراً بالمستقيم (وليكن أحد المستويين المسقطين) ثم نعين منحنى التقاطع كما تقدم فتكون النقط المطلوبة هى نقط تقاطع المستقيم مع هذا المنحنى .

هذا اذا كان المستقيم غير قاطع للمحور أما اذا كان قاطعاً له كالمستقيم ν فى (شكل ١٠٩) فانه يمكن الحصول على نقط التقاطع فى هذه الحالة بالطريقة البسيطة الآتية :

نفرض أن المستقيم ν قد دار حول المحور واتخذ الوضع الامامى ν_1 الواقع فى مستوى خط الزوال الرئيسى وأن نقط تقاطع ν_1'' مع هذا الخط فى لمسقط

(١) وللحصول عليه نقطع المستويين بمستو أفقى Φ_2 فاذا كانت ر نقطة تقاطع γ (وهو المستقيم ذو الميل الاعظم فى المستوى Γ) مع Φ_2 ورسم من ر' المستقيم ϱ' عمودياً على γ' فان ϱ' (وهو أثر المستوى Γ مع Φ_2) يقابل خط التناظر المرسوم من ك'' فى النقطة ء' التى اذا وصلت بالنقطة ح' كان الواصل هو المسقط الافقى μ' للمماس المطلوب .

الرأسى هى ا″ ، ى″ فالمستقيمان الافقيان المرسومان من ا″ ، ى″ يلاقيان ٧″ فى المساقط الرأسية ه″ ، ل″ لنقط تقاطع ٧ مع السطح .

بند ١٠٢ : المسألة الخامسة

المحيطات الظاهرية (راجع بند ٤٤) .

اذا كان محور السطح رأسياً كما هو الحال فى (شكل ١٠٩) فالمحيط الظاهرى بالنسبة الى المستوى الافقى يتكوّن من دوائر العرض التى تكون المستويات المماسة للسطح فى نقطها عمودية على المستوى الافقى[1] . فهو يتكوّن فى (شكل ١٠٩) من دائرة عرض صغرى يطلق عليها اسم دائرة الحلق وهى الدائرة ن′ ن′١ ومن دائرة عرض كبرى يطلق عليها اسم دائرة الاستواء وهى الدائرة ف′ ف′١ . ويلاحظ أن منحنى تقاطع السطح مع المستوى K يمس (فى المسقط الافقى) هاتين الدائرتين فى النقط الاربع ط′١ ، ط′٢ ، ط′٣ ، ط′٤ (التى مسقطها الرأسى المشترك هو ط″) وأن كل واحدة من هذه النقط الاربع تفصل جزءا منظوراً من منحنى التقاطع عن جزء غير منظور .

والمحيط الظاهرى بالنسبة الى أى مستو مواز للمحور كالمستوى الرأسى فى (شكل ١٠٩) يتكوّن من خط الزوال الرئيسى ومن دوائر العرض النهائية هـ هـ١ ، و و١ (حيث المستويات المماسة عمودية على المستوى الرأسى) .

أما اذا كان المحور مائلا على أحد مستويى الاسقاط وليكن المستوى الافقى (شكل ١١٠) فاننا نبدأ بتعيين النقط التى تكون المستويات المماسة للسطح فيها عمودية على المستوى الافقى فهذه النقط يتألف منها المحيط الحقيقى ط بالنسبة

(١) فى هذه الحالة تغلف المستويات المماسة فى نقط دائرة عرض واحدة « اسطوانة مماسة » (بدلا من المخروط المماس فى النقط العادية) تمس السطح فى محيط هذه الدائرة .

للمستوى الافقى ويكون المسقط الافقى ط′ لهذا المنحنى هو المحيط الظاهرى بالنسبة للمستوى الافقى . وتستخدم لهذه الغرض « كور » مساعدة مرسومة داخل السطح وذلك بالطريقة الآتية :—

الخطوة الاولى — نختار أية دائرة عرض مثل ى ى١ ونعين المركز ع للكرة المرسومة داخل السطح والتى تمسه فى محيط هذه الدائرة بحيث يكون المستوى المماس للسطح فى أية نقطة من نقط ى ى١ منطبقاً على المستوى المماس للكرة فيها .

ويلاحظ أن ع هى فى نفس الوقت رأس المخروط العمودى بالنسبة الى الدائرة ى ى١ .

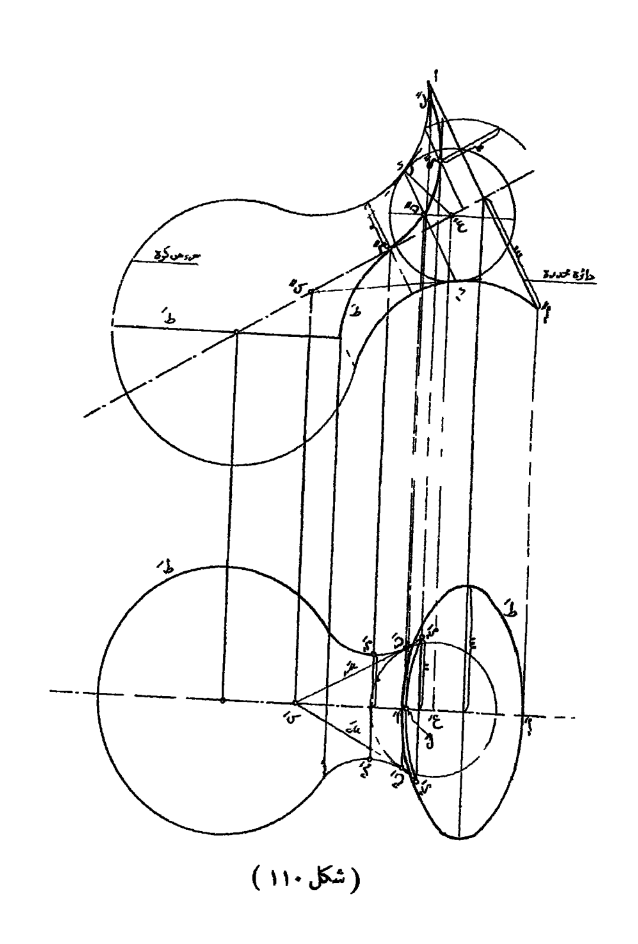
الخطوة الثانية — نرسم من ع مستوياً موازياً لمستوى الاسقاط الذى يراد رسم المحيط الظاهرى بالنسبة له أى مستوياً أفقياً فى هذه الحالة فيقطع الكرة فى دائرة عظمى هى المحل الهندسى لجميع نقط الكرة التى يكون المستوى المماس للكرة فى كل منها عمودياً على المستوى الافقى .

الخطوة الثالثة — الدائرة المشار اليها فى الخطوة السابقة تتقاطع مع دائرة العرض ى ى١ (لأن الدائرتين واقعتين على سطح كرة واحدة) فى نقطتين ه١ ، ه٢ متحدتين فى المسقط الرأسى (ه″ هو مسقطهما الرأسى المشترك) فلابد أن يكون المستوى المماس للسطح الدورانى فى كل من هاتين النقطتين (وهو نفس المستوى المماس للكرة فى كل منهما) عمودياً على المستوى الافقى فهما إذن نقطتان من نقط المحيط الحقيقى ط وتكون ه″ إحدى نقط المسقط الرأسى ط″ لهذا المحيط[1].

الخطوة الرابعة — خط التناظر المرسوم من ه″ يقطع فى المسقط الافقى الدائرة التى مركزها ع′ ونصف قطرها يساوى نصف قطر الكرة (وهذه

---

(١) ومعنى هنا أن المنحنى ط″ منحن « مزدوج » بحيث تمثل كل نقطة من نقطه نقطتين من نقط المحيط الحقيقى .



(شكل ١١٠)

الدائرة هي المسقط الافقي للدائرة العظمى المذكورة آنفاً على سطح الكرة) في المسقطين الافقيين $ه'_{1}$ ، $ه'_{2}$ للنقطتين $ه_{1}$ ، $ه_{2}$. فتكون $ه'_{1}$ ، $ه'_{2}$ نقطتين من نقط المحيط الظاهري $ط'$.

الخطوة الخامسة — اذا عينا المسقط الافقي $س'$ لرأس المخروط المماس الذي يمس السطح الدوراني في محيط دائرة العرض $ء ء_{1}$ ووصلنا $س' ه'_{1}$ ، $س' ه'_{2}$ كان هذان الواصلان هما المماسان μ'_{1} ، μ'_{2} للمحيط الظاهري $ط'$ في النقطتين $ه'_{1}$ ، $ه'_{2}$ على التوالي (وذلك لأن μ'_{1} يمثل مستوياً عمودياً على المستوى الافقي هو المستوى المماس المشترك في النقطة $ه_{1}$ لكل من سطح المخروط والكرة والسطح الدوراني المعلوم) .

الخطوة السادسة — تعيين بعض النقط المهمة على المحيط الظاهري التي من شأنها تسهيل رسم هذا المحيط . فمنها ما يمكن الحصول عليها برسم المحيطات الظاهرية للسطوح الاساسية (الكرة والمخروطي والاسطوانة) التي تكوّن جزءاً من السطح الدوراني المعلوم (اذا وجدت) وذلك مثل جزء الكرة في (شكل ١١٠) . ومنها ما يمكن الحصول عليه برسم مساقط الدوائر المحددة مثل الدائرة $ا ا_{1}$. ومنها مساقط النقط الواقعة على دوائر عرض صغرى أو كبرى (حيث يؤول المخروط المماس الى اسطوانة مماسة) وذلك مثل النقطتين $م_{1}$ ، $م_{2}$ على الدائرة الصغرى . ومنها أيضاً مساقط النقط الواقعة على المحيط الحقيقي والتي يكون المماس له في كل منها عمودياً على مستوى الاسقاط (رأسياً) وذلك مثل النقطتين $ر_{1}$ ، $ر_{2}$ فالمسقطان الافقيان $ر'_{1}$ ، $ر'_{2}$ لهاتين النقطتين هما نقطتا رجوع على المحيط الظاهري (راجع بند ٣٩ شكل ٤٥) .

<u>بند ١٠٣ : المسألة السادسة — الظلال</u>

اذا فرضنا في (شكل ١١٠) أنه يراد رسم الظلال الناتجة عن وجود اضاءة متوازية عمودية على المستوى الافقي فمن الواضح أن خط الظل للسطح يكون في

هذه الحالة هو نفس المحيط الحقيقى له بالنسبة الى المستوى الافقى كما أن المحيط الظاهرى يمثل الظل الساقط على أى مستو أفقى . ولهذا السبب كانت عملية رسم الظلال للسطوح الدورانية فى حالة الاضاءة المتوازية شبيهة بالعملية السابقة لتعيين المحيطات الحقيقية والظاهرية [1] .

واذا فرضنا أنه يراد رسم الظل الذى يلقيه منحن مثل ع على سطح ما بسبب وجود نقطة مضيئة مثل ل فالطريقة المثلى لذلك هى أن نختار على السطح منحنياً حيثما اتفق مثل م ونجد الظلين عَ ، مَ للمنحنيين معاً على مستو ما فاذا كانت ةَ إحدى نقط تقاطع عَ ، مَ ووصل ةَ ل فقطع المنحنى م فى ة كانت ة إحدى نقط الظل الساقط المطلوب رسمه وهكذا يمكن الحصول على عدة نقط أخرى كالنقطة ة باختيار منحنيات جديدة على السطح مثل المنحنى الاول م .

فاذا كان المطلوب ايجاد ظل سطح على سطح آخر فاننا نجد خط الظل لاحد السطحين ثم نجد الظل الذى يلقيه هذا الخط على السطح الآخر بالطريقة السابقة . ونترك للقارىء تطبيق هذه الطرق على السطوح الدورانية حيث تختار للسهولة دوائر العرض المختلفة لتمثيل المنحنيات م المشار اليها آنفاً .

بند ١٠٤ : المسألة السابعة — منحنى تقاطع سطحين دورانيين

(١) اذا اشترك السطحان فى المحور فان خط التقاطع يتكون من دوائر العرض المارة بنقط تقاطع خطى الزوال الرئيسيين .

(٢) اذا كان المحوران متوازيين تختار عدة مستويات مساعدة عمودية على

(١) لما كانت الاشعة الضوئية تحل فى هذه الحالة محل أشعة الاسقاط فانه لتعيين خط ظل سطح دورانى تكون المستويات المارة بمراكز الكور المرسومة داخله عمودية على تلك الاشعة .

المحورين فتقطع كل منها السطحين فى دوائر عرض تتقاطع بدورهافى عدة نقط على منحنى التقاطع.

(٣) اذا تقاطع المحوران فابسط طريقة لرسم منحنى التقاطع تكون باختيار عدة كور مساعدة متحدة المركز فى نقطة تقاطع المحورين . فكل كرة من هذه الكور تقطع السطحين فى دوائر عرض تتقاطع بدورها فى عدة نقط على منحنى التقاطع .

(٤) اذا كان المحوران غير متقاطعين فان اختيار المستويات أو السطوح المساعدة (مثل الكور السابقة) يتوقف على وضع السطحين . فمثلا اذا كان أحد المحورين عمودياً على المستوى الافقى والآخر موازياً للمستوى الرأسى (و يمكن دائماً الوصول الى هذا الوضع بتغيير مستويات الاسقاط) فان أى مستو أفقى يقطع السطح الاول فى دائرة ويقطع السطح الثانى فى منحن يمكن رسمه بسهولة ويتقاطع مع الدائرة فى عدة نقط على منحنى التقاطع .

كذلك يمكن استخدام كور مساعدة فى بعض الحالات الخاصة اذا كان محورا السطحين غير متقاطعين . مثال ذلك لنفرض أن أحد السطحين سطح كعكى وأن محور السطح الآخر واقع فى مستوى دائرة الاستواء للسطح الكعكى . وليكن Σ مستويا ما ماراً بمحور السطح الكعكى وقاطعاً له فى دائرتين . فاذا قمنا من مركز إحدى هاتين الدائرتين (دائرة زوال) عمودا على المستوى Σ ليقابل محور السطح الآخر (حيث إن هذا المحور والعمود واقعان فى هذه الحالة فى مستو واحد هو مستوى دائرة الاستواء) فى نقطة مثل ع فالكرة التى مركزها ع وتمر بدائرة الزوال السالفة الذكر تقطع أيضاً السطح الآخر فى دائرة (أو أكثر من دوائر العرض) وتكون نقط تقاطع هاتين الدائرتين تقع على منحنى التقاطع المطلوب .

أما المماس لمنحنى تقاطع سطحين فى نقطة على المنحنى مثل ه فيمكن الحصول عليه دائماً باحدى الطريقتين العامتين الآتيتين :—

(١) باعتباره خط تقاطع المستويين المماسين للسطحين فى النقطة ه (بند ٤٣) .

(٢) باعتباره العمود المقام من ه على المستوى المعين بعمودى السطحين فى النقطة ه ذاتها .

وتفضل عادة الطريقة الثانية فى حالة السطوح الدورانية لسهولتها .

الفصل الثاني

السطح الزائدى الدوراني ذو الطية الواحدة

بند ١٠٥ : تعاريف ومسائل أساسية

اذا اعتبرنا محوراً ثابتاً ومستقيما راسماً يدور حوله فان هذا الراسم يمكن ان يشغل ثلاثة أوضاع بالنسبة للمحور :

أولا — إما أن يكون عمودياً على المحور فيولد بدورانه مستوياً

ثانياً — وإما أن يكون قاطعاً المحور على بعد نهائى أو لا نهائى فيولد بدورانه مخروطاً أو أسطوانة على التوالى .

ثالثاً — و إما أن يكون غير قاطع للمحور (وماثلا عليه) فيولد بدورانه ما يسمى *بالسطح الزائدى الدورانى ذى الطية الواحدة* (شكل ١١١) .

وهذا السطح الاخير هو الذى خصصنا هذا الفصل لدراسته . وسنبدأ أولا بالبرهنة على أن خط الزوال لهذا السطح هو منحن من الدرجة الثانية . فلا ثبات ذلك نقطع السطح بمستو مار بالمحور فيكون المقطع خط زوال ونفرض أى مستقيم a فى مستوى المقطع ثم نثبت أنه يقطع خط الزوال فى نقطتين اثنتين وذلك بالطريقة الآتية :

بما أن المستقيم a والمحور واقعان فى مستو واحد هو مستوى المقطع فانهما يتقابلان فى نقطة على المحور مثل م . وليكن μ أى وضع من أوضاع الراسم الذى يولد السطح بدورانه حول المحور فاذا أدرنا المستقيم a حول المحور دورة كاملة وفرضنا أنه أثناء دورانه يلاقى المستقيم μ (مع فرض بقائه ثابتاً) ن من المرات فمن الواضح أننا اذا ثبتنا المستقيم a وأدرنا المستقيم μ حول المحور

دورة كاملة فانه يجب أن يلاقى α بنفس العدد ه من المرات (وفى نفس النقط على كل من المستقيمين) أى أن عدد نقط تلاقى المستقيم α مع السطح الزائدى يساوى عدد نقط تلاقى المستقيم μ مع السطح المخروطى الناشىء عن دوران المستقيم α حول المحور المعلوم. ولكن العدد الاخير هو « اثنان » إذن فالمستقيم α يلاقى السطح الدورانى أى يلاقى خط الزوال المعلوم فى نقطتين اثنتين (حقيقيتين أو تخيليتين) ويكون خط الزوال إذن منحنياً من الدرجة الثانية.

ولما كان من الممكن دائماً كما يؤخذ من (شكل ١١١) أن يتخذ المستقيم الراسم وضعين موازيين لاى مستو مار بالمحور فانه ينتج أن خط الزوال مقطع مخروطى له نقطتان فى اللانهاية أى قطع زائد. ويكون محور الدوران هو المحور المرافق للقطع الزائد

(شكل ١١١)

فى جميع أوضاعه بحيث يمكن اعتبار السطح الزائدى الدورانى ذى الطية الواحدة متولداً عن دوران قطع زائد حول محوره غير القاطع وهو أحد

سطوح الدرجة الثانية المعروفة (راجع الهندسة التحليلية حيث يمكن البرهنة على أن كل سطح ينشأ عن دوران مقطع مخروطى حول محوره هو سطح من الدرجة الثانية) . لذا فان أى مستقيم فى الفراغ يقطع السطح الزائدى ذا الطية الواحدة فى نقطتين (حقيقيتين أو تخيليتين) كما أن أى مستو يقطعه فى منحن من الدرجة الثانية أى مقطع مخروطى .

فاذا كان السطح فى (شكل ١١١) معلوماً بالمحور الرأسى ح ح والمستقيم الراسم (μ' ، μ'') ورسم العمود المشترك بين المحور والراسم فقابل الاخير فى النقطة س فان هذه النقطة ترسم أثناء الدوران أصغر دائرة على السطح وتسمى بدائرة الحلق وقد رمزنا اليها فى الشكل بالرمز « ى » كما رمزنا الى مستويها الافقى بالرمز K .

واذا كان Φ_1 مستوياً أفقياً حيثما اتفق يقابل الراسم μ فى النقطة حـ فان حـ ترسم أثناء الدوران دائرة نصف قطرها يساوى ح' حـ' وهذه الدائرة هى المحل الهندسى لنقط تقاطع الاوضاع المختلفة للراسم مع المستوى Φ_1 . فللحصول على وضع جديد μ_1 للراسم نلاحظ أن مسقطه الافقى μ_1' يجب أن يمس ى' وأن أثره مع المستوى Φ_1 يجب أن يكون واقعاً على الدائرة المرسومة فى هذا المستوى وبذلك يتعين μ_1'' .

ليكن Z مستوى خط الزوال الرئيسى (المستوى المار بالمحور موازياً للمستوى الرأسى) ولتكن النقطة ى$_1$ نقطة تقاطع الراسم μ مع Z فالمسقط الرأسى μ'' للراسم يجب أن يمس خط الزوال الرئيسى (وهو كما قدمنا قطع زائد) فى المسقط الرأسى ى$_1''$ للنقطة ى$_1$. وذلك لان المستوى المماس N_1 للسطح الزائدى فى النقطة ى$_1$ يتعين بالراسم μ وبمماس الحقيقى لخط الزوال الرئيسى فى النقطة ى$_1$ ذاتها (وهذا المماس واقع فى المستوى Z) وبما

أن المستوى N_1 يجب أن يكون عمودياً على مستوى الزوال Z المار بالنقطة ى١ فينتج من ذلك أن N_1 هو نفس المستوى المسقط للراسم μ على المستوى الرأسى بحيث يكون μ'' هو المسقط الرأسى المشترك لكل مستقيم مرسوم فى المستوى N_1 ومن بينها المماس الحقيقى لخط الزوال الرئيسى.

يؤخذ مما تقدم أن المسقط الرأسى لاى وضع من أوضاع الراسم يمس القطع الزائد فى المسقط الرأسى لنقطة تقاطعه مع المستوى Z . فاذا كان μ_1 أحد الوضعين الاماميين (الموازيين الى Z) للراسم فان نقطة تقاطعه ك$_\infty$ مع Z تكون على بعد لا نهائى وإذن فالمسقط الرأسى μ_1'' لهذا الوضع يمس القطع الزائد فى النقطة ك$''_\infty$ التى فى اللانهاية أى أن μ_1'' هو أحد الخطين التقريبيين للقطع الزائد أما الخط التقربى الآخر فهو $\mu_2'' \equiv$ و'' ل$''_\infty$

بند ١٠٦ : مجموعتا الرواسم

لنفرض فى (شكل ١١١) أن λ مستقيم واقع فى المستوى المسقط أفقياً للراسم μ بحيث يكون $\lambda' \equiv \mu'$ وأن المستقيمين λ ، μ متماثلان بالنسبة للمستوى K (فيتقاطعان لذلك فى النقطة س على دائرة الحلق ى) فمن الواضح أن المستقيم λ يقع حينئذ بتمامه على السطح الزائدى الذى ينشأ عن دوران μ حول المحور بحيث يمكن اعتبار هذا السطح ناشئاً أيضاً عن دوران المستقيم λ حول نفس المحور . فالمستقيم λ هو إذن راسم جديد للسطح وهذا معناه أن هناك مجموعتين من الرواسم على السطح هما μ ، μ_1 ،... ، λ ، λ_1 ... ولما كان أى راسمين فى مجموعة واحدة هما دائماً مستقيمان غير متقاطعين (لأنه يمكن الحصول على أحدهما بادارة الآخر حول المحور) وكان على العكس من ذلك أى راسمين من مجموعتين مختلفتين مثل μ_1 ، λ هما دائماً مستقيمان متقاطعان فى نقطة على بعد نهائى أو لا نهائى

(لأن المستوى المعين بالمستقيمين المتوازيين و$_1$ س ، هـ ح$_1$ يمر بالراسمين μ_1 ، λ ويجب لذلك أن يتقاطع هذان الراسمان) لذا كانت النظرية الهامة الآتية صحيحة :—

توجد على أى سطح زائدى دورانى ذى طية واحدة مجموعتان أو فصيلتان مختلفتان من الرواسم وأى راسمين فى مجموعة واحدة هما دائماً مستقيمان غير متقاطعين فى حين أن كل راسم فى احدى المجموعتين يتقاطع مع جميع رواسم المجموعة الاخرى .

ويؤخذ من هذه النظرية أن كل نقطة على السطح يمر بها دائماً راسمان كل فى مجموعة وهذان الراسمان يعينان المستوى المماس للسطح فى هذه النقطة [1] .

بند ١٠٧ : المستويات المماسة والمقاطع المستوية

اذا علم أحد مسقطى نقطة على السطح الزائدى وأريد ايجاد مسقطها الآخر فالطريقة لذلك لا تختلف عن الطريقة العامة المذكورة فى الفصل السابق . فمثلا اذا كان المعلوم المسقط الرأسى ى″ لنقطة مثل ى وأريد ايجاد مسقطها الافقى ى′ فاننا نرسم من ى″ مستقيما أفقياً يمثل المستوى الافقى المار بالنقطة ى والذى يقابل الراسم المعلوم μ فى النقطة ح مثلا . فاذا رسمت فى المسقط الافقى دائرة العرض التى مركزها ع′ ونصف قطرها ع′ ح′ (شكل ١١١) فان خط التناظر المار بالنقطة ى″ يقطعها فى نقطتين ى′$_1$ ، ى′$_2$ يصلح كل منهما أن يكون المسقط الافقى المطلوب .

(١) اذا كانت ه$_1$ ، ه$_2$ نقطتين على الراسم μ وكان λ_1 ، λ_2 الراسمين فى المجموعة الاخرى المارين بهاتين النقطتين فلما كان λ_1 ، λ_2 مستقيمين غير متقاطعين فانه ينتج أن المستوى المماس فى ه$_1$ يجب أن يكون غيره فى ه$_2$. وهذا معناه أنه اذا تحركت نقطة على راسم ما فالمستوى المماس للسطح فيها يدور حول هذا الراسم .

وبطريقة عكسية يمكن الحصول على المسقط الرأسى اذا علم المسقط الافقى لنقطة على السطح . وسنشرح فيما يلى طريقة أخرى لذلك يمكن بوساطتها فى الوقت نفسه تعيين المستوى المماس فى النقطة :

لنفرض أن م′ المسقط الافقى لنقطة مثل م واقعة على السطح الزائدى المعلوم بالمحور ح ح والراسم μ . وليكن $\mu'_{٣}$ ، $\lambda'_{٣}$ المماسين من م′ الى دائرة الحلق و′ (حيث ب′ ، ى′ نقطتا التماس) . فهذان المماسان هما المسقطان الافقيان للراسمين $\mu_{٣}$ ، $\lambda_{٣}$ المارين بالنقطة م . فاذا فرضنا أن $\lambda_{٣}$ يقابل الراسم المعلوم μ فى النقطة ع (ع′ هى نقطة تقاطع $\lambda'_{٣}$ ، μ') كان $\lambda''_{٣}$ هو المستقيم ع″ ى″ وعليه يقع المسقط الرأسى م″ للنقطة م ويكون $\mu''_{٣}$ هو المستقيم م″ ب″ وبذلك يتعين الراسمان $\lambda_{٣}$ ، $\mu_{٣}$ الماران بالنقطة م والمحددان للمستوى المماس فيها . ولما كان من الممكن تغيير اسمى المماسين م′ب′ ، م′ى′ المرسومين من م′ الى دائرة الحلق و′ وذلك بأن نطلق عليها الاسمين $\lambda'_{٣}$ ، $\mu'_{٣}$ على التوالى (بدلا من $\mu'_{٣}$ ، $\lambda'_{٣}$ كما فعلنا فى شكل ١١١) فانه ينتج من ذلك إمكان الحصول على مسقط رأسى جديد للنقطة أى أن م′ هو المسقط الافقى المشترك لنقطتين على السطح .

ويسمى المستوى المماس فى أية نقطة على بعد لانهائى من نقط السطح مثل ك$_{\infty}$ أو ل$_{\infty}$ *بالمستوى التقربى* . وهذه المستويات تغلف مخروطاً دورانياً (يمس السطح فى اللانهاية) رأسه فى مركز السطح ورواسمه توازى رواسم السطح ويطلق على هذا المخروط اسم *المخروط التقربى* .

ويكون المقطع المستوى للسطح (وهو منحن من الدرجة الثانية كما قدمنا) قطعا زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً على حسب ما اذا كان المستوى المار بمركز السطح والموازى للمستوى القاطع — قاطعا المخروط التقربى (فى راسمين حقيقين من رواسم المخروط) أو ماسا له أو غير قاطع له على التوالى .

الباب الخامس

السطوح اللولبيه

الفصل الاول

المنحنى اللولبي وسطحه اللولبي القابل للاستواء

بند ١٠٨ : تعريف

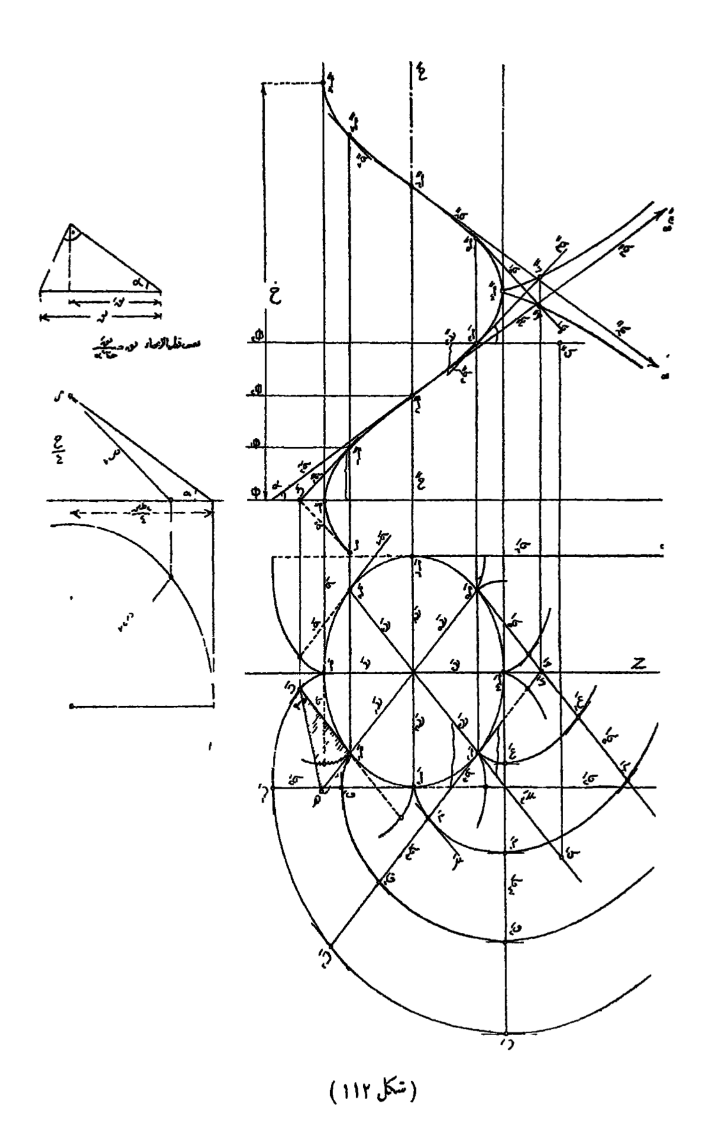
المنحنى اللولبي هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك حركة لولبية حول محور ثابت أى حركة دوران حول المحور مصحوبة بحركة انتقال فى اتجاهه بحيث تكون النسبة بين السرعة الزاوية للحركة الدورانية والسرعة الخطية للحركة الانتقالية تساوى مقداراً ثابتاً (بند ٤٥) .

كذلك يمكن تعريف المنحنى اللولبي بانه منحنٍ فراغى مرسوم على سطح اسطوانة دورانية بحيث يميل على رواسمها فى نقط التقاطع بزاوية ثابتة (لا تساوى ٩٠°) .

ويؤخذ من ذلك أن المنحنى اللولبي يؤول بعد فرد الاسطوانة المرسوم على سطحها الى خط مستقيم فهو إذن أقصر خط يصل أى نقطتين (غير واقعتين على مقطع عمودى واحد) على سطح هذه الاسطوانة .

بند ١٠٩ : كيفية رسم المنحنى اللولبي

اذا علمت الاسطوانة (نصف قطرها س') المرسوم على سطحها المنحنى اللولبي ونقطة الابتداء ا (شكل ١١٢) وعلمت كذلك الزاوية الثابتة α التى يميل بها المنحنى اللولبي على المستوى الافقى العمودى على محور الاسطوانة (أى



(شكل ١١٢)

الزاوية المتممة للزاوية التى يميل بها المنحنى على رواسم الاسطوانة) ورمزنا للبعد بين نقطتين متتاليتين من نقط تقاطع المنحنى اللولبى مع راسم واحد من رواسم الاسطوانة وهو البعد الذى يطلق عليه اسم الخطوة[١] بالرمز « خ » — فان

$$خ = ٢ ط نو' ظا \alpha$$

وتنتج هذه العلاقة مباشرة من بسط الاسطوانة المرسوم عليها المنحنى .

فللحصول على عدة نقط من المنحنى اللولبى نُمر بالنقطة ا المستوى الافقى Φ فيقطع الاسطوانة فى الدائرة المبينة بالشكل ثم نقسم هذه الدائرة الى ن من الاقسام (ن = ٨ فى شكل ١١٢) بالنقط $ا'_١$ ، $ا'_٢$ ، $ا'_٣$ ، . . . فتكون هى المساقط الافقية للنقط $ا_١$ ، $ا_٢$ ، $ا_٣$ ، . . . الواقعة على المنحنى والتى ترتفع عن المستوى Φ بما مقداره $\frac{خ}{ن}$ ، $\frac{٢خ}{ن}$ ، $\frac{٣خ}{ن}$ ، . . . على التوالى . فاذا قيست هذه الارتفاعات فى المسقط الرأسى على خطوط التناظر ابتداء من منسوب النقطة $ا''$ حصلنا على المساقط الرأسية $ا''_١$ ، $ا''_٢$ ، $ا''_٣$ ، ... للنقط المذكورة تلك المساقط التى يتألف منها المسقط الرأسى للمنحنى اللولبى وهو كما يمكن إثباته بسهولة منحن جيبى .

وللحصول على المسقط الرأسى $\sigma''_١$ لماس المنحنى فى النقطة $ا_١$ مثلا نقيس على مسقطه الافقى $\sigma'_١$ (وهو مماس الدائرة فى $ا'_١$) ابتداء من $ا'_١$ البعد $ا'_١$ن' مساوياً لطول القوس $ا'_١$ ا' فتكون ن' المسقط الافقى لأثر المماس $\sigma_١$ مع المستوى Φ . فاذا كانت ن'' هى المسقط الرأسى لهذا الاثر كان $\sigma''_١$ هو

(١) اذا اعتبرنا المنحنى اللولبى محلا هندسياً لنقطة متحركة كانت الخطوة هى المسافة الموازية للمحور والمقطوعة فى نفس الزمن الذى تكون فيه النقطة المتحركة قد دارت دورة كاملة حول المحور .

المستقيم ه″ ا″١ . وذلك لان المماس للمنحنى اللولبي فى أية نقطة يميل على المستوى الافقى Φ بالزاوية الثابتة α وقد بينا فيما تقدم أن

$$\text{ظا}\ \alpha = \frac{\text{ع}}{\text{٢ط نق}}$$

ولما كان ارتفاع النقطة ا١ عن المستوى Φ مساوياً الى $\frac{\text{ع}}{\text{٨}}$ فان

$$\text{ظا}\ \alpha = \frac{\text{٨}}{\text{ا}'_{١}\ \text{ه}'}$$

فمن هاتين المعادلتين ينتج أن

$$\text{ا}'_{١}\ \text{ه}' = \frac{\text{٢ط نق}}{\text{٨}} = \text{طول القوس ا}'_{١}\ \text{ا}'$$

<u>بند ١١٠ : مخروط التوجيه</u>

اذا مد من أية نقطة فى الفراغ مثل م (مسقطاها م′ ، م″ فى شكل ١١٢) موازيات لمماسات المنحنى اللولبي فان هذه الموازيات تولد مخروطاً دائرياً قائماً رأسه م وزاوية قاعدته α ويطلق عليه اسم *مخروط التوجيه*.

ويمكن استخدام هذا المخروط فى تعيين المماس للمنحنى فى أية نقطة بالطريقة البسيطة الآتية :

ليكن المطلوب فى (شكل ١١٢) تعيين المماس $\sigma_{٧}$ فى النقطة ا٧. فلما كان المسقط الافقى $\sigma'_{٧}$ (وهو مماس الدائرة فى ا′٧) لهذا المماس معلوماً فانه اذا رسم من م′ المستقيم $\varrho'_{٧}$ موازيا الى $\sigma'_{٧}$ وعين المسقط الرأسى $\varrho''_{٧}$ لراسم مخروط التوجيه الذى مسقطه الافقى $\varrho'_{٧}$ كان $\sigma''_{٧}$ هو المستقيم المرسوم من ا″٧ موازياً الى $\varrho''_{٧}$.

بند ١١١ : المستوى الملاصق

لنفرض أن ء نقطة على المنحنى اللولبى وأن ٧ عمودى الاسطوانة (المرسوم على سطحها المنحنى) المار بهذه النقطة ولنفرض أيضا أن ء$_1$ ، ء$_2$ نقطتان على المنحنى قريبتان من ء ومتماثلتان عموديا بالنسبة الى ٧ فمن الواضح أن المستوى A المار بالنقط ء$_1$ ، ء ، ء$_2$ يحتوى حينئذ العمودى ٧ . فاذا تحركت ء$_1$ ، ء$_2$ على المنحنى مقتربتين من ء مع بقائهما متماثلتين بالنسبة الى ٧ فان المستوى A يدور حول العمودى ٧ ويؤول فى وضعه النهائى عند ما تنطبق ء$_1$ ، ء$_2$ على ء الى المستوى الملاصق Σ (بند ٣٧) للمنحنى اللولبى فى ء وفى هذه الحالة يؤول كل من القاطعين ء ء$_1$ ، ء ء$_2$ الى المماس σ للمنحنى فى ء . وينتج مما تقدم أن

المستوى الملاصق للمنحنى اللولبى فى أية نقطة من نقطه يمر بمماس المنحنى وبعمودى الاسطوانة فى هذه النقطة [1] .

ويسمى *منحنيا معتدلا* كل منحن مرسوم على سطح ما بحيث تكون مستوياته الملاصقة فى نقطه المختلفة عمودية على السطح . فالمنحنى اللولبى على هذا هو *منحن معتدل* على سطح الاسطوانة ونظراً الى أنه أقصر خط يصل أى نقطتين على السطح كما قدمنا ولما كان من الممكن البرهنة على أن هذا صحيح لكل منحن معتدل مرسوم على سطح ما لذا قيل بصفة عامة إن المنحنى المعتدل هو أقصر خط منحن يمكن رسمه على سطح ما ليصل أى نقطتين من نقط هذا السطح [2].

---

(١) يمكن أيضا البرهنة على هذه النظرية بالتعويض فى نظرية كاتلان (بند ١٢٨) حيث $\bar{\nu}_n = \infty$ فى هذه الحالة وينتج من ذلك أن $\omega = 90°$ ومعنى هذا أن المستوى الملاصق يجب أن يكون عمودياً على المستوى المماس أى محتوياً عمودى السطح .

(٢) اذا تصورنا خيطاً قد شُد الى سطح ما بين نقطتين من نقط السطح فان هذا الخيط يرسم المنحنى المعتدل على السطح بين النقطتين . وذلك لاننا اذا اعتبرنا قوتى الشد فى جزءين متجاورين من الخيط وجب أن تكون محصلة هاتين القوتين على استقامة عمودى السطح ولما كانت هذه المحصلة موجودة فى مستوى القوتين وهو هنا المستوى الملاصق لذا كان هذا المستوى فى جميع نقط الخيط عمودياً على السطح .

وبمقتضى النظرية السابقة يتعين المستوى الملاصق $\Sigma_٣$ فى أية نقطة على المنحنى اللولبى مثل $ا_٣$ (شكل ١١٢) بالمماس $\sigma_٣$ للمنحنى والعمودى $ν_٣$ للاسطوانة فى هذه النقطة ولكن لما كان $\sigma_٣$ هو فى هذه الحالة مستقيم ذو ميل أعظم فى المستوى $\Sigma_٣$ (بالنسبة الى المستوى الافقى) فهو يكفى وحده لتحديد المستوى $\Sigma_٣$.

ويلاحظ أنه لما كان المستوى الملاصق فى كل من النقط $ا_٢$ ، $ا_٦$ ، $ا_{١٠}$ ، ... عمودياً على المستوى الرأسى (لان عمودى الاسطوانة فى كل منها هو فى نفس الوقت عمودى على المستوى الرأسى) فانه يجب أن تكون المساقط الرأسية $ا''_٢$ ، $ا''_٦$ ، $ا''_{١٠}$ ، ... لهذه النقط هى نقط انقلاب على المسقط الرأسى للمنحنى اللولبى (راجع بند ٣٩) .

بند ١١٢ : نصف قطر الانحناء

بمقتضى العلاقة التى اثبتناها فى (بند ٣٩) وهى :

$$نق' = نق \times \frac{جتا^٣ \alpha}{جتا \omega}$$

(حيث نق هو نصف قطر الانحناء لمنحن فراغى فى نقطة مثل ﮬ ، نق' هو نصف قطر الانحناء للمسقط العمودى للمنحنى فى ﮬ' وحيث α ، ω هما زاويتا ميل المماس والمستوى الملاصق فى ﮬ على مستوى الاسقاط) يمكن بسهولة تعيين نصف قطر الانحناء نق للمنحنى اللولبى فى أية نقطة من نقطه . وذلك لانه لما كان المسقط الافقى للمنحنى اللولبى هو دائرة فان نق' فى العلاقة السابقة ثابت لجميع نقط المنحنى ويساوى نصف قطر الاسطوانة ولما كانت الزاوية α ثابتة كذلك ومعلومة لجميع النقط ولما كان ميل المستوى الملاصق على المستوى الأفقى يساوى فى كل نقطة ميل المماس عليه (لان هذا المماس

هو كما قدمنا مستقيم ذو ميل أعظم فى المستوى الملاصق) أى أن

$\omega = \alpha$ فبالتعويض فى العلاقة السابقة ينتج

$$ن' = ن \times جتا^2 \alpha$$

أى أن

$$ن = \frac{ن'}{جتا^2 \alpha}$$

ومعنى هذا أن نصف قطر الانحناء ثابت لجميع نقط المنحنى اللولبي ويساوى نصف قطر الاسطوانة المرسوم عليها المنحنى مقسوماً على جتا$^2\alpha$.

و يمكن استخدام هذه النتيجة فى الحصول على ن بكل سهولة بواسطة الرسم كما هو واضح من المثلث القائم الزاوية المرسوم فى الزاوية العليا الى اليسار من (شكل ١١٢) .

بند ١١٣ : السطح اللولبي القابل للاستواء

هو السطح الذى ترسمه المماسات σ ، σ_1 ، σ_2 ، ... للمنحنى اللولبي فى نقطه المختلفة ويطلق عليه أحياناً لهذا السبب اسم السطح المماس للمنحنى اللولبي .

وهذا السطح لولبي مسطّر لانه يمكن اعتباره متولداً عن تحرك مستقيم راسم (هو المماس σ) حركة لولبية حول المحور . أما قابليته للاستواء — بخلاف جميع السطوح اللولبية المسطرة الاخرى (بند ١١٨) — فواضحة من تلاقى كل وضعين متتاليين من أوضاع الراسم فى نقطة تماسه مع المنحنى اللولبي (راجع بند ٤٥) .

وتسمى المنحنيات ا' ه' ه'$_1$ ه'$_2$ ... ، ا'$_1$ ف' ف'$_1$ ... ، ا'$_2$ م' م'$_1$ ... ، ... المبينة فى (شكل ١١٢) بمقاطع السطح العمودية وهذه المنحنيات التى يمكن الحصول عليها بقطع السطح بالمستويات Φ ، Φ_1 ، Φ_2 ، ... العمودية على المحور (والتى يتألف كل منها من نقط تقاطع الاوضاع المختلفة للراسم مع المستوى القاطع)

هى كما يتضح بسهولة من الشكل بواسط الدائرة المارة بالنقط $ا'$ ، $ا'_1$ ، $ا'_2$ ، . . . التى هى نقط رجوع على هذه البواسط (بند ٣٥) .

ومن السهل أن يرى أن المماس لاى واحد من المنحنيات السالفة الذكر فى نقطة تقاطعه مع المنحنى اللولبى يجب أن يكون منطبقاً على عمودى الاسطوانة المارة بها فمثلا $\mu_3 \equiv \nu_3$ لان كلا من هذين المستقيمين واقع فى المسوى الافقى Φ_3 وعمودى على راسم السطح σ_3 المار بالنقطة $ا_3$. ويتضح من هذا أن *المستوى المماس للسطح اللولبى فى أية نقطة من نقط المنحنى اللولبى هو نفس المستوى الملاصق فيها للمنحنى اللولبى .*

ولما كان المستوى المماس للسطح فى أية نقطة عليه مثل م هو نفس المستوى المماس له فى النقطة $ا_3$ (نقطة تماس الراسم σ_3 المار بالنقطة م مع المنحنى اللولبى) لان الاول منهما متعين بالمستقيمين σ_3 ، μ والثانى متعين بالمستقيمين σ_3 ، μ_3 وكلا المستقيمين μ ، μ_3 متوازيان — فانه ينتج أن المستوى المماس للسطح اللولبى القابل للاستواء فى إحدى نقطه يمسه بطول المستقيم الراسم المار بها وبذا يمكننا القول بان *السطح المماس لمنحنى لولبى هو غلاف مستو يتحرك بحيث يكون فى جميع أوضاعه مستوياً ملاصقاً للمنحنى .*

ولما كان مماس المنحنى اللولبى أو راسم السطح هو مستقيم ذو ميل أعظم (بالنسبة للمستوى الافقى) فى المستوى المماس المار بهذا الراسم ولما كانت جميع مماسات المنحنى اللولبى متساوية الميل على المستوى الافقى فينتج من ذلك أن جميع المستويات المماسة للسطح متساوية الميل على المستوى الافقى فالسطح اللولبى القابل للاستواء هو إذن *سطح ميل* (أنظر بند ١٦٣) .

ويسمى أى مستو مار بمحور السطح اللولبى كما يسمى نظيره فى حالة السطوح الدورانية *بمستوى زوال* كما يسمى منحنى تقاطعه مع السطح *بخط زوال*

خط الزوال الرئيسى فى (شكل ١١٢) نعين نقط تقاطع رواسم السطح المختلفة مع مستوى الزوال Z المار بالمحور موازياً للمستوى الرأسى فالنقطتان ى ، ح هما نقطتا تقاطع الراسمين $\sigma_{٣}$ ، $\sigma_{٥}$ مع المستوى Z فتكونا لذلك نقطتين على خط الزوال كما تكون النقطة $ا_{٤}$ نقطة أخرى على هذا الخط (ويلاحظ أن هذه النقطة الاخيرة نقطة رجوع على المنحنى). ولما كان الراسمان $\sigma_{٢}$ ، $\sigma_{٦}$ يوازيان المستوى Z لذا كان مسقطاهما الرأسيان $\sigma''_{٢}$ ، $\sigma''_{٦}$ خطين تقريبين لخط الزوال الرئيسى. ويمكن الحصول على المماس لهذا الخط فى إحدى نقطه برسم خط تقاطع المستوى المماس للسطح فى هذه النقطة مع المستوى Z .

ويتضح بسهولة من (شكل ١١٢) أن السطح اللولبى القابل للاستواء يمكن اعتباره أيضاً متولداً عن تحرك خط زواله أو تحرك مقطعه العمودى — حركة لولبية حول المحور .

الفصل الثانى

السطوح اللولبية على وجه العموم

بند ١١٤ : كلمة عامة وتعاريف

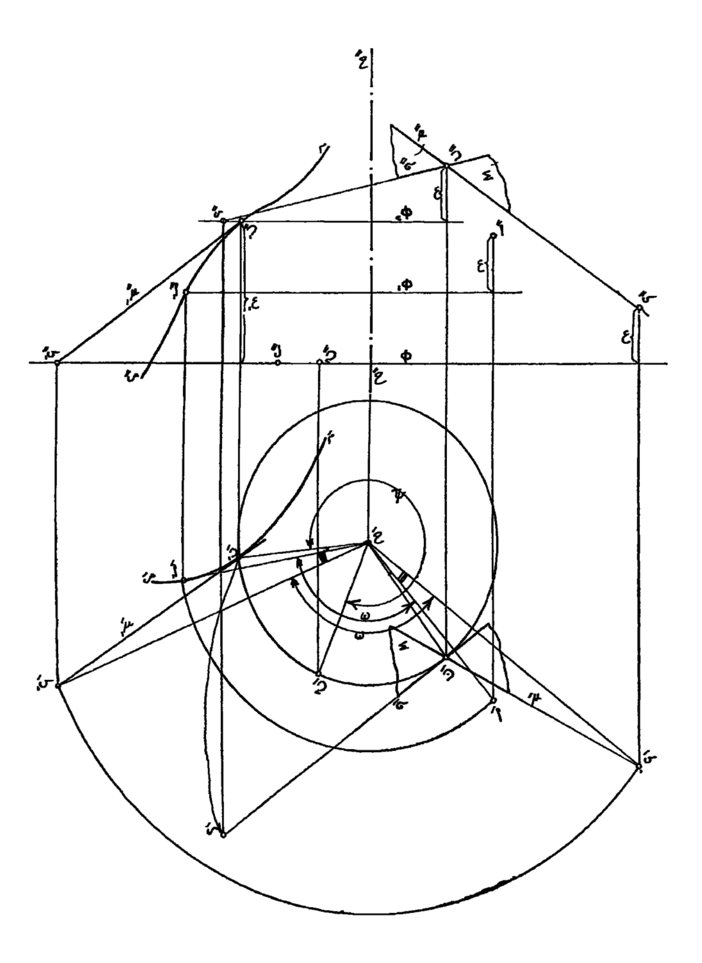
لنفرض فى (شكل ١١٣) أن المنحنى (الفراغى) م يتحرك حركة لولبية حول المحور ح ح فيولد بذلك سطحاً لولبياً (بند ٤٥) فمن الواضح أن كل نقطة من نقط هذا المنحنى ترسم أثناء الحركة منحنياً لولبياً ثابت الخطوة لجميع النقط . فاذا علمت هذه الخطوة واتجاه الحركة اللولبية تعين السطح تمام التعيين . و يتعين السطح أيضا اذا علم بدلا من الخطوة واتجاه الحركة — مسار إحدى نقط المنحنى الراسم أو وضعان من أوضاعها أثناء الحركة وليكن هذان الوضعان فى (شكل ١١٣) هما الوضع الابتدائى ($ا_١'$ ، $ا_١''$) والوضع ($ا'$ ، $ا''$) لنفس النقطة بعد أن دارت حول المحور زاوية مقدارها $\omega°$. فاذا رمزنا الى الارتفاع المعلوم للنقطة ا عن المستوى الافقى $\Phi_١$ المار بالوضع الابتدائى $ا_١$ بالرمز ع والى الخطوة الثابتة بالرمز خ فان

$$خ = \frac{ع \times ٣٦٠°}{\omega°}$$

واذا رمزنا الى الارتفاع الذى يناظر زاوية دوران أخرى مثل ψ بالرمز $ع_١$ فان

$$ع_١ = \frac{ع \times \psi°}{\omega°}$$

فاذا علمت فى هذه المعادلة زاوية الدوران ψ لاية نقطة تحدد الارتفاع المناظر $ع_١$ وبالعكس اذا علم الارتفاع $ع_١$ أمكن تعيين زاوية الدوران ψ .



(شكل ١١٣)

ولنفرض الآن أنه يراد تعيين مسقطى نقطة جديدة على السطح مثل ؈ معلوم وضعها الابتدائى ؈$_1$ على المنحنى الراسم وذلك بعد أن يدور هذا الوضع دورة مقدارها ω° حول المحور . فنرسم لذلك الدائرة التى مركزها ع′ ونصف قطرها ع′ ؈$_1$′ — وهذه الدائرة هى المسقط الافقى للمنحنى اللولبى الذى ترسمه النقطة ؈$_1$ — ثم نقيس الزاوية ؈$_1$′ع′؈′ = ω° فتكون ؈′ المسقط الافقى للوضع الجديد ؈ . أما المسقط الرأسى ؈″ فيقع على خط التناظر المرسوم من ؈′ وعلى ارتفاع عن المستوى الافقى Φ_2 (المار بالوضع الابتدائى ؈$_1$) مساو للارتفاع المناظر الى الزاوية ω وهو نفس الارتفاع المعلوم ع .

بند ١١٥ : المستوى المماس

لتعيين المستوى المماس Σ للسطح فى النقطة ؈ المذكورة آنفاً نرسم بالطريقة السابق شرحها فى (بند ١٠٩) — المماس σ للمنحنى اللولبى المار بالنقطة ؈ (σ′ هو مماس الدائرة فى ؈′ فاذا قيس على σ′ البعد ؈′ ر′ مساويا طول القوس ؈′ ؈$_1$′ فان ر″ تقع على Φ_2 ويكون σ″ هو المستقيم ر″ ؈″) ونرسم كذلك المماس μ للمنحنى الراسم فى وضعه الجديد المار بالنقطة ؈ وذلك بالطريقة الآتية التى تكفينا مؤونة رسم الوضع الجديد للمنحنى :

ليكن μ_1′ ، μ_1″ المسقطين الافقى والرأسى للمماس μ_1 للمنحنى م فى النقطة ؈$_1$ فيكون μ_1 هو الوضع الابتدائى للمماس μ . فاذا أخذنا أية نقطة مثل س$_1$ على μ_1 وحركناها حركة لولبية بحيث تدور زاوية مساوية للزاوية التى دارتها ؈ حول المحور (ومقدارها ω° كما قدمنا) وكانت س هى الوضع الجديد للنقطة س$_1$ بعد الدوران فان ؈′ س′ ، ؈″ س″ يكونان المسقطين الافقى والرأسى μ′ ، μ″ للمماس المطلوب μ .

وبذلك يكون المستوى Σ هو المستوى المعين بالمستقيمين :

بند ١١٦ : كيفية تعيين أحد مسقطي نقطة على السطح اذا علم مسقطها الآخر

اذا علم المسقط الافقي $\text{ه}'$ لنقطة على السطح مثل ه وأريد ايجاد مسقطها الرأسي $\text{ه}''$ فان الطريقة لذلك تكون باستخدام النقطة الابتدائية ه_1 على المنحنى الراسم المعلوم م كما يتضح من (شكل ١١٣).

أما اذا كان المعلوم هو المسقط الراسى $\text{ل}''$ لنقطة مثل ل على السطح وأريد تعيين $\text{ل}'$ فنمر بالنقطة المستوى الافقى (العمودى على المحور) Φ ونعين منحنى تقاطعه مع السطح أى المقطع العمودى φ وذلك بان نحرك نقط المنحنى م حركة لولبية الى أن تقع فى المستوى Φ فمثلا ارتفاع ه_1 عن Φ يساوى ع_1 فالزاوية ψ المناظرة لهذا الارتفاع والتى يمكن حسابها من المعادلة المذكورة فى (بند ١١٤) هى الزاوية التى يجب أن تدورها ه_1 (فى الاتجاه المضاد لاتجاه الزاوية ω) لتأخذ الوضع ه_2 الواقع فى المستوى Φ فاذا كانت الزاوية $\text{ه}_1'$ $\text{ع}'$ $\text{ه}_2'$ مساوية الى ψ كانت $\text{ه}_2'$ إحدى نقط المسقط الافقى φ' للمقطع العمودى φ وبتعيين عدة نقط أخرى بنفس الطريقة يمكن الحصول على φ' ويكون المسقط الافقى المطلوب $\text{ل}'$ للنقطة ل هو إحدى نقط تقاطع خط التناظر المرسوم من $\text{ل}''$ مع φ' .

واذا أمررنا بالنقطة $\text{ع}'$ مستقيما موازيا لخط الارض ليمثل مستوى الزوال الرئيسى Z واعتبرنا نقط هذا المستقيم مساقط أفقية لنقط على السطح ثم عينا مساقطها الرأسية فأن هذه المساقط يتألف منها حينئذ خط الزوال الرئيسى للسطح.

بند ١١٧ : بعض الامثلة

من الامثلة التطبيقية المهمة على السطوح اللولبية ذوات الراسم المنحنى السطوح التى يكون فيها المنحنى الراسم دائرة . فاذا تحركت الدائرة حركة

لولبية حول محور ثابت بحيث كان مستويها فى جميع أوضاعه عمودياً على المنحنى اللولبي الذى يرسمه مركز الدائرة أثناء الحركة نشأ ما يسمى بالسطح الماسورى ويمكن تصور نفس هذا السطح متولداً عن تحرك كرة حركة لولبية حول المحور .

ويطلق على السطح المتولد عن تحرك دائرة حركة لولبية حول محور واقع فى مستويها (بحيث تكون هذه الدائرة هى خط الزوال للسطح) اسم بريمة سان چيل .

ويجوز أن تكون الحركة اللولبية للدائرة حول المحور هى بحيث يكون مستويها دائماً عمودياً على المحور أى بحيث يكون المقطع العمودى للسطح المتولد دائرة فمثلا سطح العامود الملتوى والمثقاب البريمى يتولدان عن مثل هذه الحركة .

الفصل الثالث

السطوح اللولبية المسطّرة

بند ١١٨ : تقسيم

يسمى سطحاً لولبياً مسطراً كل سطح يمكن تولده عن تحرك خط مستقيم (راسم) حركة لولبية حول محور ثابت .

والمستقيم الراسم إما أن يكون قاطعاً أو غير قاطع للمحور ففى الحالة الاولى ينشأما يسمى بالسطح المحورى أوالمقفل وفى الحالة الثانية يكون السطح المتولد مفرغاً [١] ويسمى حينئذ المنحنى اللولبي المرسوم على سطح الاسطوانة التى نصف قطرها يساوى أقصر بعد بين المحور والراسم باللولب الحلقى . وتنقسم السطوح المحورية كما تنقسم المفرغة الى عمودية ومائلة على حسب ما اذا كان الراسم عمودياً أو مائلا على المحور[٢] .

فالسطوح اللولبية المسطرة يمكن إذن تقسيمها الى أربعة أقسام كما تقدم جميعها سطوح غير قابلة للاستواء أى سطوح معوجة (أنظر بند ١٢٣) ما عدا السطح المماس للمنحنى اللولبي الذى سبق بيانه فى (بند ١١٣) فهذا السطح وإن كان يمكن اعتباره أحد السطوح اللولبية المفرغة المائلة إلا أنه حالة خاصة منها إذ يشترط فى المستقيم الراسم أثناء حركته أن يكون على الدوام ماساً (وليس فقط قاطعاً) للولب الحلقى وهذا الشرط هو الذى يجعل هذا السطح وحده قابلا للاستواء .

---

(١) أى أنه يمكن تحديد جزء معين من الفراغ (فى هذه الحالة أسطوانة) داخل هذا السطح بحيث تكون جميع نقطه أقرب الى المحور من أية نقطة من نقط السطح .

(٢) فالمقصود بقولنا سطح لولبى « عمودى » أو « مائل » هو أن يكون « عمودى الراسم » أو « مائل الراسم » على التوالى .

ويتعين كل واحد من السطوح سالفة الذكر اذا علم المحور والمستقيم الراسم والخطوة الثابتة للمنحنيات اللولبية التى ترسمها نقط المستقيم الراسم أثناء الحركة . وسنقصر بحثنا فيما يلى على السطوح المحورية لاهميتها فى التطبيقات العلمية .

بند ١١٩ : بعض خواص السطوح المحورية العمودية

لنفرض فى (شكل ١١٢) أن المستقيم ٧ (عمودى الاسطوانة) العمودى على المحور ع ع والمتقاطع معه — يتحرك حول هذا المحور حركة لولبية فيرسم بذلك سطحاً محورياً عمودياً . فاذا كانت النقطة ا على المستقيم ٧ ترسم أثناء هذه الحركة المنحنى اللولبي المبين بالشكل والذى خطوته خ فان كل نقطة أخرى من نقط المستقيم ترسم بالمثل منحنياً لولبياً خطوته خ أيضاً .

والنقطة س′ المبينة فى (شكل ١١٢) يمكن اعتبارها المسقط الافقى لعدد لا نهاية له من نقط السطح حيث إن المستقيم المرسوم من س′ عمودياً على المستوى الافقى يقابل الراسم أثناء الحركة فى عدد لا نهاية له من النقط . وللحصول على المسقط الرأسى س″ لاحدى هذه النقط نصل س′ع′ ≡ $٧_٣$′ ونفرض أنه يقطع الدائرة المعلومة (وهى المسقط الافقى للمنحنى اللولبي المعلوم الذى ترسمه النقطة ا) فى $ا_٣$′ ثم نرسم من $ا_٣$″ المستقيم $٧_٣$″ العمودى على المحور (حيث $٧_٣$″ المسقط الرأسى للراسم $٧_٣$) ليقابل خط التناظر المرسوم من س′ فى المسقط الرأسى المطلوب س″ وبذا تكون النقطة س واقعة على السطح .

ويتحدد المستوى المماس فى أية نقطة من نقط السطح مثل $ا_٣$ بمعلومية الراسم $٧_٣$ المار بها والمماس $ت_٣$ للمنحنى اللولبي الذى ترسمه نفس النقطة أثناء الحركة [١] ولما كان هذا المماس هو مستقيم ذو ميل أعظم فى المستوى لذا كانت

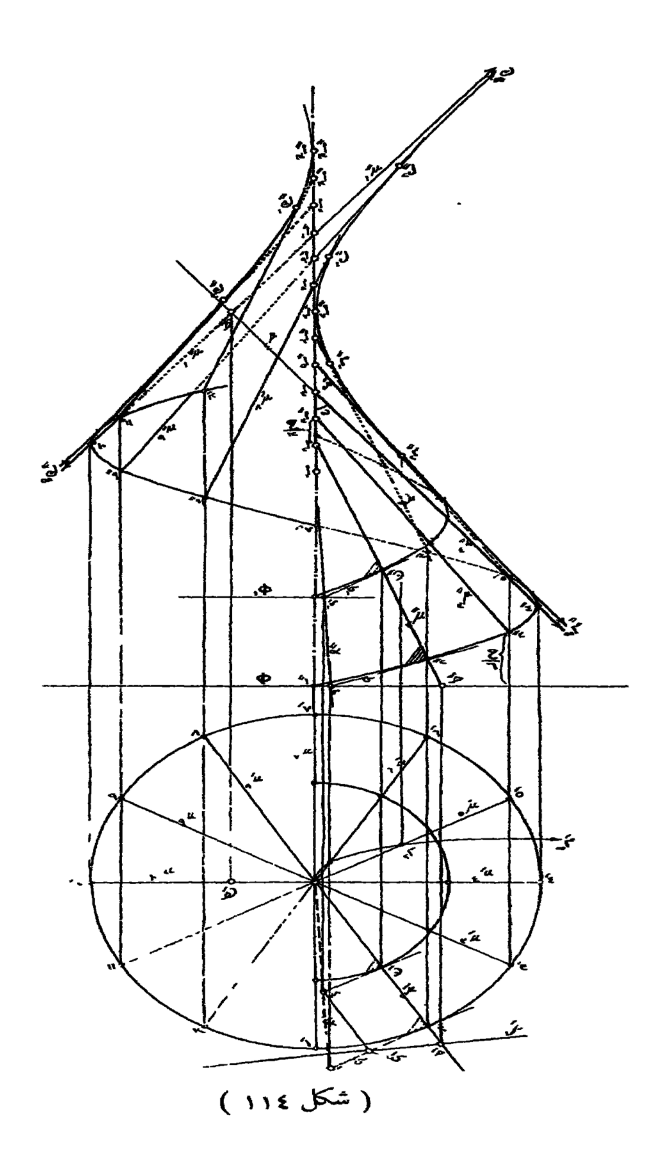
(١) أى أن المستوى المماس للسطح المحورى العمودى فى أية نقطة من نقطه هو نفس المستوى الملاصق فى هذه النقطة للمنحنى اللولبي الذى ترسمه أثناء الحركة .

الزاوية التى تميل بها المستويات المماسة للسطح فى جميع نقط منحن لولبى واحد — على المستوى الافقى (المستوى العمودى على المحور) ثابتة وتساوى $ظا^{-1} \frac{خ}{٢ ط نق'}$ حيث نق′ هو نصف قطر الاسطوانة المرسوم عليها المنحنى اللولبى . ولما كانت خ ثابتة للمنحنيات اللولبية المختلفة فينتج أنه كلما بعدت النقطة عن المحور أى كلما كبرت نق′ كلما صغرت زاوية ميل المستوى المماس للسطح فيها على المستوى الافقى فمثلا الزاوية التى يميل بها المستوى المماس فى س على المستوى الافقى أصغر من التى يميل بها المستوى المماس فى ا٣ (شكل ١١٢) . فاذا كانت نق′ = ∞ كان المستوى المماس أفقياً ومعنى هذا أن المستويات المماسة للسطح فى نقطه التى فى اللانهاية وهى التى يطلق عليها اسم المستويات التقربية — هى مجموعة من المستويات العمودية على المحور .

بند ١٢٠ : السطوح المحورية المائلة

المعلوم فى (شكل ١١٤) المحور والمستقيم م م٢ وهو أحد أوضاع الراسم م الذى يتحرك متكئاً على المحور وصانعاً معه زاوية ثابتة ω (لا تساوى ٩٠°) ومولداً بهذه الحركة اللولبية *سطحاً محورياً مائلا* . فاذا علم أيضاً المنحنى اللولبى ١٢٣٤ ... لاحدى نقط الراسم فان هذا المنحنى يمكن اعتباره أحد أدلة السطح (بند ٤٢) التى يُلزم الراسم بالاتكاء عليها دواماً (أنظر بند ١٢٢) وتسميته لذلك **بالمنحنى اللولبى الدليل** وبواسطته تتحدد الخطوة الثابتة خ للمنحنيات اللولبية الأخرى .

ولما كانت الزاوية ω السالفة الذكر ثابتة وكان طول الجزء من الراسم المحدد بنقطتى اتكائه على المحور والمنحنى اللولبى الدليل ثابتاً كذلك لذا كان مسقط هذا الجزء على المحور ثابتاً وينتج من ذلك أن الارتفاعات ا٣″ ا٢″ ، ا٤″ ا٢″ ، ... تساوى على التوالى ارتفاعات النقط ٣ ، ٤ ، . . . من المنحنى اللولبى الدليل عن



(شكل ١١٤)

النقطة ٢ أى أن كلا من الابعاد $ا_٢''$ $ا_٣$ ، $ا_٣''$ $ا_٤$ ، $ا_٤''$ $ا_٥$ ، ... يساوى $\frac{١}{١٢}$ خ (لان النقط ١ ، ٢ ، ٣ ، ... تقسم الدائرة فى الشكل الى ١٢ قسم) .

وبذا يمكن بسهولة تعيين الاوضاع المختلفة $\mu_٣$ ، $\mu_٤$ ، $\mu_٥$ ، ... للراسم .

ولما كان الوضع $\mu_٤$ هو أحد أوضاع الراسم الامامية لذا كانت الزاوية المحصورة بين $\mu_٤''$ والمحور هى المقدار الحقيقى للزاوية ω . فاذا افترضنا السطح معلوماً بهذه الزاوية والمحور والمنحنى اللولبى الدليل كان هذا كافياً أيضا لتحديد السطح لان المستقيم $\mu_٤''$ المرسوم فى هذه الحالة من النقطة ٤'' صانعاً مع المحور الزاوية المعلومة ω يكون هو المسقط الرأسى للوضع الامامى $\mu_٤$ للراسم .

ويلاحظ أن أى وضعين متتاليين من أوضاع الراسم لا يمكن أن يتقاطعا وهذا هو الذى يجعل إمكان بسط السطح على مستو مستحيلا كما سيأتى بيانه[١] .

ويتضح من (شكل ١١٤) أن امتداد الراسم الى الجهة الاخرى بعد تقاطعه مع المحور يولد أثناء الحركة طية أخرى من السطح (طية عليا) تشترك مع الطية الاولى فى المحور وفى عدد لا نهاية له من المنحنيات اللولبية لانه اذا افترضنا أى وضعين من أوضاع الراسم موجودين فى مستو واحد مار بالمحور (مستوى زوال) كالوضعين $\mu_٤$ ، $\mu_{١٠}$ وفرضنا أن امتداد $\mu_٤$ للجهة الاخرى من المحور — وهو الامتداد الذى يولد بحركته الطية العليا للسطح — يقطع $\mu_{١٠}$ فى النقطة هـ فان هـ تكون نقطة مشتركة بين الطيتين وترسم أثناء الحركة منحنياً لولبياً هو أحد منحنيات تقاطع الطيتين وتكون نقط تقاطع امتداد الراسم $\mu_٤$

(١) قارن هذه الخاصية بنظيرتها للسطح اللولبى القابل للاستواء فى (بند ١١٣) حيث كل راسمين متتاليين يتقاطعان فى نقطة على اللولب الحلقى .

نفسه مع الرواسم $\mu_{٢٢}$ ، $\mu_{٣٤}$ ، . . . نقطاً جديدة كالنقطة هـ تولد منحنيات لولبية أخرى مشتركة بين الطيتين .

واذا كانت ن إحدى نقط السطح فالمستوى المماس $\Sigma_{١}$ فيها يتعين بمعلومية الراسم $\mu_{٢}$ المار بها والمماس $\sigma_{١}$ للمنحنى اللولبي الذى ترسمه هذه النقطة أثناء الحركة . وكذلك يتعين المستوى المماس Σ للسطح فى نقطة أخرى على الراسم $\mu_{٢}$ مثل النقطة ٢ بالراسم $\mu_{٢}$ نفسه وبالمماس σ للمنحنى اللولبى الذى ترسمه النقطة ٢ أثناء الحركة . ومن الواضح أن المستوى Σ لا يمكن أن ينطبق فى هذه الحالة على المستوى $\Sigma_{١}$ لان المماسين σ ، $\sigma_{١}$ هما كما يتضح من الشكل مستقيمان غير متقاطعين ولما كان هذا صحيحاً لاى مستويين مماسين فى نقطتين على راسم واحد إذ هما دائماً مستويان مختلفان ولا يشتركان الا فى الراسم الواقعة عليه النقطتان لذا فانه يمكننا القول إنه *اذا تحركت نقطة على راسم السطح فان المستوى المماس له فيها يدور حول هذا الراسم*[1].

ويلاحظ أنه اذا كانت ر نقطة تقاطع المماس σ مع المستوى Φ وكانت ر$_{١}$ نقطة تقاطع $\sigma_{١}$ مع المستوى $\Phi_{١}$ وفرضنا أن ر$_{٢}$ ، ر$_{٣}$ ، ... هى نقط تقاطع $\sigma_{٢}$ ، $\sigma_{٣}$ ، ... مع المستويات $\Phi_{٢}$ ، $\Phi_{٣}$ ، ... على التوالى (حيث $\sigma_{٢}$ ، $\sigma_{٣}$ ، ... هى المماسات للمنحنيات اللولبية المختلفة فى نقط تقاطعها مع الراسم $\mu_{٢}$ وحيث $\Phi_{٢}$ ، $\Phi_{٣}$ ، ... هى المستويات الافقية المارة بنقط الابتداء لتلك المنحنيات) فان ر ، ر$_{١}$ ، ر$_{٢}$ ، ر$_{٣}$ ، ... تقع جميعاً على مستقيم واحد ν متقاطع مع المحور أى أن النقط ر' ، ر'$_{١}$ ، ر'$_{٢}$ ، . . . ، ع' (حيث ع' المسقط

(١) قارن هذه الخاصية فى حالة السطوح المعوجة بما يقابلها فى السطوح القابلة للاستواء كالسطح المبين فى (بند ١١٣) حيث يبقى المستوى المماس ثابتاً اذا تحركت النقطة على الراسم .

الافقى للمحور) تكون على استقامة واحدة [١] وذلك لان

$$\frac{ض' ر'_1}{٢' ر'} = \frac{\frac{٢ ط ن'_1}{١٢}}{\frac{٢ ط ن'}{١٢}} = \frac{ن'_1}{ن'}$$

حيث ن' ، ن'$_1$ هما نصفا قطرى المتحنيين اللولبيين المارين بالنقطتين ٢ ، ض على التوالى .

ويتضح مما تقدم أن أى مستو مار براسم ما لا بد أن يمس السطح فى نقطة معينة يمكن تعيينها بواسطة نظرية شالز (أنظر بندى ١٣٠ ، ١٣٢) وأيضاً بالطريقة الآتية :—

لنفرض أن المستقيم حـ' س' (شكل ١١٤) هو أثر مستو ما مثل P مار بالراسم μ_2 على المستوى Φ (حيث حـ' هو أثر الراسم) فاذا كانت س' هى نقطة تقاطع هذا الاثر مع المسقط الافقى σ' لماس أحد المنحنيات اللولبية للسطح فى نقطة تقاطعه مع الراسم μ_2 ورسم من س' موازياً الى μ'_2 ليقطع المستقيم α' = ع' ر' (حيث ع' المسقط الافقى للمحور وحيث ر' أثر المماس σ على المستوى Φ) فى ر'$_1$ فان المستقيم المرسوم من ر'$_1$ موازياً الى σ' يقابل μ'_2 فى المسقط الافقى ض' لنقطة تماس المستوى P مع السطح (وتتضح صحة هذه الطريقة مباشرة مما سبق لنا ذكره من أن النقط ر' ، ر'$_1$ ، ر'$_2$ ، ... ، ع' على استقامة واحدة) .

---

(١) وينتج من ذلك أنه لما كانت المماسات σ ، σ_1 ، σ_2 ، ... السالفة الذكر تتكىء دائما على مستقيمين غير متقاطعين هما μ_2 ، α وتوازى جميعاً فى الوقت نفسه مستوياً ثابتاً هو المستوى المار باى واحد من هذه المماسات عمودياً على المستوى الافقى — فان هذه المماسات تولد سطحاً يسمى بالسطح المكافىء الزائدى (بند ١٣٥) يمس السطح اللولبى بطول الراسم μ_2 .

فاذا كان P هو المستوى المار بالراسم $\mu_{٢}$ عمودياً على المستوى الرأسى (بحيث يكون أثر P على المستوى Π هو نفس خط التناظر المار بالنقطة $ح'$) فان نقطة تماس P فى هذه الحالة مع السطح تكون إحدى نقط محيطه الحقيقى بالنسبة الى المستوى الرأسى ويكون المسقط الرأسى لهذه النقطة هو نقطة تماس المحيط الظاهرى مع $\mu''_{٢}$ (وهذه النقطة غير مبينة بالشكل) لان المحيط الظاهرى للسطح بالنسبة للمستوى الرأسى هو بمقتضى النظرية المذكورة فى (بند ٤٤) غلاف المساقط الرأسية للاوضاع المختلفة للراسم[١] ويتألف من جزءين :

(ا) المحيط الظاهرى للطية السفلى ويتكوّن من مجموعة المنحنيات :

$ا''_{٧}$ $م''_{١}$ $م''_{٢}$ $م''_{\infty}$ ، $ا''_{١٣}$ $ك''_{١}$ $ك''_{٢}$ $ك''_{\infty}$ ، ...

(ب) المحيط الظاهرى للطية العليا المتولدة عن حركة امتداد الراسم بعد تقاطعه مع المحور وقد اقتصرنا فى الشكل على رسم المنحنى $ا''_{٧}$ $ل''_{١}$ $ل''_{٢}$ $ك''_{\infty}$ الذى يكوّن جزءاً من هذا المحيط .

ويلاحظ أن هذه المنحنيات كلها تمس المحور باعتباره المسقط الرأسى المشترك للرواسم $\mu_{١}$ ، $\mu_{٧}$ ، $\mu_{١٣}$ ، ... فى النقط $ا''_{١}$ ، $ا''_{٧}$ ، $ا''_{١٣}$ ، ... وأن المساقط الرأسية $\mu''_{٤}$ ، $\mu''_{١٠}$ ، ... للاوضاع الامامية للراسم هى خطوط تقريبية لهذه المنحنيات .

(١) والمحيط الظاهرى يمس أيضاً بمقتضى النظرية المشار اليها — المنحنيات اللولبية المبينة بالشكل وتكون نقط التماس هى الحدود الفاصلة بين الاجزاء المنظورة وغير المنظورة من هذه المنحنيات . ويلاحظ أن الجزء ٧'' ٨'' ٩'' ... (الى نقطة التماس مع المنحنى $ك''_{١}$ $ك''_{٢}$ $ك''_{\infty}$)من المنحنى اللولبى ١'' ٢'' ... إنما فرضناه ظاهرا لاننا اعتبرنا السطح منتهيا بهذا المنحنى .

بند ١٢١ : المقاطع المستوية ومنحنيات التقاطع للسطوح المحورية

يتألف خط الزوال فى حالة السطوح اللولبية المحورية من مجموعة من الخطوط المستقيمة وهى أوضاع الراسم الواقعة فى مستوى الزوال المعلوم .

أما المقطع العمودى (أى منحنى تقاطع السطح مع مستو عمودى على المحور) فهو فى حالة السطح العمودى (بند ١١٩) نفس المستقيم الراسم الواقع فى مستوى المقطع أما فى حالة السطح المائل (شكل ١١٤) فيمكن البرهنة بسهولة على أنه منحن حلزونى .

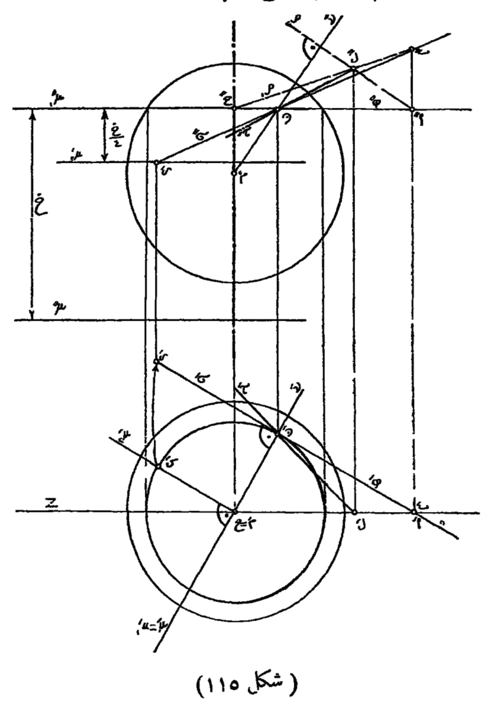
ويمكن الحصول على منحنى تقاطع أى سطح لولبى مسطر مع مستو ما بتعيين نقط تقاطع الاوضاع المختلفة للراسم مع المستوى القاطع . ويكون المماس لمنحنى التقاطع فى إحدى نقطه هو كما تقدم خط تقاطع المستوى المماس للسطح فيها مع المستوى القاطع .

كذلك لرسم منحنى تقاطع سطح لولبى مسطر مع سطح آخر [١] نجد نقط تقاطع الاوضاع المختلفة لراسم السطح اللولبى مع السطح الآخر . مثال ذلك لنفرض فى (شكل ١١٥) أنه يراد رسم منحنى تقاطع الكرة المبينة والتى مركزها م مع السطح اللولبى العمودى المعلوم بالمحور ح ح والراسم (م' ، م") والخطوة خ . فالوضع الجديد م١ للراسم بعد دورة مقدارها ١٨٠° مثلا يمكن الحصول عليه برسم المستقيم م١" موازيا الى م" وعلى بعد منه مساو للخطوة المعلومة خ فيكون م١" ، م١' ≡ م' هما المسقطان الرأسى والافقى للراسم م١ . فاذا كانت ن إحدى نقطتى تقاطع م١ مع الكرة فانها تكون إحدى نقط

---

(١) اذا اشترك سطح محورى مع اسطوانة دورانية كان خط تقاطع كل طية من طيتى السطح المحورى مع الاسطوانه منحنياً لولبياً .

منحنى التقاطع المطلوب . ولرسم المماس τ لهذا المنحنى فى النقطة ﻫ نعين المستويين المماسين Σ_1 ، Σ_2 للسطح اللولبى وللكرة فى هذه النقطة فيكون τ



(شكل ١١٥)

هو خط تقاطعهما . ففى (شكل ١١٥) المستقيم ﻫ′ هو المماس فى ﻫ′ للدائرة التى مركزها ع′ ونصف قطرها ع′ ﻫ′ (والتى هى المسقط الافقى للمنحنى اللولبى الذى ترسمه النقطة ﻫ) .

فاذا قسنا على σ′ البعد ه′ ر′ مساويا الى طول القوس ه′ س′ مثلا (= ¼ المحيط) ثم رسمنا من ر′ خط التناظر ليقطع المستقيم μ_2'' المرسوم موازيا الى μ_1'' وأوطى منه بمقدار $\frac{ع}{٤}$ (وهو الارتفاع المناظر الى ¼ المحيط) فى ر″ ووصلنا σ″ ≡ ر″ ه″ كان σ′ ، σ″ هما المسقطان الافقى والرأسى لماس المنحنى اللولبى الذى ترسمه النقطة ه فى ه ذاتها ويتعين حينئذ المستوى المماس Σ_1 بالمستقيمين σ ، μ_1 . أما المستوى المماس Σ_2 للكرة فى النقطة ه فهو المستوى المار بهذه النقطة عمودياً على نصف القطر م ه . فاذا فرضنا أن ϱ_1 ، ϱ_2 هما خطا تقاطع Σ_1 ، Σ_2 مع مستوى الزوال الرئيسى Z وكانت ل نقطة تلاقى ϱ_1 ، ϱ_2 كان المستقيم ل ه هو خط تقاطع المستويين Σ_1 ، Σ_2 أى المماس المطلوب τ .

* * *

من الامثلة التطبيقية الهامة على السطوح اللولبية المسطرة — البريمتان المثلثية والمستطيلة . فالبريمة المثلثية تنشا عن تحرك مثلث متساوى الساقين (أو متساوى الاضلاع) حركة لولبية حول محور فى مستويه بحيث تكون قاعدة المثلث موازية للمحور وأقرب اليه من رأسه وبحيث تكون خطوة الحركة مساوية لطول القاعدة . فالجسم المتولد عن هذه الحركة يتكون حينئذ من اسطوانة وسطحين لولبيين محوريين مائلين . أما البريمة المستطيلة فخط زوالها مستطيل (أو مربع) ضلعان من أضلاعه موازيان للمحور (الواقع فى مستوى المستطيل) ويولدان بذلك اسطوانتين متحدتى المحور والضلعان الآخران عموديان على المحور ويولد كل منهما سطحاً لولبياً محورياً عمودياً .

الباب السادس

السطوح المسطّرة

الفصل الاول

تعاريف ومبادىء اساسية

<u>بند ١٢٢ : تعاريف</u>

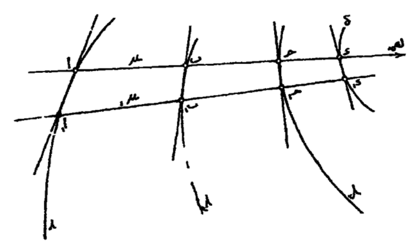
يطلق اسم سطح مسطر على كل سطح يمكن اعتباره متولداً عن حركة خط مستقيم (راسم) .

والقانون العام لحركة الراسم يعطى عادة على صورة ثلاثة خطوط (أو سطوح) ثابتة يُلزم الراسم دواماً بالاتكاء عليها (شكل ١١٦)" ويسمى كل خط من هذه الخطوط التي يجوز أن تكون منحنيات مستوية أو فراغية أو خطوطاً مستقيمة — بالدليل (بند ٤٥) .

فاذا علمت الادلة الثلاثة λ_1 ، λ_2 ، λ_3 وأريد الحصول على راسم مثل μ نختار على أحد الادلة وليكن λ_1 نقطة مثل ا ونعتبرها رأساً مشتركاً لمخروطين أحدهما دليله λ_2 والآخر دليله λ_3 فهذان المخروطان يتقاطعان فى عدة مستقيمات يصلح أى واحد منها أن يكون الراسم μ للسطح لانه يقطع (أويتكىء على) جميع الادلة الثلاثة المعلومة .

واذا مد من أية نقطة فى الفراغ مستقيمات موازية لرواسم سطح مسطر فالمخروط العام الناشىء يطلق عليه اسم *مخروط التوجيه* وهو مثلا فى حالة السطح اللولبى المائل مخروط دائرى قائم . واذا كانت رواسم السطح موازية جميعاً لمستو

واحد (كما هو الحال فى السطح اللولبي العمودى مثلا) فان هذا المخروط يؤول الى مستو يطلق عليه اسم مستوى التوجيه .



(شكل ١١٦)

ولنأخذ الآن السطوح اللولبية المذكورة فى (بند ١١٨) كمثال على السطوح المسطرة فنشرح فيما يلى الادلة الثلاثة لكل منها .

فالسطح المحورى العمودى أدلته هى :

اولا — المحور

ثانياً — المستقيم الذى فى اللانهاية الذى يحدده وضع أى مستو عمودى على المحور (مستوى التوجيه)

ثالثاً — أى منحنى لولبي يؤخذ حيثما اتفق باعتباره مسارا لاحدى نقط الراسم .

والسطح المحورى المائل أدلته هى :

اولا — المحور

ثانياً — منحنى تقاطع مخروط التوجيه مع المستوى الذى فى اللانهاية (وهذا المنحنى هو مقطع مخروطى فى اللانهاية) .

ثالثا — أى منحن لولبي يؤخذ حيثما تفق باعتباره مسارا لاحدى نقط الراسم .

وفى حالة السطوح اللولبية المفرغة (حيث يكون الراسم غير متقاطع مع المحور) تحل الاسطوانة المرسوم عليها اللولب الحلقى محل المحور ويلزم الراسم بان يمس دواما هذه الاسطوانة متكئا على اللولب الحلقى الذى يمكن اعتباره فى هذه الحالة أحد أدلة السطح المفرغ أما الدليلان الباقيان فمثلهما فى حالة السطوح المحورية . وفى حالة السطح اللولبى القابل للاستواء (بند ١١٣) وهو أحد السطوح المفرغة المائلة كما قدمنا — لا يتكىء الراسم على اللولب الحلقى فقط وإنما يمسه أيضا فى نقط التقاطع .

واذا اخترنا ثلاثة مستقيمات من مجموعة واحدة مثل λ_1 ، λ_2 ، λ_3 على سطح زائدى دورانى (بند ١٠٥) واقترضنا ثبوتها فانه يمكن اعتبارها أدلة ثلاثة لهذا السطح كما يمكن اعتبار السطح حينئذ متولداً عن حركة الراسم μ (من المجموعة الاخرى) بحيث يتكىء دواماً على هذه الادلة الثلاثة .

بند ١٢٣ : تقسيم السطوح المسطرة الى قابلة للاستواء ومعوجة

تنقسم السطوح المسطرة كما قدمنا فى (بند ٤٥) الى قسمين رئيسيين :—

(١) سطوح قابلة للاستواء مثل السطح اللولبى المبين فى (بند ١١٣) والسطح المخروطى والسطح الاسطوانى الخ .

(٢) سطوح مسطرة معوجة (غير قابلة للاستواء) مثل السطوح اللولبية المذكورة فى (بند ١١٨) ومثل السطح الزائدى الدورانى ذو الطية الخ .

ويمكن تركيز الفرق بين هذين القسمين فيما يأتى :

اولا — أى وضعين متتاليين للراسم فى السطوح القابلة للاستواء هما مستقيمان متقاطعان (يمر بهما مستو واحد) بينما هما غير متقاطعين فى السطوح المعوجة .

ثانياً — المستوى المماس فى أية نقطة على سطح قابل للاستواء يمس السطح بطول الراسم المار بها بينما اذا تحركت نقطة على راسم سطح أعوج فالمستوى المماس له فيها يدور حول الراسم .

وتنقسم السطوح المسطرة كذلك الى جبرية وغير جبرية على حسب ما اذا كانت الادلة منحنيات جبرية أوغير جبرية ويمكن البرهنة تحليلياً على أنه اذا كانت الادلة الثلاثة لسطح مسطر هى منحنيات جبرية من الدرجات $ن_{1}$ ، $ن_{2}$ ، $ن_{3}$ فالسطح نفسه يكون من الدرجة ($٢ ن_{1} ن_{2} ن_{3}$) أى أن كل مستقيم فى الفراغ يقطعه فى هذا العدد من النقط (حقيقية أوتخيلية) كما يمكن البرهنة على أن رتبة السطح الجبرى المسطر تساوى دائماً درجته أى أن عدد المستويات المماسة للسطح والمارة بكل مستقيم فى الفراغ هو فى الحالة السابقة ($٢ ن_{1} ن_{2} ن_{3}$) أيضاً (حقيقية أو تخيلية) .

وأهم السطوح الجبرية المسطرة هى تلك التى من الدرجة (والرتبة) الثانية ففى هذه الحالة تكون أدلة كل منها ثلاثة مستقيمات غير متقاطعة (المستقيم هو منحن من الدرجة الاولى) .

الفصل الثانى

السطوح القابلة للاستواء

بند ١٢٤ : تعاريف

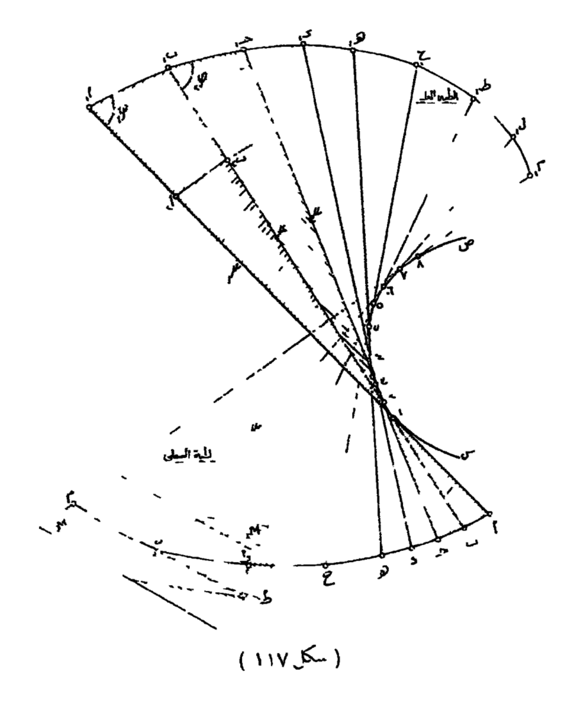
يسمى سطحاً قابلا للاستواء كل سطح (مسطر) يمكن بسطه أو تطبيقه أو تسويته على مستو بدون كسر أو شد . فمثلا اذا لففنا (بدون ثنى أو كسر) مستوياً على هيئة سطح حيثما اتفق كان هذا السطح قابلا للاستواء .

وقد ذكرنا فيما تقدم (بند ٤٥) أن كل سطح مسطر فيه كل وضعين متتالين من أوضاع الراسم هما مستقيمان متقاطعان — يكون قابلا للاستواء ونبين الآن كيف يكون بسط مثل هذا السطح ممكناً وكذا بعض خواصه الاساسية .

بند ١٢٥ : ضلع الرجوع

لنفرض فى (شكل ١١٧) أن س ر ص منحن فراغى حيثما اتفق وأن لم$_{١}$ ، لم$_{٢}$ ، لم$_{٣}$ ، ... هى مماسات هذا المنحنى فى نقطه المتتالية ١ ، ٢ ، ٣ ، ... فالسطح المتولد عن هذه المماسات المتتالية هو سطح قابل للاستواء لان كل مماسين متتالين يتقاطعان حينئذ فى نقطة التماس على المنحنى الفراغى ويحصران بينهما لذلك عنصراً مستوياً مثل ا ا$_{١}$ ب$_{١}$ ب ، ب ب$_{١}$ حـ$_{١}$ حـ ، ... وكل عنصرين متجاورين من هذه العناصر يتقاطعان فى المماس المشترك بينهما للمنحنى س ر ص بحيث يمكن تطبيق أحدهما على الآخر حول هذا المماس . فاذا طبقنا فى الشكل العنصر المستوى ا ا$_{١}$ ب$_{١}$ ب على المستوى المجاور ب ب$_{١}$ حـ$_{١}$ حـ حول المماس ب ب$_{١}$ كمحور للانطباق ثم طبقنا المستوى الاخير على المستوى

حـ حـ١ ء١ ء حول حـ حـ١ وهكذا لأمكن فى النهاية بسط السطح كله على مستو واحد بدون كسر أو شد أو تمزق وبحيث تتوافر الشروط الآتية :ـــ



(شكل ١١٧)

أولا : الزوايا والمنحنيات الواقعة على السطح تبقى أطوالها وأبعادها محفوظة ولا تتغير ببسط السطح .

ثانيا : اذا كان ا١ ب١ حـ١ ... منحنيا حيا اتفق على السطح (حيث ا١ ، ب١ ، حـ١ ... هى نقط تقاطع هذا المنحنى مع الرواسم المتتالية ...)

وكانت φ_1 هى الزاوية المحصورة بين الراسم م$_1$ ومماس المنحنى فى ا$_1$ أى الزاوية ا ا$_1$ ب$_1$ وبالمثل φ_2 هى الزاوية المحصورة بين الراسم م$_2$ ومماس المنحنى فى ب$_1$ ... الخ فالزوايا φ_1 ؟ φ_2 ؟ φ_3 ؟ .. تبقى كذلك محفوظة ولا تتغير ببسط السطح .

ثالثاً : أما الزوايا المحصورة بين كل اثنين من المماسات المتجاوره لاى منحن مرسوم على السطح (غير المنحنى س ر ص نفســـه) أى الزوايا ا ب حـ ؟ ب حـ ء ؟ ا$_1$ ب$_1$ حـ$_1$ ؟ ... فانها تتغير ببسط السطح . ومعنى هذا أن نصف قطر الانحناء لاى منحن مرسوم على السطح (ماعدا المنحنى س ر ص) فى إحدى نقطه يختلف عن نصف قطر الانحناء لمآل هذا المنحنى فى النقطة المناظرة (والمقصود بمآل المنحنى ا ب حـ ... مثلا هو المنحنى اَ بَ حـَ ... الذى يؤول اليـه المنحنى الاصلى بعد بسط السطح على مستو ما) وسنبرهن فى (بند ١٢٨) على أن هناك علاقة تربط نصفى قطرى الانحناء فى هذه الحالة .

يؤخذ مما تقدم أن السطح الذى يتولد عن حركة المماس لمنحن فراغى[١] *حيثما اتفق يكون سطحا قابلا للاستواء .*

وبالعكس لما كان كل سطح مسطر قابل للاستواء لا بد أن يتكوّن من مثل العناصر المستوية المشار اليها آنفاً فان رواسم هذا السطح يجب أن تغلف منحنيا فراغياً يسمى *ضلع الرجوع* أو *حرف الرجوع* [٢] للسطح (المنحنى س ر ص هو ضلع الرجوع فى شكل ١١٧) . وهذا معناه أن الشرط اللازم والكافى لقابلية

---

(١) اذا كان المنحنى مستوياً فان السطح الناتج يكون نفس المستوى المرسوم فيه المنحنى.

(٢) سمى كذلك لان منحنى تقاطع السطح مع أى مستو يلاقى ضلع الرجوع فى نقطة مثل ر ــ يكون دائماً منحنياً فيه النقطة ر نقطة رجوع .

سطح مسطر للاستواء هو تقاطع الاوضاع المتتالية لراسمه مثنى مثنى فى نقط منحن فراغى (ضلع الرجوع) بحيث يمكن اعتبار السطح القابل للاستواء دائما انه سطح مماس لمنحن فراغى هو ضلع الرجوع لهذا السطح.

ويجب أن يلاحظ أنه ولو أن كل سطح قابل للاستواء له ضلع رجوع هو كما قدمنا غلاف الاوضاع المتتالية لراسم السطح إلا أنه ككل سطح آخر يمكن أن يتولد بعدة طرق غير الطريقة المذكورة آنفاً وهى تحرك المماس لمنحن فراغى. فمثلا لو اعتبرنا المنحنيين الفراغيين ا ب ح ء ... ، $ا_١ ب_١ ح ء_١$ ... كدليلين ثابتين للسطح (شكل ١١٧) وجعلنا النقطة ا رأس المخروط دليله المنحنى $ا_١ ب_١ ح_١$ ... وكان $م_١$ راسم تماس هذا المخروط مع المستوى المماس (للمخروط) الذى يمر بالمستقيم $ا ب$ (أى المماس للمنحنى ا ب ح ... فى ا) وكان أيضا $م_٢$ راسم تماس المخروط الذى رأسه ب ودليله $ا_١ ب_١ ح_١$ ... مع المستوى المماس الذى يمر بالمستقيم ب ا (أى المماس للمنحنى ا ب ح ... فى ب) فمن الواضح أن $م_١$ ، $م_٢$ لا بد أن يكونا مستقيمين متقاطعين ويكون السطح إذن الذى يتولد عن الرواسم $م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$ ، ... سطحا قابلا للاستواء.

بند ١٢٦ : السطح القابل للاستواء كغلاف مستو متحرك

يؤخذ من (شكل ١١٧) ان المستوى المماس للسطح فى إحدى نقطه يمسه بطول الراسم المار بالنقطة. وذلك لان المستوى المماس فى النقطة $ا_٢$ مثلا الواقعة على الراسم $م_١$ يتعين بهذا الراسم وبالمماس $ا_٢ ب_٢$ فى $ا_٢$ لمنحن حيثما اتفق مرسوم على السطح ومار بالنقطة $ا_٢$ ولكن لما كانت $ا_٢$ ، $ب_٢$ نقطتين متتاليتين من نقط المنحنى المذكور وجب أن يكون المستقيم $ا_٢ ب_٢$ (الذى هو لذلك نفس المماس فى $ا_٢$) واقعا بتمامه فى المستوى المار بالراسمين المتتاليين $م_١$ ، $م_٢$ فهذا المستوى هو إذن نفس المستوى المماس للسطح فى النقطة $ا_٢$ وكذا فى أية نقطة أخرى على الراسم $م_١$ أى أنه يمس السطح بطول الراسم $م_١$. ومن حيث إن $م_١$ ، $م_٢$ هما أيضا مماسان متتاليان لضلع الرجوع س ر ص ومتقاطعان

فى النقطة « ١ » لذلك كان المستوى المار بهما هو فى نفس الوقت المستوى الملاصق لضلع الرجوع فى النقطة « ١ » .

واذا رسمنا منحنيا م على سطح منحن حيثما اتفق مثل السطح س وعينا المستويات المماسة للسطح فى نقط متجاورة على المنحنى م فمن الواضح أنه اذا قطع أحد هذه المستويات المستويين السابق واللاحق له فى المستقيمين μ_1 ، μ_2 كان هذان المستقيمان متقاطعين . فاذا فرضنا أن نقط التماس على المنحنى م اقتربت قربا لانهائيا بعضها من بعض بحيث يمكن اعتبارها نقطا متتالية على المنحنى فانه يمكن اعتبار المستقيمات μ_1 ، μ_2 ، ... أوضاعا متتالية لراسم سطح جديد لابد أن يكون قابلا للاستواء ويقال عندئذ إن المستوى المماس يتزلق على المنحنى م بحيث يكون ماسا للسطح س فى جميع أوضاعه فيغلف بهذه الحركة سطحا قابلا للاستواء .

بند ١٢٧ : تلخيص

يؤخذ مما تقدم :

أولا — الشرط اللازم والكافى لقابلية سطح مسطر للاستواء هو تقاطع الاوضاع المتتالية لراسم السطح مثنى مثنى فى نقط منحن فراغى يسمى ضلع الرجوع للسطح . المخروط والاسطوانة هما حالتان خاصتان حيث تمر أوضاع الراسم جميعا بنقطة واحدة على بعد نهائى فى الحالة الاولى ولانهائى فى الحالة الثانية ويمكن اعتبار هذه النقطة نفسها ضلع الرجوع لكل من السطحين .

ثانيا — اذا بسطنا سطحا قابلا للاستواء فان أطوال الرواسم والمنحنيات على السطح لا تتغير بهذه العملية . وكذلك تبقى مقادير الزوايا المحصورة بين الرواسم وأى منحن على السطح فى نقط التقاطع ومقادير الزوايا المحصورة بين أى راسمين متتالين — محفوظة . وعندما يتم بسط السطح على مستو تؤول

الرواسم الى مماسات لمنحن مستو هو مآل ضلع الرجوع وبالنظر الى أن الزاوية المحصورة بين أى راسمين متتاليين لا تتغير بالبسط كما قدمنا أى أنها تساوى الزاوية المحصورة بين مآليهما (اللذين هما مماسان متتاليان لمآل ضلع الرجوع) فينتج من ذلك أن الانحناء الاول [١] لضلع الرجوع يبقى كذلك ثابتاً ولا يتغير ببسط السطح فنصف قطر الانحناء فى أية نقطة على مآل ضلع الرجوع يساوى نصف قطر الانحناء فى النقطة المناظرة على ضلع الرجوع نفسه .

ثالثا — أما أى منحن آخر على السطح غير ضلع الرجوع فانه يؤول بعد البسط الى منحن مستو (قد يكون خطاً مستقيماً) يكون انحناؤه فى أية نقطة من نقطه مغايراً للانحناء الاول للمنحنى الاصلى فى النقطة المناظرة .

رابعا — كل سطح قابل للاستواء له ضلع رجوع بحيث يمكن اعتباره (أى السطح) دائما سطحا مماسا لضلع الرجوع فرواسم السطح ومستوياته المماسة هى على التوالى مماسات ضلع الرجوع ومستوياته الملاصقة فى نقطه المختلفة .

خامسا — السطح القابل للاستواء هو — وكثيرا ما يعتبر هذا تعريفا له — غلاف مستو يتحرك بدرجة واحدة من درجات الاطلاق اى يتحرك بحيث يكون له وضع معين عند كل نقطة يمر بها من نقط الفراغ [٢]. مثال ذلك المستوى الملاصق لمنحن

---

(١) أما الانحناء الثاني الذى يرتبط بالزاوية الزوجية المحصورة بين المستويين الملاصقين فى نقطتين متتاليتين (بند ٣٧) فهذا يؤول دائماً الى الصفر .

(٢) يتحرك المستوى فى الفراغ بثلاث درجات من درجات الاطلاق . فلكى يتحدد وضع مستوما يجب أن « تقيد » حركته بثلاثة قيود (أو شروط) مختلفة كأن يتطلب منه أن يمر بثلاث نقط أو يمس ثلاث سطوح منحنية (غير قابلة للاستواء) أو يمر بنقطتين ويمس أحد هذه السطوح الى آخره . فاذا كانت حركة المستوى مقيدة بقيد واحد كأن يتطلب منه أن يمر بنقطة واحدة فى الفراغ أو أن يمس سطحاً واحداً (ويلاحظ أن هذا السطح يجب أن يكون غير قابل للاستواء لانه اذا اشترطنا أن يمس المستوى سطحاً قابلا للاستواء فلما كان التماس يتم فى هذه الحالة بطول مستقيم راسم كان معنى هذا الشرط كما يؤخذ من التعريف هو تقييد حركة المستوى بقيدين لا بقيد واحد)— فانه يتبقى له فى هذه الحالة درجتان من درجات الاطلاق يتحرك بهما . أما اذا تقيدت الحركة بقيدين فان المستوى يتحرك عندئذ بدرجة واحدة من درجات الاطلاق .

فراغى فى نقطه المختلفة وكذا المستوى المماس لمنحن فراغى بحيث يكون ذا ميل معلوم على مستو ثابت (أنظر مثلا شكل ١٤٧) وكذا المستوى العمودى على منحن فراغى (أى المرسوم من نقطه المختلفة عمودياً على مماساته فى هذه النقط) أو المستوى الذى يمس سطحاً منحنياً حيثما اتفق فى نقط منحن مرسوم على السطح وكذا المستوى المماس المشترك لسطحين منحنيين س١ ، س٢ (غير قابلين للاستواء) الى آخره . ففى كل حالة من الحالات السابقة يتحرك المستوى بدرجة واحدة من درجات الاطلاق ويغلف بهذه الحركة سطحا قابلا للاستواء ويطلق على السطح فى الحالة الاخيرة اسم *السطح القابل للاستواء المشترك للسطحين المنحنيين* س١ ، س٢ .

بند ١٢٨ : قانون كاتلان

اذا رمزنا الى نصف قطر الانحناء لمنحن مرسوم على سطح قابل للاستواء فى نقطة مثل ل بالرمز نو والى نصف قطر الانحناء لمآل هذا المنحنى بعد بسط السطح فى النقطة لَ بالرمز نوَ ورمزنا الى الزاوية الزوجية التى يصنعها المستوى الملاصق Σ للمنحنى مع المستوى المماس M للسطح فى النقطة ل بالرمز ω فان

$$\text{نوَ} = \frac{\text{نو}}{\text{جتا}\ \omega}$$

ولاثبات ذلك نفرض ثلاث نقط متجاورة مثل م ، ل ، ط على المنحنى ا ب حـ ى ... المرسوم على سطح قابل للاستواء (شكل ١١٧) ونفرض أن المستوى المماس M_1 للسطح عند النقطة ط والمجاور للمستوى المماس M عند النقطة ل — نفرض أن هذا المستوى M_1 قد دار حول الراسم u_1 الى أن انطبق على المستوى M فالنقطة ط تؤول بعد التطبيق الى نقطة مثل طَ يمكن اعتبارها (لصغر القوس ط طَ) بالتقريب المسقط العمودى للنقطة ط على

المستوى M . ويؤخذ من هذا أن نو ، نوَ هما نصفا قطرى الدائرتين اللتين تمر أولاهما بالنقط الثلاث المتجاورة م ، ل ، ط وتمر الثانية بالنقط م ، ل ، ط' . ولما كانت النقط الاخيرة هي المساقط العمودية للنقط م ، ل ، ط على المستوى M كان نو ، نوَ بناء على نظرية بلاڤيتس (بند ٣٩) مرتبطين بالعلاقة

$$\text{نوَ} = \text{نو} \times \frac{\text{جتا}^{3}\,\alpha}{\text{جتا}\,\omega}$$

حيث ω هى الزاوية المشار اليها آنفا (لان مستوى الاسقاط فى هذه الحالة هو نفس المستوى المماس M) وحيث α هى زاوية ميل المماس فى ل للمنحنى م ل ط ... على المستوى M ففى هذه الحالة α = صفراً وإذن جتا α = ١ فبالتعويض ينتج أن

$$\text{نوَ} = \frac{\text{نو}}{\text{جتا}\,\omega} \quad \text{وهو المطلوب}$$

وهذه هى العلاقة المعروفة باسم قانون كاتلان [١] .

فاذا كانت ω = صفر كان نوَ = نو وهذا لا يحدث الا فى نقط ضلع الرجوع . واذا كانت ω = ٩٠° فان نوَ = ∞ ومعنى ذلك أن النقطة المناظرة على مآل المنحنى بعد بسط السطح تكون فى هذه الحالة نقطة انقلاب على هذا المآل . فاذا كان هذا صحيحا لجميع نقط منحن مرسوم على سطح قابل للاستواء أى اذا كان المستوى الملاصق فى كل نقطة من هذه النقط عموديا على المستوى المماس للسطح فيها كان مآل هذا المنحنى خطاً مستقيما وسمى المنحنى كما قدمنا منحنيا معتدلا على السطح (مثل المنحنى اللولبى على سطح اسطوانة دورانية) .

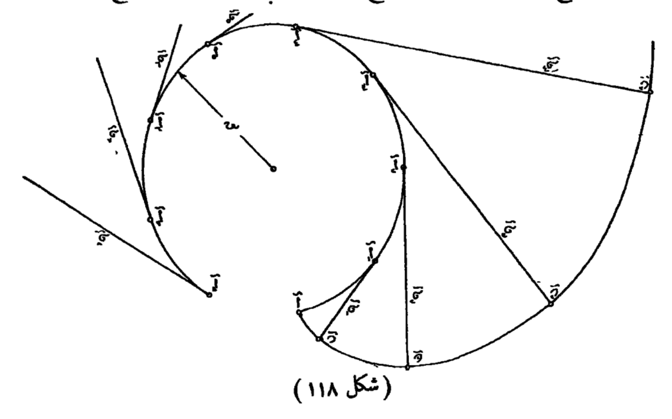
(١) Catalan

بند ١٢٩ : بسط السطوح القابلة للاستواء

لنفرض أن المطلوب بسط السطح اللولبي القابل للاستواء (بند ١١٣ شكل ١١٢) على مستوى الورقة فضلع الرجوع لهذا السطح وهو المنحنى اللولبي ا ا١ ا٢ ... يؤول بعد البسط الى دائرة نصف قطرها

$$\bar{\text{ى}} = \text{ى} = \frac{\text{ى}'}{\text{جتا}^2 \alpha}$$

(حيث ى' هو نصف قطر الاسطوانة المرسوم عليها ضلع الرجوع وحيث α = ظا$^{-1}$ $\frac{\text{خ}}{\text{٢ ط ى}'}$) وذلك لان انحناء ضلع الرجوع لا يتغير ببسط السطح كما قدمنا ولما كان هذا الضلع هو منحن لولبي ثابت الانحناء فى جميع نقطه



(شكل ١١٨)

حيث نصف قطر الانحناء فى أية نقطة من هذه النقط هو ى = $\frac{\text{ى}'}{\text{جتا}^2 \alpha}$ (بند ١١٢) فان ما ل ضلع الرجوع يكون منحنيا مستويا ثابت الانحناء كذلك

فى جميع نقطه أى دائرة نصف قطرها ىو . فاذا رسمنا هذه الدائرة فى (شكل ١١٨) وافترضنا عليها نقطة حيثما اتفق $\bar{ا}$ واعتبرناها ما ل النقطة ا فى (شكل ١١٢) فانه للحصول على المآل $\bar{ا}_١$ للنقطة $ا_١$ يجب أن يكون طول القوس $\bar{ا}\,\bar{ا}_١$ فى (شكل ١١٨) مساويا لطول جزء المنحنى اللولبى المحدد بالنقطتين ا ، $ا_١$ فى (شكل ١١٢) أى أن

$$\text{القوس } \bar{ا}\,\bar{ا}_١ = \frac{\text{القوس } ا'\,ا'_١}{\text{جتا } \alpha} = ه_١\,ھ'$$

حيث ه ھ' فى (شكل ١١٢) هو الطول الحقيقى للجزء المحصور بين النقطة $ا_١$ والمستوى Φ من المماس $\sigma_١$ للمنحنى اللولبى ويتبين صحة هذا بسهولة من المثلث ه $ا'_١$ ھ' الذى فيه $ا'_١$ ھ' = القوس ا' $ا'_١$.

وبالمثل يمكن تعيين المآلات $\bar{ا}_٢$ ، $\bar{ا}_٣$ ، ... ، $\bar{ا}_٨$ فى (شكل ١١٨) لنقط المنحنى اللولبى فى خطوة واحدة . ويلاحظ أن $\bar{ا}_٨$ لاتنطبق على $\bar{ا}$ لان محيط الدائرة فى (شكل ١١٨) هو ٢ ط ىو $= \frac{٢ \text{ ط } ىو'}{\text{جتا}^٢ \alpha}$ بينما طول القوس $\bar{ا}\,\bar{ا}_٨$ يجب أن يساوى فقط $\frac{\text{القوس } ا'\,ا'_٨}{\text{جتا } \alpha}$ أى يساوى $\frac{٢ \text{ ط } ىو'}{\text{جتا } \alpha}$ (راجع شكل ١١٢) .

والمماسات $\bar{\sigma}_١$ ، $\bar{\sigma}_٢$ ، $\bar{\sigma}_٣$ ، ... للدائرة فى النقط $\bar{ا}_١$ ، $\bar{ا}_٢$ ، $\bar{ا}_٣$ ، ... (شكل ١١٨) هى مآلات رواسم السطح : $\sigma_١$ ، $\sigma_٢$ ، $\sigma_٣$ ، ... (شكل ١١٢) . فاذا أريد رسم المآل $\bar{ا}$ $\bar{ھ}_١$ $\bar{ھ}_٢$ ... للمنحنى ا ھ $ھ_١$ $ھ_٢$ ... الذى هو المقطع العمودى للسطح بالمستوى Φ فى (شكل ١١٢) وجب أن يكون الطول

$\bar{ا}_١ \bar{ه}_١$ فى (شكل ١١٨) مساويا للطول الحقيقى للجزء المحصور بين النقطة $ا_١$ والمستوى Φ من الراسم $\sigma_١$ أى أن

$$\text{البعد } \bar{ا}_١ \bar{ه} = هـ ه' = \text{القوس } \bar{ا} \bar{ا}_١$$

وبالمثل البعد $\bar{ا}_٢ \bar{ه}_١ =$ القوس $\bar{ا} \bar{ا}_٢$ وهكذا

وينتج من هذا أن المال ل $\bar{ا} \bar{ه} \bar{ه}_١ \bar{ه}_٢$ ... هو باسط الدائرة المار بالنقطة $\bar{ا}$.

الفصل الثالث

السطوح المعوجة على وجه العموم

بند ١٣٠ : نظرية شالز

قدمنا فى (بند ١٢٣) أن السطوح المعوجة هى سطوح مسطرة فيها أى وضعين متتاليين للراسم هما مستقيمان غير متقاطعين بحيث يستحيل تسوية مثل هذا السطح على مستو . أو بعبارة أخرى يسمى سطحاً معوجاً أو أعوجاً كل سطح مسطر غير قابل للاستواء .

ولقد بينا أيضاً أنه اذا تحركت نقطة على راسم سطح معوج فالمستوى المماس له فيها يدور حول الراسم ويمكن وضـــع العلاقة التى تربط حركة النقطة على الراسم بدوران المستوى المماس حوله وهى العلاقة المعروفة باسم نظرية شالز [1] على الصورة الآتية :—

$$(\ldots \Delta \; \Gamma \; B \; A) = (\ldots ا \; ب \; ح \; ء \ldots)$$

أى أن العلاقة بين صف النقط على راسم سطح معوج وبين حزمة المستويات المماسة له فى هذه النقط والمارة جميعاً بهذا الراسم هى علاقة ائتلافية إسقاطية أو بعبارة أخرى :

النسبة المضاعفة لأى أربع نقط ا ، ب ، ح ، ء على راسم سطح معوج تساوى النسبة المضاعفة لحزمة المستويات A ، B ، Γ ، Δ المماسة للسطح فى تلك النقط .

البرهان : لنفرض فى (شكل ١١٦) أن λ_1 ، λ_2 ، λ_3 أدلة ثلاثة لسطح معوج وأن ى منحن حيثما اتفق مرسوم على السطح ونفرض أيضاً أن الراسم μ

(١) Chasles (١٨٣٩) .

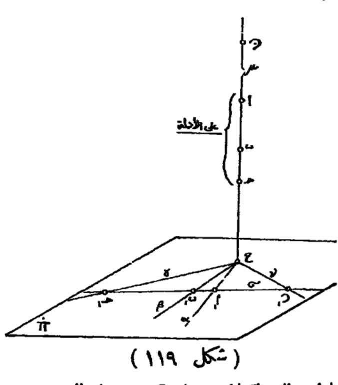
يقطع المنحنيات الاربعة λ_1 ، λ_2 ، λ_3 ، δ فى النقط ا ، ب ، حـ ، ء على التوالى . فاذا كان μ_1 وضعاً مجاوراً للراسم يلاقى المنحنيات الاربعة السالفة الذكر فى النقط ا$_1$ ، ب$_1$ ، حـ$_1$ ، ء$_1$ فان المستوى (μ_1 ا) — الذى يحتوى المستقيم القاطع اا$_1$ — يؤول الى المستوى المماس A للسطح فى النقطة ا عند ما يقترب μ_1 قرباً لا نهائياً من μ (وتقترب بالتالى النقطة ا$_1$ عن طريق λ_1 من النقطة ا) . وفى هــــذه الحالة تؤول بالمثل المستويات (μ_1 ب) ، (μ_1 حـ) ، (μ_1 ء) الى المستويات المماسة B ، Γ ، Δ فى النقط ب ، حـ ، ء . ولما كانت النسبة المضاعفة للمستويات الاربعة (μ_1 ا) ، (μ_1 ب) ، (μ_1 حـ) ، (μ_1 ء) تساوى على الدوام النسبة المضاعفة للنقط الاربع ا ، ب ، حـ ، ء أياكان الوضع الذى يتخذه μ_1 على السطح (بند ٥٣ ن) فانه ينتج فى حالة الوضع النهائى أن :

$$(\mathrm{A\ B\ \Gamma\ \Delta}) = (\text{ا ب حـ ء})$$ وهو المطلوب .

ويسمى المستوى المماس للسطح فى نقطة فى اللانهاية على راسم ما مستوياً تقربياً كما قدمنا . وجميع المستويات التقربية تكون متوازية وموازية لمستوى التوجيه اذا كان للسطح مستوى توجيه كما هو الحال فى السطح اللولبى العمودى . أما اذا لم يكن للسطح مستوى توجيه وأريد تعيين المستوى التقربى K للسطح فى النقطة التى فى اللانهاية على راسم ما مثل μ فاننا نعين أولا الراسم ϱ لمخروط التوجيه للسطح (بند ١٢٢) الموازى الى μ فيكون K موازياً حينئذ للمستوى المماس للمخروط بطول ϱ .

ولاستخدام نظرية شالز فى تعيين المستوى المماس N لسطح معوج فى نقطة مثل ه على الراسم μ (شكل ١١٩) نعين أولا المستويات المماسة A ، B ، Γ للسطح فى ثلاث نقط على الراسم مثل ا ، ب ، حـ (ولتكن للسهولة نقط

تقاطع الراسم μ مع الادلة الثلاثة المعلومة للسطح) ثم نختار مستوياً ما مثل Π يقطع A ، B ، Γ فى المستقيمات α ، β ، γ التى يجب أن تمر جميعاً بالنقطة ع التى هى نقطة تقابل الراسم μ مع Π . فاذا افترضنا فى المستوى Π مستقيما حيثما اتفق σ يلاقى حزمة المستقيمات α β γ فى النقط ا$_1$ ، ب$_1$ ، حـ$_1$ فان العلاقة الائتلافية بين صفى النقط على الحاملين μ ، σ تتحدد حينئذ بمعلومية الازواج الثلاثة ا ، ا$_1$ ، ب ، ب$_1$ ، حـ ، حـ$_1$ من النقط المتناظرة . فاذا كانت



(شكل ١١٩)

ه$_1$ هى النقطة على الصف σ المناظرة للنقطة المعلومة ه على الصف μ بحيث تجعل (ا$_1$ ب$_1$ حـ$_1$ ه$_1$) = (ا ب حـ ه)[1] ورمزنا الى المستقيم ع ه$_1$ بالرمز ν فان المستوى المماس N يكون هو المستوى المار بالراسم μ وبالمستقيم ν .

وبالعكس يمكن بالطريقه السابقة تعيين نقطة تماس السطح مع أى مستو مار بالراسم μ مثل المستوى N لانه اذا كان ν هو خط تقاطع N مع المستوى

(١) أنظر لذلك (بند ٨٣) مع ملاحظة أنه يمكن إسقاط صفى النقط سالفى الذكر على مستو جديد أو على المستوى Π نفسه فنحصل بذلك على صفين مؤتلفين مرسومين فى هذا المستوى وفى هذه الحالة يستحسن للسهولة أن يكون اختيار المستقيم σ بحيث يجعل الصفين الاخيرين فى المستوى منظورين (فوق كونهما مؤتلفين) إن أمكن (أنظر بند ١٣٢) .

وقابل σ المستقيمات α ، β ، γ ، ν فى النقط ١$_١$ ، ب$_١$ ، حـ$_١$ ، ء$_١$ Π
فان النقطة ء (على الصف μ) التى تجعل (١ ب حـ ء) = (١$_١$ ب$_١$ حـ$_١$ ء$_١$)
تكون نقطة التماس المطلوبة .

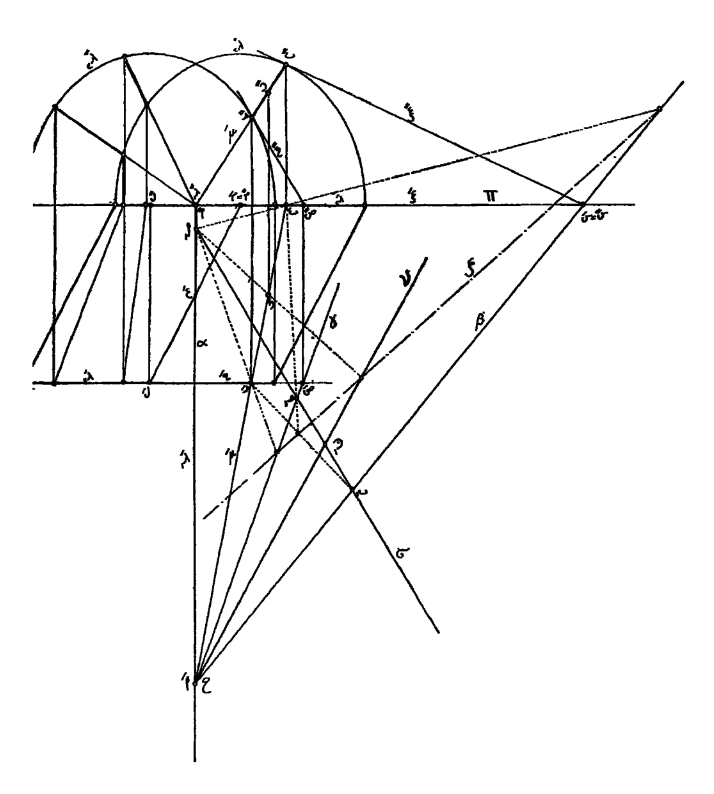
بند ١٣١ : مثال

يمثل (شكل ١٢٠) سطحاً معوجاً أدلته هى λ$_١$ ، λ$_٢$ ، λ$_٣$ حيث λ$_١$
هو مستقيم عمودى على المستوى الرأسى وحيث λ$_٢$ ، λ$_٣$ نصفا دائرتين
يقع كل منهما فى مستو مواز للمستوى الرأسى ويلاحظ أن المستقيم م ل الذى
يصل مركزى الدائرتين واقع فى المستوى الافقى Π الذى يمر بالمستقيم λ$_١$ وأن
المستقيمين يتلاقيان فى نقطة ع هى منتصف البعد م ل .

فللحصول على راسم ما مثل μ نمر بالدليل λ$_١$ مستوياً ونفرض أن هذا المستوى
يقطع λ$_٢$ ، λ$_٣$ فى النقطتين ب ، حـ على التوالى فيكون بذلك μ هو المستقيم
الذى يصل ب ، حـ ويلاقى λ$_١$ فى النقطة ١ . فاذا كانت ء إحدى نقط الراسم μ
وأريد تعيين المستوى المماس N للسطح فيها فانه يمكن تلخيص خطوات العمل
باختصار كما يلى :

اولا — نعين المستويات المماسة A ، B ، Γ للسطح فى النقط ١ ، ب ، حـ
فالمستوى A يتعين بالراسم μ وبالدليل λ$_١$ نفسه والمستوى B يتعين بالراسم
μ وبالمماس ξ للدليل λ$_٢$ فى ب والمستوى Γ يتعين بالراسم μ وبالمماس η
للدليل λ$_٣$ فى حـ .

ثانياً — نختار المستوى الافقى Π (المار بالدليل λ$_١$) ليقطع المستويات
السابقة فى المستقيمات α ، β ، γ التى تكون حزمة رأسها ع (حيث ع ≡ ١'
هى نقطة تقاطع μ مع Π) .



(شكل ١٢٠)

ثالثاً — نرسم فى المستوى Π مستقيماً حيثما اتفق σ يقطع حزمة المستقيمات السالفة الذكر فى النقط ا١ ، ب١ ، حـ١ على التوالى .

رابعاً — وبذا يكون المستقيمان μ ، σ حاملين لصفين مؤتلفين من النقط فى المستوى Π وقد تحددت العلاقة الائتلافية بينها بالازواج الثلاثة ا′ ، ا١ ، ب′ ، ب١ ، حـ′ ، حـ١ من النقط المتناظرة . ثم نجد كما بينا فى (بند٨٣) النقطة ى١ على الحامل σ المناظرة الى ى′ على الحامل μ' (حيث ى′ هى المسقط الافقى للنقطة المعلومة ى) بحيث يكون (ا١ ب١ حـ١ ى١) = (ا′ ب′ حـ′ ى′) (١) ونصل ع ى١ فيكون هو خط التقاطع ν للمستوى N مع Π وبذلك يتعين المستوى المطلوب N .

بند ١٣٢ : مثال آخر

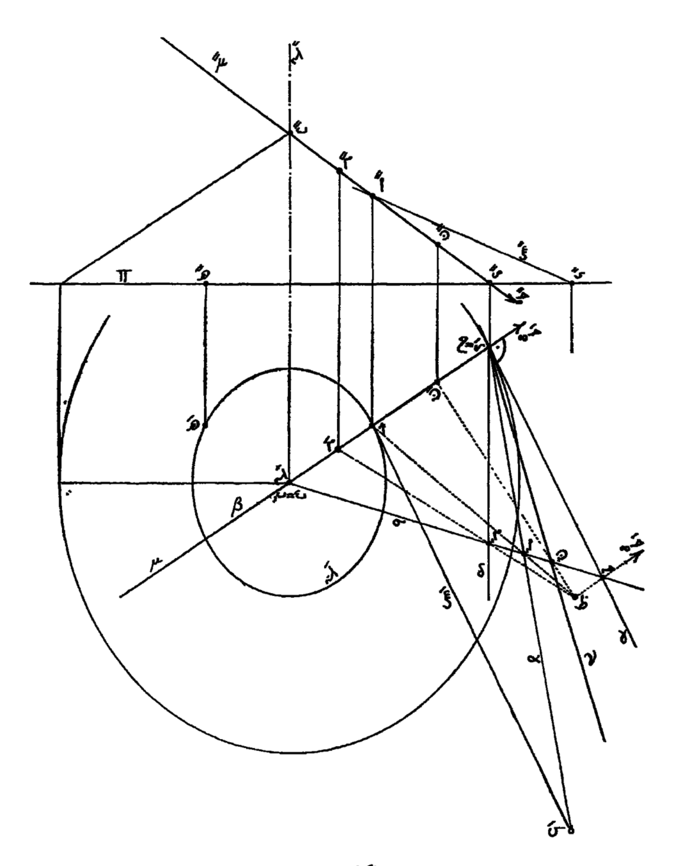
اذا علم سطح لولبى محورى مائل (شكل ١٢١) بالمحور λ_2 والراسم μ و بالمنحنى اللولبى λ_1 لاحدى نقط الراسم (وقد افترضنا هذا المنحنى معلوما بالنقطتين ا ، هـ الواقعتين عليه واستغنينا بذلك عن رسمه) وعلمت أيضا النقطة ى على الراسم μ فالمطلوب :

اولا — تعيين المستوى المماس N للسطح فى النقطة ى

ثانياً — تعيين النقطة م (الواقعة على μ) من نقط المحيط الحقيقى للسطح بالنسبة للمستوى الرأسى .

---

(١) فنرسم لذلك محور المنظورية ع الذى يصل نقطة تقاطع المستقيمين ا١ ب′ ، ا′ ب١ بنقطة تقاطع المستقيمين ا١ حـ′ ، ا′ حـ١ فالمستقيمان ا١ ى′ ، ا′ ى١ يجب أن يتلاقيا كذلك على المحور ع وبذا تتعين ى١ .



(شكل ١٢١)

الادلة الثلاثة لهذا السطح هى (بند ١٢٢) :

(١) المنحنى اللولبى λ_1

(٢) المحور λ_2

(٣) منحنى تقاطع مخروط التوجيه مع المستوى الذى فى اللانهاية للفضاء وسنرمز الى هذا المنحنى بالرمز λ_3 .

فاذا كانت نقط تقاطع الراسم μ مع هذا الادلة هى على التوالى ا ، ب ، حـ$_\infty$ (حيث حـ$_\infty$ هى النقطة التى فى اللانهاية على الراسم) فان المستوى المماس A للسطح فى النقطة ا يتعين بهذا الراسم وبالمماس ع للمنحنى اللولبى λ_1 فى ا ويتعين المستوى المماس B فى النقطة ب بالراسم μ وبالمحور λ_2 نفسه. أما المستوى المماس Γ فى النقطة حـ$_\infty$ فهو مستو تقربى ويوازى كما قدمنا فى (بند ١٣٠) المستوى المماس لمخروط التوجيه بطول الراسم (راسم المخروط) الموازى الى راسم السطح μ فاذا اخترنا النقطة ب نفسها رأساً لمخروط التوجيه كان المستوى Γ هو المستوى المماس للمخروط بطول الراسم المعلوم μ (الذى يمكن اعتباره فى هذه الحالة راسماً للمخروط كما هو راسم السطح) .

ولنفرض الآن أن المستوى الافقى Π المار بالنقطة هـ يقطع المستويات المماسة A ، B ، Γ فى المستقيمات α ، β ، γ [1] التى تمر جميعاً بنقطة تقاطع μ مع Π فتكون هذه النقطة لذلك هى الرأس ع للحزمة التى تكونها تلك المستقيمات أى أن ع $\equiv$ م' . فاذا كان σ مستقيما حيثما اتفق يمر بالنقطة ب'

(١) يلاحظ أن النقطة س' على ع' تتعين بجعل ا' س' مساوياً لطول القوس ا' هـ' وبذلك يتعين α . كما يلاحظ أن المستوى Π يقطع مخروط التوجيه فى دائرة مركزها ب' ونصف قطرها ب' م' فيكون γ هو مماس هذه الدائرة فى م' .

فانه يقطع الحزمة فى النقط $ا_١$ ، $ب_١$ ، $حـ_١$ التى تكوّن صفاً مؤتلفاً مع صف النقط $ا'$ ، $ب'$ ، $حـ'_\infty$ الواقعة على الحامل μ' ولما كانت نقطة تقاطع الحاملين μ' ، σ مناظرة لنفسها (حيث $ب' \equiv ب_١$) لذا كان الصفان منظورين (فوق كونهما مؤتلفين) بحيث تمر المستقيمات التى تصل أزواج النقط المتناظرة على الصفين بنقطة واحدة هى مركز المنظورية ظ (نقطة تقاطع المستقيمين $ا_١ا'$ ، $حـ_١حـ'_\infty$).

فاذا كانت $ﻫ'$ المسقط الافقى للنقطة المعلومة $ﻫ$ المطلوب تعيين المستوى المماس للسطح فيها ووصل ظ $ﻫ'$ ليقطع σ فى $ﻫ_١$ (المناظرة الى $ﻫ'$) كان المستقيم ع $ﻫ_١$ هو خط التقاطع ν للمستوى N مع Π وبذا يكون $\bar{N}$ هو المستوى المار بالمستقيمين μ ، ν وهذا هو المطلوب أولا.

ولايجاد المطلوب ثانياً نمر بالراسم μ المستوى M المسقط له رأسياً (أى المستوى العمودى على المستوى الرأسى) فهذا المستوى يمس السطح فى نقطة المحيط الحقيقى (بالنسبة للمستوى الرأسى) الواقعة على الراسم μ. فاذا فرضنا أن M يتقاطع مع Π فى المستقيم δ (حيث δ هو خط التناظر نفسه المرسوم من النقطة ع) وتقاطع δ ، σ فى $م_١$ فان النقطة المطلوبة م يجب تعيينها على الراسم μ بحيث يكون (ا ب $حـ_\infty$ م) = ($ا_١$ $ب_١$ $حـ_١$ $م_١$) ويكون مسقطها الافقى $م'$ على الحامل μ' هو النقطة التى تجعل ($ا'$ $ب'$ $حـ'_\infty$ $م'$) = ($ا_١$ $ب_١$ $حـ_١$ $م_١$) ولما كان الصفان $ا'$ $ب'$ $حـ'_\infty$ ... ، $ا_١$ $ب_١$ $حـ_١$ ... منظورين فان $م'$ تكون نقطة تقاطع المستقيم ظ $م_١$ مع μ' وهكذا تتعين النقطة المطلوبة م بمسقطها الافقى $م'$ ومسقطها الرأسى $م''$ الذى هو نقطة تماس μ'' مع المحيط الظاهرى للسطح على المستوى الرأسى.

بند ١٣٣ : كيفية رسم الظلال للسطوح المعوجة

لايجاد خط الظل لسطح معوج نمر برواسم السطح مستويات موازية لاتجاه الاضاءة (أو مارة بالنقطة المضيئة فى حالة الاضاءة المركزية) ثم نعين نقط تماس هذه المستويات مع السطح كما بينا فى المثال السابق فيكون خط الظل هو المحل الهندسى لهذه النقط .

ويلاحظ أنه بينما يكون خط الظل فى حالة السطوح المعوجة منحنياً على وجه العموم فهو فى حالة السطوح القابلة للاستواء يتكوّن من رواسم السطح التى يكون المستوى المماس له بطول كل منها موازياً لاتجاه الاضاءة (أو ماراً بالنقطة المضيئة) . ويقال مثل هذا أيضاً عن الظل الساقط فى حالتى السطوح المعوجة والقابلة للاستواء [١] .

(١) كذلك المحيطات الحقيقية والظاهرية : فالمحيط الظاهرى (بالنسبة للمستوى الرأسى) للسطح المعوج المبين فى (شكل ١١٤) يتكوّن من المنحنيات التى أشرنا اليها فى (بند ١٢٠) بينما هو فى حالة السطح اللولبى القابل للاستواء مثلا (شكل ١١٢) يتكون من جملة المستقيمات σ٢" م ، σ٦" م ، σ١٠" م ... وهى مساقط رواسم السطح التى يكون المستوى المماس له بطول كل منها عمودياً على المستوى الرأسى كذلك المحيط الظاهرى لسطح مخروطى أو أسطوانى (من الرتبة الثانية) بالنسبة الى مستو ما يكون عبارة عن مستقيمين متقاطعين أو متوازيين على التوالى .

الفصل الرابع

السطوح المسطرة من الدرجة الثانية

بند ١٣٤ : السطح الزائدى العام ذو الطية الواحدة

هذا السطح يمكن الحصول عليه كسطح مؤتلف ائتلافاً متوازياً فى الفراغ مع السطح الزائدى الدورانى ذى الطية (بند ١٠٥) . ويعرف الائتلاف المتوازى فى الفراغ كما يلى :—

يقال لاى مجموعتين فراغيتين إنهما **مؤتلفتان ائتلافاً متوازياً** اذا تناظرت نقطهما ومستقيماتهما بحيث تقع النقط المتناظرة على مستقيمات متوازية وموازية لاتجاه ثابت يعرف **باتجاه الائتلاف** وبحيث تتلاقى المستقيمات المتناظرة فى مستو ثابت يسمى **بمستوى الائتلاف المتوازى** . ويؤخذ هذا التعريف أن كل مستو فى إحدى المجموعتين يناظره فى المجموعة الاخرى مستو أيضاً وأن المستويين المتناظرين يتقاطعان فى مستقيم واقع فى مستوى الائتلاف .

فاذا اختير أحد مستويات الزوال فى السطح الزائدى الدورانى مستوياً للائتلاف واختير اتجاه الائتلاف عمودياً على هذا المستوى فان دوائر العرض فى (شكل ١١١) تؤول الى **قطاعات ناقصة** . وعلى الخصوص تؤول دائرة الحلق فى السطح الدورانى الى **قطع ناقص حلقى** [1] فى السطح الزائدى العام .

وينتج عن هذا الائتلاف بقاء بعض الخواص الهندسية محفوظة من السطحين :

---

(١) فاذا تحرك هذا القطع الناقص موازياً لنفسه ومتكئاً على خطى الزوال المارين بمحوريه الاكبر والاصغر باعتبارهما منحنيين (قطعين زائدين) ثابتين فانه يولد بذلك السطح الزائدى العام .

فالسطح الزائدى العام يمكن اعتباره — كالسطح الدورانى — متولداً عن مستقيم راسم يتحرك متكئاً دواماً على ثلاثة مستقيمات غير متقاطعة (أدلة) . كذلك توجد على السطح مجموعتان مختلفتان من الرواسم ويلاحظ أن جميع الرواسم فى مجموعة واحدة هى مستقيمات غير متقاطعة فى حين أن أى راسم فى إحدى المجموعتين يقابل جميع رواسم المجموعة الاخرى وهكذا ينمحى الفرق بين الرواسم والادلة .

والسطح الزائدى العام هو مثل السطح الدورانى سطح معوج من الدرجة (والرتبة) الثانية [١] .

ويتعين المستوى المماس للسطح فى أية نقطة عليه بالراسمين المارين بها والمستوى المار بأى راسمين متوازيين (من مجموعتين مختلفتين) يمس السطح فى نقطة على بعد لا نهائى ويكون بذلك مستوياً تقريباً فاذا تقاطعت ثلاثة من هذه المستويات فى نقطة كانت هذه النقطة مركز السطح .

واذا علمت ثلاثة مستقيمات غير متقاطعة λ_1 ، λ_2 ، λ_3 واعتبرت أدلة لسطح زائدى عام فهناك طريقتان لتعيين رواسم السطح :

الطريقة الاولى : نختار عدة نقط مثل ا ، ب ، حـ ، ء ، ... على أحد الادلة وليكن λ_1 فالمستوى A_2 المـار بالنقطة ا وبالدليل λ_2 يتقاطع حينئذ مع المستوى A_3 المار بالنقطة ا نفسها وبالدليل λ_3 فى مستقيم ها يمكن اعتباره راسماً للسطح وبالمثل اذا رمزنا الى المستويات المارة بالنقط ب ، حـ ، ء ، ...

---

(١) الواقع أن أى مستقيم فى الفراغ لا يمكن أن يقطع مثل هذا السطح فى اكثر من نقطتين لانه لو فرض أن مستقيما قابل السطح فى ثلاث نقط ورسم من هذه النقط ثلاثة مستقيمات (غير متقاطعة) على السطح فان المستقيم المعلوم المتكىء على هذه المستقيمات الثلاثة باعتبارها أدلة لابد أن يقع بتمامه على السطح .

وبالدليل λ_2 بالرموز B_2 ، Γ_2 ، Δ_2 ،... والى المستويات المارة بنفس النقط وبالدليل λ_3 بالرموز B_3 ، Γ_3 ، Δ_3 ،... على التوالى — فان خطوط تقاطع أزواج المستويات B_2 ، B_3 ؛ Γ_2 ، Γ_3 ؛ Δ_2 ، Δ_3 ؛ ... تكون رواسم جديدة للسطح .

ولما كانت حزمة المستويات المارة بالمستقيم الحامل λ_2 مؤتلفة مع حزمة المستويات المارة بالحامل λ_3 لان

$$(A_3\ B_3\ \Gamma_3\ \Delta_3) = (\text{ا ب حـ ى}) = (A_2\ B_2\ \Gamma_2\ \Delta_2)$$

ولما كان الحاملان λ_2 ، λ_3 يمكن اعتبارهما أى مستقيمين غير متقاطعين مرسومين على السطح وكانت خطوط تقاطع أزواج المستويات المتناظرة هى كما قدمنا رواسم للسطح لذلك يمكننا القول بأن :

خطوط تقاطع أزواج المستويات المتناظرة فى حزمتين مؤتلفتين من المستويات حاملاهما مستقيمان غير متقاطعين هى رواسم لسطح زائدى عام ذى طية واحدة [1] .

ويؤخذ مما تقدم أن أى مستو Σ يقطع السطح الزائدى فى مقطع مخروطى لاننا اذا اخترنا أى راسمين من مجموعة واحدة حاملين لحزمتى المستويات اللتين يمران بهما وبرواسم المجموعة الاخرى فان Σ يقطع هاتين الحزمتين فى حزمتين مؤتلفتين من المستقيمات وتكون نقط تقاطع أزواج الاشعة المتناظرة فى هاتين الحزمتين نقطاً على منحنى تقاطع السطح مع المستوى Σ ويجب لذلك أن يكون هذا المنحنى مقطعاً مخروطياً .

__الطريقة الثانية__ : نمر باحد الادلة الثلاثة المعلومة وليكن λ_1 عدة مستويات A ، B ، Γ ، Δ ، . . . فتتقاطع هذه المستويات مع λ_2 فى النقط

---

(١) اذا تقاطع الحاملان لحزمتين مؤتلفتين من المستويات نشأ سطح مخروطى من الدرجة الثانية .

ا$_2$ ، ب$_2$ ، جـ$_2$ ، ء$_2$ ، ... وتتقاطع مع λ_3 فى النقط ا$_3$ ، ب$_3$ ، حـ$_3$ ، ء$_3$ ، ...
وبذلك تكون المستقيمات ا$_2$ ا$_3$ ، ب$_2$ ب$_3$ ، حـ$_2$ حـ$_3$ ، . . . التى تصل أزواج هذه النقط المتناظرة رواسم للسطح الزائدى . وبما أن

(ا$_2$ ب$_2$ حـ$_2$ ء$_2$) = $(A \; B \; \Gamma \; \Delta)$ = (ا$_3$ ب$_3$ حـ$_3$ ء$_3$)

فينتج من ذلك أن صفى النقط على λ_2 ، λ_3 مؤتلفان .

ولما كان من الممكن اعتبار λ_2 ، λ_3 أى راسمين من مجموعة واحدة على السطح فانه يتضح مما تقدم أن نقط تقاطعهما مع رواسم السطح من المجموعة الاخرى تكون عليهما صفين مؤتلفين من النقط . كما يتضح أيضاً أن :

المستقيمات التى تصل أزواج النقط المتناظرة من صفين مؤتلفين حاملاهما مستقيمان غير متقاطعين هى رواسم لسطح زائدى عام ذى طية واحدة[1] .

فاذا كان λ'_2 ، λ'_3 مسقطى المستقيمين غير المتقاطعين λ_2 ، λ_3 على مستو ما مثل Π فان λ'_2 ، λ'_3 يكونان فى هذه الحالة حاملين لصفين مؤتلفين من النقط فى المستوى Π والمستقيمات التى تصل أزواج النقط المتناظرة فى هذين الصفين تغلف لذلك مقطعاً مخروطياً يكون هو المحيط الظاهرى للسطح على المستوى Π .

بند ١٣٥ : السطح المكافئ الزائدى

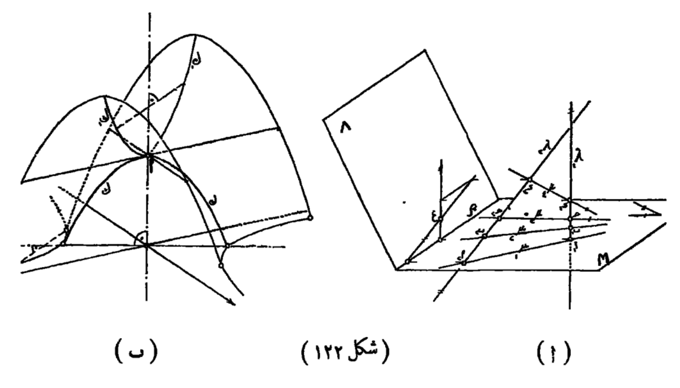
هذا السطح حالة خاصة من السطح الزائدى العام ذى الطية ويتولد عن مستقيم يتحرك متكئاً على مستقيمات ثلاثة (أدلة) أحدها مستقيم فى اللانهاية أو بعبارة أخرى يتولد عن مستقيم راسم μ يتحرك متكئا على مستقيمين غير

(١) اذا تقاطع الحاملان أى أمكن أن يمر بهما مستو واحد نشأ مقطع مخروطى .

متقاطعين λ_1 ، λ_2 بحيث يكون فى جميع أوضاعه موازيا لمستو ثابت M يسمى مستوى التوجيه أو المستوى الدليل (شكل ١٢٢ ا) .

ونلخص فيما يلى بعض النظريات الهامة المتعلقة بهذا السطح :

(١) توجد على السطح مجموعتان مختلفتان من الرواسم نرمزلهما بالرمزين μ ، λ . ويلاحظ هنا أيضا أن أى راسمين من مجموعة واحدة مثل μ_1 ، μ_2



(ب) (شكل ١٢٢) (ا)

(شكل ١٢٢ ا) لايمكن أن يتقاطعا (وإلا كان الدليلان λ_1 ، λ_2 واقعين فى مستو واحد) فى حين أن أى راسم من إحدى المجموعتين يقطع جميع رواسم المجموعة الاخرى .

(٢) جميع نقط هذا السطح نقط زائدية [1] ويمر بكل نقطة من هذه النقط راسمان (من مجموعتين مختلفتين) يعينان المستوى المماس للسطح فيها .

---

(١) ولهذا السبب سمى بالسطح المكافئ الزائدى تمييزاً له من السطح المكافئ الناقصى (بند ١٣٧) الذى جميع نقطه ناقصية .

(٣) أى مستو مار براسم معين من إحدى المجموعتين يقطع السطح فى راسم آخر من المجموعة الأخرى وتكون نقطة تقاطع الراسمين هى نقطة تماس المستوى مع السطح .

(٤) ينتج من النظرية السابقة أن المستوى الذى فى اللانهاية باعتباره مستويا مارا بالراسم الذى فى اللانهاية فى مستوى التوجيه M — لابد أن يقطع السطح فى راسم آخر فى اللانهاية من المجموعة μ . ومعنى هذا أن للسطح المكافئ الزائدى مستوى توجيه أحدهما المستوى المعلوم M وتوازيه رواسم المجموعة μ والآخر مستو Λ توازيه رواسم المجموعة λ ويمكن الحصول عليه برسم مستقيمين موازيين الى λ_1 ، λ_2 من أية نقطة فى الفراغ مثل ع (شكل ١٢٢ أ) .

(٥) أى مستقيم فى الفراغ لا يمكن أن يقابل السطح فى أكثر من نقطتين والا كان واقعا بتمامه على السطح أى أن السطح المكافئ الزائدى هو سطح من الدرجة الثانية .

(٦) اذا مر مستو بأحد الرواسم ووازى مستوى التوجيه الذى يوازيه هذا الراسم فانه لا يقطع السطح الا فى هذا الراسم (ويكون الراسم الآخر هو المستقيم الذى فى اللانهاية فى مستوى التوجيه) ويعتبر مثل هذا المستوى مستويا مماسا للسطح فى نقطة فى اللانهاية أى مستويا تقريبياً .

(٧) اذا علم مستو Σ (غير مواز لخط تقاطع مستويى التوجيه) فانه يمكن دائماً ايجاد راسمين اثنين كل فى مجموعة يكونان موازيين للمستوى Σ (اذا تقاطع Σ مع أحد مستويى التوجيه M فى مستقيم مثل a كان راسم المجموعة μ الموازى الى Σ هو المستقيم المرسوم موازياً الى a ليقابل مستقيمين غير متقاطعين λ_1 ، λ_2 هما راسمان حيثما اتفق من المجموعة λ . ويقال مثل هذا عن كيفية الحصول على الراسم الثانى من المجموعة λ الموازى للمستوى المعلوم Σ)

وتكون نقطة تقاطع الراسمين هى نقطة تماس المستوى المماس للسطح الموازى الى المستوى Σ (١) .

(٨) فاذا كان المستوى Σ السالف الذكر عمودياً على المستقيم ϱ فى (شكل ١٢٢ ا) الذى هو خط تقاطع مستوى التوجيه M ، Λ كانت نقطة تماس المستوى المماس الموازى الى Σ فى هذه الحالة هى *الرأس* ا للسطح ويكون المستقيم المرسوم من ا موازياً الى ϱ هو *محور السطح* . ونترك للقارىء إثبات ذلك (٢) مع ملاحظة أن المستوى الذى فى اللانهاية للفضاء هو نفسه مستو مماس للسطح نقطة تماسه هى النقطة التى فى اللانهاية على المستقيم ϱ لان هذا المستوى يمر براسمين للسطح هما المستقيمان اللذان فى اللانهاية فى المستويين M ، Λ .

(٩) منحنى تقاطع السطح مع أى مستو لا يمر بالمحور ولا يوازيه هو قطع زائد لانه يمكن ايجاد راسمين فى هذه الحالة (كل فى مجموعة) يوازيان المستوى القاطع وبذا يكون المقطع منحنياً من الدرجة الثانية له نقطتان فى اللانهاية أى قطعاً زائداً .

(١٠) أما اذا مر المستوى القاطع بالمحور أو كان موازياً له (وموازياً بالتالى الى المستقيم ϱ) فانه يقطع السطح حينئذ فى قطع مكافىء إذ لا يكون لمنحنى

---

(١) يلاحظ أن المستوى المماس فى هذه الحالة هو مستو مار بمستقيم المستوى Σ الذى فى اللانهاية فهو لذلك أحد المستويين المماسين اللذين يمكن رسمهما للسطح (باعتباره من الرتبة الثانية) مارين بهذا المستقيم أما المستوى المماس الثانى فهو نفس المستوى الذى فى اللانهاية للفضاء .

(٢) راجع لذلك بعض ما ذكرناه من خواص للقطع المكافىء فى (بند ٧٤) مثلا فان هناك نوعاً من « التشابه » بين هذا المنحنى الذى يمس المستقيم الذى فى اللانهايه و بين السطح المكافئ الذى يمس المستوى الذى فى اللانهاية للفضاء .

التقاطع فى هذه الحالة سوى نقطة واحدة فى اللانهاية (هى النقطة التى فى اللانهاية على المحور) .

(١١) حيث إن الرواسم μ_1 ، μ_2 ، ... يمكن الحصول عليها بقطع الدليلين λ_1 ، λ_2 بعدة مستويات موازية الى المستوى M (وهذه هى الطريقة الثانية المذكورة فى بند ١٣٤ حيث يمكن اعتبار تلك المستويات المتوازية مارة جميعاً بالدليل λ_3 الذى هو المستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى M) فينتج من ذلك (شكل ١٢٢ ا) أن

$$\frac{ا_١ ب_١}{ا_٢ ب_٢} = \frac{ب_١ حـ_١}{ب_٢ حـ_٢} = \dots$$

أى أن صفى النقط $ا_١$ $ب_١$ $حـ_١$ ... ، $ا_٢$ $ب_٢$ $حـ_٢$ ... على الدليلين λ_1 ، λ_2 ليسا فقط مؤتلفين كما هو الحال فى السطح الزائدى ذى الطية وإنما أيضاً متشابهين ومعنى ذلك أن *المستقيمات التى تصل أزواج النقط المتناظرة من صفين متشابهين على حاملين غير متقاطعين هى رواسم لسطح مكافئ زائدى .*

(١٢) المحيط الظاهرى للسطح المكافئ الزائدى بالنسبة لمستو غير عمودى على المحور هو (فى حالة الاسقاط المتوازى) دائماً قطع مكافىء لان هذا المحيط هو غلاف مساقط الرواسم المشار اليها فى (١١) على المستوى . ومن حيث إن أحد أزواج النقط المتناظرة هما النقطتان اللتان فى اللانهاية على الحاملين (لان الصفين متشابهان) فيكون المستقيم الواصل بين هذا الزوج من النقط هو المستقيم الذى فى اللانهاية فى مستوى الاسقاط وإذن فالغلاف هو منحن من الدرجة الثانية يمس المستقيم الذى فى اللانهاية أى قطع مكافىء .

ويشبه السطح المكافئ الزائدى فى الهيئة سرج الركوب (أو السطح المقعر من بكرة) ولتصور شكله نفرض فى (شكل ١٢٢ ب) أن ك ، $ك_١$ قطعان

مكافئان متحدا المحور والرأس وواقعان فى مستويين متعامدين بحيث يكون تقعيراهما لجهتين مختلفتين فاذا افترضنا ثبوت ك وأن ك$_1$ يتحرك موازياً لنفسه ومتكئاً على ك فان ك$_1$ يولد بهذه الحركة سطحاً مكافئياً زائدياً . كذلك يمكن اعتبار السطح متولداً عن قطع زائد (واقع فى مستو عمودى على محور القطع المكافىء) يتحرك موازياً لنفسه ومتكئاً على القطع المكافىء الثابت ك بحيث يكون مركزه واقعاً دائماً على المحور وبحيث تكون الاوضاع المختلفة للخطين التقربيين موازية لاتجاهين ثابتين فعند وصول القطع الزائد الى النقطة ا (وهى رأس السطح) ينحل الى مستقيمين واقعين بتمامهما على السطح وموازيين للاتجاهين الثابتين وبعد ذلك يؤول اتجاه المحور القاطع للقطع الزائد المتحرك الى اتجاه للمحور المرافق وبالعكس أى أن القطع الزائد الراسم للسطح يتحرك بعد مغادرته للنقطة ا متكئاً على القطع المكافىء ك$_1$.

الباب السابع

سطوح الدرجة الثانية غير المسطرة

الفصل الاول

السطح الناقص والسطح المكافئ الناقص والسطح الزائدى ذو الطيتين

بند ١٣٦ : السطح الناقص

معلوم أنه اذا دار قطع ناقص حول أحد محوريه فانه يولد ما يسمى بالسطح الناقص الدورانى وعلى حسب ما كانت حركة الدوران حول المحور الاصغر أو الاكبر يقال للسطح إنه مبطط أو مستطيل على التوالى .

فاذا علم سطح ناقص دورانى وافترضنا ائتلافاً متوازياً فى الفراغ معلوماً باحد مستويات الزوال Z كمستو للائتلاف وبزوج من النقط المتناظرة يصلهما مستقيم (محدد لاتجاه الائتلاف) عمودى على Z فاننا نحصل على سطح جديد مقفل من الدرجة الثانية (كالسطح الدورانى) مقاطعه العمودية قطاعات ناقصة (بدلا من دوائر) وله ثلاثة محاور مختلفة الطول : و س٠ و ص٠ و ع (شكل ١٢٣) ويطلق عليه اسم السطح الناقص (العام) أو السطح الناقص ذى المحاور الثلاثة .

ولما كان هذا السطح ليست له نقطاً فى اللانهاية لذا كانت مقاطعه المستوية كلها قطاعات ناقصة (أو دوائر) وبين هذه المقاطع توجد ثلاثة قطاعات ناقصة رئيسية هى التى يمكن الحصول عليها بقطعه بمستويات مارة بمركزه و عمودية على محاوره الثلاثة ويمكن اعتبار السطح الناقص — بصرف النظر عن إمكان الحصول عليه كسطح مؤتلف ائتلافاً متوازياً مع السطح الناقص الدورانى — متولدا

عن تحرك أحد تلك القطاعات الناقصة الرئيسية بالتوازى لنفسه متكئاً على القطعين الباقيين وفى هذه الحالة يمكن اعتبار السطح الناقصى الدورانى حالة خاصة من السطح ذى المحاور الثلاثة وذلك اذا تساوى اثنان من هذه المحاور كما يمكن اعتبار الكرة سطحاً ناقصياً محاوره الثلاثة متساوية .

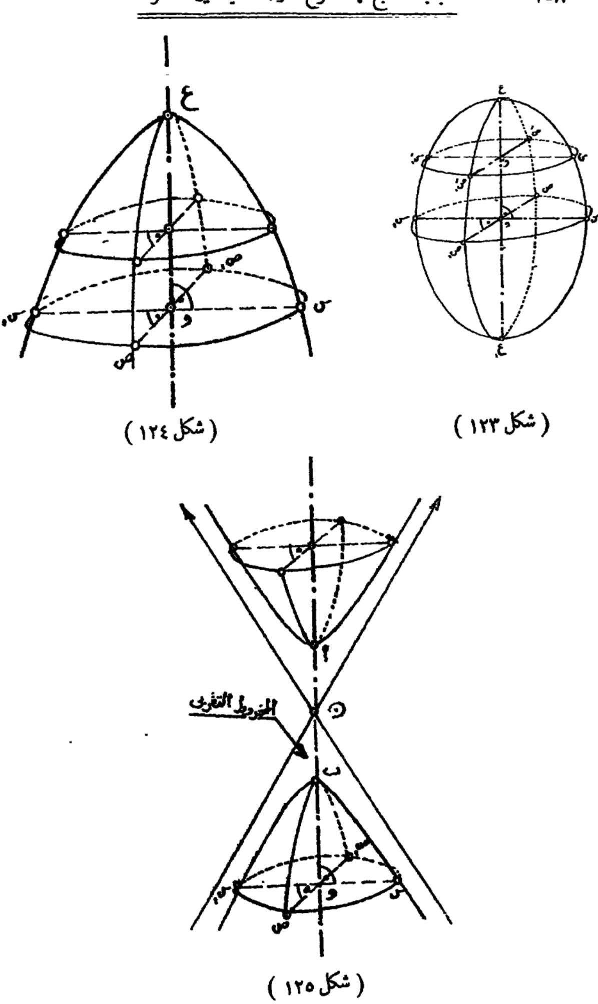
بند ١٣٧ : السطح المكافئ الناقصى

اذا دار قطع مكافىء حول محوره نشأ *سطح مكافئ دورانى* . فاذا افترضنا ائتلافاً متوازياً فى الفراغ واخترنا أحد مستويات الزوال Z لهذا السطح مستوياً لهذا الائتلاف والاتجاه العمودى على Z اتجاهاً له فاننا نحصل على سطح جديد من الدرجة الثانية مقاطعه العمودية على المحور قطاعات ناقصة (بدلا من دوائر) ويطلق عليه اسم *السطح المكافئ الناقصى* .

وهذا السطح أيضاً يمكن اعتباره قائماً بذاته فيعرف حينئذ بانه السطح المتولد عن تحرك قطع ناقص أو مكافىء [١] بكيفية خاصة يمكن استنتاجها بسهولة من الكروكى الذى يمثل السطح فى (شكل ١٢٤) وفى هذه الحالة يكون السطح المكافئ الدورانى حالة خاصة منه وذلك اذا جعلنا البعدين و س ٥ و ص متساويين .

والمقاطع المستوية للسطح المكافئ الناقصى إما أن تكون قطاعات مكافئة أو ناقصة (أو دوائر) .

(١) يلاحظ فى حالة اعتبار السطح متولداً عن حركة القطع المكافىء ص ع ص$_1$ مثلا بالتوازى لنفسه ومتكئاً على القطع المكافىء الثابت س ع س$_1$ — أن يكون تقعيرا القطعين لجهة واحدة وذلك بخلاف الحال فى السطح المكافئ الزائدى (بند ١٣٥) .



(شكل ١٢٤)

(شكل ١٢٣)

(شكل ١٢٥)

بند ١٣٨ : السطح الزائدى ذو الطيتين

اذا دار قطع زائد حول *محوره القاطع* فانه يولد بذلك *سطحاً زائدياً دورانياً ذا طيتين* كما يولد الخطان التقربيان بدورانهما حول هذا المحور مخروطاً دورانياً يطلق عليه اسم *المخروط التقربى* للسطح . فاذا افترضنا ائتلافاً متوازياً فى الفراغ واخترنا أحد مستويات الزوال Z لهذا السطح مستوياً للائتلاف والاتجاه العمودى على Z اتجاهاً له فاننا نحصل على سطح جديد من الدرجة الثانية يطلق عليه اسم *السطح الزائدى ذى الطيتين* فيه المقاطع العمودية على المحور قطاعات ناقصة (بدلا من دوائر) والمخروط التقربى سطح مخروطى عام من الدرجة الثانية (بدلا من مخروط دورانى) .

ويمكن تعريف هذا السطح اذا أريد اعتباره قائماً بذاته بانه السطح المتولد عن تحرك قطع ناقص أو زائد بكيفية خاصة يمكن استنتاجها بسهولة من الكروكى الذى يمثل السطح فى (شكل ١٢٥) وفى هذه الحالة يكون السطح الزائدى الدورانى ذو الطيتين حالة خاصة منه وذلك اذا جعلنا البعدين و س ٢ وص متساويين .

والمقطع المستوى لهذا السطح يكون قطعا زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً على حسب ما إذا كان المستوى الموازى للمستوى القاطع والمار بمركز السطح قاطعاً المخروط التقربى فى راسمين مختلفين أو ماساً له أو غير قاطع له على التوالى .

الفصل الثانى

السطوح المؤتلفة مركزياً مع الكرة

بند ١٣٩ : تعاريف ونظريات عامة

يقال لمجموعتين فراغيتين (يتألف كل منهما من نقط ومستقيمات ومستويات) إنهما *مؤتلفتان مركزياً* اذا تناظرت نقطهما ومستقيماتهما بحيث تمر المستقيمات الواصلة بين أزواج النقط المتناظرة جميعاً بنقطة ثابتة فى الفراغ تعرف *بمركز الائتلاف* وبحيث تتلاقى المستقيمات المتناظرة فى مستو ثابت يسمى *مستوى الائتلاف المركزى* . ويؤخذ من هذا التعريف أن كل مستو فى إحدى المجموعتين يناظره مستو جديد فى المجموعة الاخرى بحيث يتقاطع المستويان المتناظران فى مستقيم واقع فى مستوى الائتلاف . فاذا كان أحد هذين المستويين هو المستوى الذى فى اللانهاية للفضاء باعتباره مرسوماً فى إحدى المجموعتين كان المستوى المناظر له فى المجموعة الاخرى (وهو مستو مواز لمستوى الائتلاف وعلى بعد محدود منه) هو المحل الهندسى لجميع نقط هذه المجموعة التى تناظرها فى المجموعة الاولى نقط فى اللانهاية ويؤخذ من هذا أنه يوجد مستويان (متوازيان وموازيان لمستوى الائتلاف) فى المجموعتين يناظر كل منهما المستوى الذى فى اللانهاية ويطلق عليهما اسم *المستويين المحددين* للائتلاف المركزى فى الفراغ (قارن الائتلاف المركزى بين شكلين مستويين) . ويتعين الائتلاف اذا علم المركز ومستوى الائتلاف وزوج واحد من النقط المتناظرة أو من المستويات المتناظرة .

ولنفرض الان كرة $\varkappa$ وائتلافاً مركزياً معلوماً بالمركز o ومستوى الائتلاف Ξ وبالمستوى المحدد X المرسوم فى مجموعة الكرة مناظرا للمستوى الذى فى اللانهاية للفضاء باعتباره مرسوماً فى مجموعة "سطح $\varkappa'$" المؤتلف مركزيا

مع الكرة فمن الواضح أن السطح x' لابد أن يكون حينئذ كالكرة سطحاً من الدرجة (وكذا الرتبة) الثانية لان كل مستقيم فى الفراغ لايمكن أن يلاقى هذا السطح فى أكثر من نقطتين اثنتين (هما النقطتان المناظرتان لنقطتى تقاطع المستقيم المناظر للمستقيم المعلوم مع الكرة) وكذلك اذا تقاطع مستو Σ مع الكرة x فى دائرة ϱ فان المستوى Σ' المناظر له لابد أن يقطع السطح x' فى منحن مؤتلف مركزياً مع ϱ أى فى مقطع مخروطى ϱ' فاذا فرضنا أن س رأس المخروط الدورانى الذى يمس الكرة فى الدائرة ϱ فان س′ يكون رأساً لمخروط من الدرجة (والرتبة) الثانية يمس x' فى المقطع المخروطى ϱ' . ويطلق على النقطة س والمستوى Σ اسم قطب ومستويه القطبى بالنسبة الى الكرة كما يطلق على س′ ، Σ' اسم قطب ومستويه القطبى بالنسبة الى السطح x' .

ونذكر باختصار فيما يلى بالاشارة الى ما تقدم بعض النظريات والخواص المتعلقة بالسطوح المؤتلفة مركزيا مع الكرة [1] : —

(١) لما كانت الكرة جميع نقطها ناقصية لذا كانت نقط السطوح المؤتلفة معها مركزياً ناقصية كذلك بحيث أن المستوى المماس فى أية نقطة لا يقطع السطح ولا يشترك معه إلا فى نقطة التماس وذلك بخلاف سطوح الدرجة الثانية المسطرة (راجع البنود ١٠٥ ، ١٣٤ ، ١٣٥) التى جميع نقطها زائدية [2] .

(٢) السطوح المؤتلفة مركزياً مع الكرة هى نفس سطوح الدرجة الثانية غير المسطرة التى عرفناها فى الفصل السابق . وعلى حسب ما اذا كان المستوى المحدد X غير قاطع للكرة x أو ماساً لها أو قاطعاً لها (فى دائرة حقيقية) يكون

(١) يلاحظ أن النظريات ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ تصدق على سطوح الدرجة الثانية بوجه عام بما فى ذلك السطوح المسطرة التى أشرنا اليها فى البنود ١٠٥ ، ١٣٤ ، ١٣٥ .

(٢) سطوح الدرجة الثانية التى نقطها مكافئة هى السطوح المخروطية والاسطوانية .

السطح $\varkappa'$ المؤتلف معها مركزياً سطحاً ناقصياً أو مكافئياً ناقصياً أو زائدياً ذا طيتين على التوالى .

(٣) اذا رسم من النقطة س' (رأس المخروط المماس للسطح $\varkappa'$) مستقيم يلاقى مستويها القطبي Σ' فى النقطة ص' ويقطع السطح $\varkappa'$ فى النقطتين ا'، ب' فان

$$(\text{س' ص' ا' ب'}) = -1$$

أى أن هذه النقط الاربع تكوّن صفا توافقيا .

(٤) المحل الهندسى للنقطة ص' التى ترافق س' توافقياً بالنسبة للنقطتين ا'، ب' وهما نقطتى تقاطع $\varkappa'$ مع أى مستقيم مار بالنقطة س' هو المستوى القطبى Σ' للنقطة س' بالنسبة للسطح $\varkappa'$.

(٥) اذا علم سطح من الدرجة الثانية تحددت مجموعة قطبية فى الفراغ بحيث أن كل نقطة يكون لها مستو قطبي بالنسبة للسطح كما أن كل مستو يكون له قطب واحد بالنسبة لهذا السطح ويلاحظ أن قطب المستوى المماس هو نقطة التماس نفسها .

(٦) مركز سطح من الدرجة الثانية هو قطب المستوى الذى فى اللانهاية للفضاء بالنسبة للسطح كما أن المستوى القطبي لاية نقطة فى اللانهاية هو مستو يمر بمركز السطح ويسمى أحياناً بالمستوى القطرى .

(٧) اذا كانت و هى قطب المستوى X السالف الذكر بالنسبة للكرة $\varkappa$ كانت النقطة و' (المناظرة الى و) هى مركز السطح $\varkappa'$.

(٨) المخروط المماس لاى سطح من الدرجة الثانية من نقطة خارجية مثل ل يمس السطح فى منحن من الدرجة الثانية (هو مقطع السطح بالمستوى القطبى Λ للنقطة ل بالنسبة للسطح) ولذا كان خط الظل والظل الساقط على مستو (فى حالتى الاضاءة المركزية والمتوازية) وكذلك المحيط الحقيقى والمحيط الظاهرى (فى حالتى الاسقاط المركزى والمتوازى) مقطعاً مخروطياً .

ولكى نعطى للقارىء فكرة عن كيفية استنباط بعض خواص سطوح الدرجة الثانية غير المسطرة باعتبارها مؤتلفة مركزياً مع الكرة نفرض أننا أمررنا بمركز الائتلاف م ومركز الكرة $\varkappa$ مستوياً عمودياً على مستوى الائتلاف Ξ فان هذا المستوى العمودى يكون مستوى تماثل بالنسبة للكرة وللسطح $\varkappa'$ المؤتلف معها مركزياً فاذا فرضنا فى (شكل ٧٨) أن هذا المستوى (الذى يمثله سطح الورقة) يقطع الكرة فى الدائرة العظمى المبينة كما يقطع مستوى الائتلاف Ξ والمستوى المحدد X فى المستقيمين ξ ، χ على التوالى فان القطع المكافىء المؤتلف مركزياً مع الدائرة يكون حينئذ مقطعاً رئيسياً للسطح $\varkappa'$ الذى يجب أن يكون فى هذه الحالة سطحاً مكافئياً ناقصياً (لان الكرة تمس X). وأى وتر للدائرة فى الشكل يمثل حينئذ مقطعا مستويا للكرة يناظره مقطع مستو للسطح $\varkappa'$ فاذا فرضنا أن المستقيم ϱ فى (شكل ٧٨) يمثل مستوياً P فى مجموعة الكرة ماراً بالنقطة ك وقاطعا لها فى دائرة فان المستقيم ϱ' يمثل حينئذ مستويا P' فى مجموعة السطح $\varkappa'$ موازيا لمحوره وقاطعا له فى قطع مكافىء. فى حين أن أى مستو آخر Σ غير مار بالنقطة ك يقطع الكرة فى دائرة يكون المنحنى المؤتلف معها مركزيا (وهو مقطع السطح $\varkappa'$ بالمستوى Σ') قطعا ناقصا ويجوز أن يكون أيضا دائرة وذلك مثلا فى حالة ماذا كان Σ موازيا الى مستوى الائتلاف Ξ .

الباب الثامن

الاسقاط الرقمى

الفصل الاول

كلمـــة عامة وتعـــاريف

بند ١٤٠ : الاستعمال الرئيسى للاسقاط الرقمى

تبحث هذه الطريقة الجديدة للاسقاط فى تمثيل السطوح والاجسام بواسطة مسقط عمودى واحد إذ كما أن النقطة فى الفراغ تتحدد اذا علم مسقطاها العموديان على مستويين متعامدين كما هو الحال فى طريقة مونج التى اقتصرنا على استعمالها للآن — فهى تتحدد أيضاً كما قدمنا فى (بند ١) اذا علم بجانب مسقطها العمودى على مستو واحد بعدها عن هذا المستوى [١] .

وتستخدم طريقة الاسقاط الرقمى [٢] على وجه الخصوص فى خرط المساحة لتمثيل سطح الارض بارتفاعاته وانخفاضاته وبيان ما يمكن تخطيطه عليه من جسور وطرق وأنهار وترع كما سيأتى بيانه فى الباب التاسع تطبيقاً للقسم النظرى الذى أفردنا له هذا الباب .

---

(١) يظهر لاول وهلة أن هذه الطريقة لابد أن تكون أقل تعقداً من طريقة مونج إلا أن العناء الذى تقتضيه كتابة الارقام المختلفة على مساقط النقط وعدم وضوح الاشكال الممثلة بطريقة الاسقاط الرقمى يجعل استعمال هذه الطريقة فى الرسومات الهندسية قاصراً فى الغالب على خرط المساحة وحدها .

(٢) يرجع استخدام هذه الطريقة فى الخرائط البحرية الى العهد الهولندى . وأول كتاب تناول طريقة الاسقاط الرقمى بالبحث هو كتاب ألفه المهندس الحربى نوازيه F. Noizet فى باريس عام ١٨٢٣ .

بند ١٤١ : تعاريف

يسمى مستوى الاسقاط الذى يؤخذ عادة أفقياً بمستوى المقارنة أو المستوى الرقمى وسنرمزله بالرمز II .

ويسمى بعد النقطة أو ارتفاعها عن مستوى المقارنة II بالرقم أو الارتفاع ويطلق عليه أحياناً أيضاً اسم المنسوب اذا فرضنا أن مستوى المقارنة يمثل سطح البحر . ويكون الرقم موجباً أو سالباً على حسب ما اذا كانت النقطة فوق أو تحت المستوى الرقمى .

الفصل الثانى

تمثيل النقطه والمستقيم والمستوى

بند ١٤٢ : تمثيل النقطة — الوحدة ومقياس الرسم

تمثل النقطة فى هذه الطريقة بمسقطها المرقوم على مستوى المقارنة Π أى مسقطها العمودى مصحوبا برقمها أو ارتفاعها عن Π وهذا الرقم يكتب عادة بين قوسين بجانب المسقط فالنقطة ا مثلا التى مسقطها المرقوم ا' (٣,٨) فى (شكل ١٢٦) هى النقطة الواقعة على العمود المقام من ا' على Π (الذى تمثله ورقة الرسم) وعلى بعد منه يساوى ٣,٨ من الوحدات. والوحدة التى لابد من معرفتها لكى يتحدد وضع النقطة فى الفراغ هى بعد معين يمثل وحدة الاطوال فى الطبيعة على حسب مقياس رسم معين. ومعنى هذا أن الوحدة على ورقة الرسم تتوقف على شيئين :

اولا — نوع الوحدة المستعملة للقياس فى الطبيعة (المتر أو الياردة أو ...)

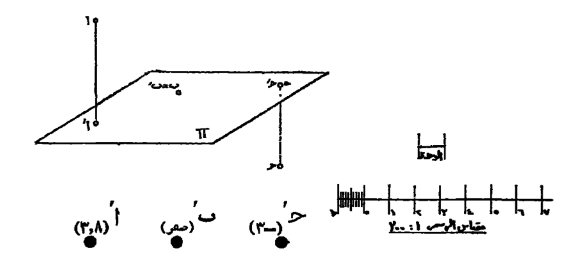
ثانيا — مقياس الرسم للخريطة (١ : ١٠٠ أو ١ : ٢٥٠٠ أو ...)

فاذا كانت وحدة الاطوال فى الطبيعة هى المتر مثلا وكان مقياس الرسم ١ : ٢٠٠ فان الوحدة على الخريطة تساوى فى هذه الحالة ٠,٥ سم[١]. ولما كان

---

(١) هذا فى المسائل العملية والخرائط أما فى المسائل النظرية التى تترك وحدة الاطوال ومقياس الرسم فيها بغير تحديد فيكون البعد الذى يمثل الوحدة اختيارياً ويجب أن يفترضه الانسان (قبل أن يبدأ بالرسم) بحيث يكون فقط متناسباً مع أبعاد ورقة الرسم المطلوب حل المسألة عليها كما يجب أن يحتفظ به أثناء حل المسألة بأكملها .

قياس الابعاد والاطوال على الخريطة يستلزم تكرار استعمال الوحدة ونظراً لما يسببه القياس بهذه الوحدة الصغيرة من التعب وعدم الدقة فقد جرت العادة فى



(شكل ١٢٦)

مثل هذه الاحوال باستخدام مقياس رسم كالمبين فى (شكل ١٢٦) يكون طوله متناسباً مع أبعاد الخريطة ويسمح فى الوقت نفسه بقياس الاجزاء العشرية من الوحدة .

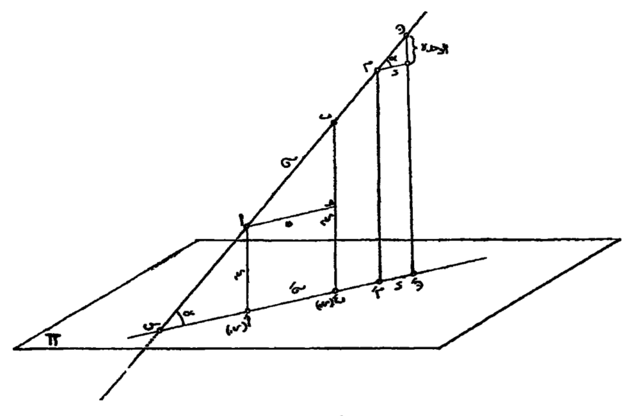
بند ١٤٣ : تمثيل الخط المستقيم

يتعين المستقيم بمعلومية المسقطين المرقومين لنقطتين من نقطه مثل أ′(ر١) ، ب′ (ر٢) حيث ر١ ، ر٢ هما رقما النقطتين ا ، ب على التوالى[1] .

وتسمى النقطة س لتقاطع المستقيم مع π بالاثر . واذا فرضنا فى (شكل ١٢٧) أن م ، ن نقطتان مأخوذتان على المستقيم σ بحيث يكون الفرق بين

(١) يطلق أحياناً على طول المسقط أ′ ب′ اسم البعد « الافقى » للنقطتين ا ، ب الواقعتين على المستقيم σ كما يطلق على البعد ب حـ الذى يساوى الفرق بين ارتفاعيهما عن π اسم « البعد الرأسى » لهاتين النقطتين (شكل ١٢٧) .

رقميهما أو ارتفاعيهما عن Π مساوياً الوحدة فان المسقط الافقى م′ ۏ′ للبعد م ۏ يسمى معدل المستقيم σ .



(شكل ١٢٧)

فاذا رمزنا للمعدل بالرمز ى والى ميل المستقيم σ على المستوى Π بالرمز م وزاوية الميل بالرمز $\hat{\alpha}$ كان

$$م = ظا \hat{\alpha} = \frac{١}{ى}$$

ومعنى هذا أن المعدل والميل لمستقيم ما هما عددان متعاكسان أى أن كلا منهما مقلوب الآخر. فاذا قيل مثلا إن ميل المستقيم هو ٢ : ٣ (وهو الاصطلاح الفنى للدلالة على الميل) كان معنى ذلك أن

الميل م $=$ ظا $\hat{\alpha} = \frac{٢}{٣}$ وأن المعدل ى $= \frac{٣}{٢} =$ ١,٥ وحدة .

ونلفت نظر القارىء المبتدىء الى أن المعدل ى لايمت الى الوحدة إلا بصلة

الميل إذ بينما الوحدة هى بعد يحتفظ به ثابتاً لجميع عناصر المجموعة التى يراد تمثيلها فى مسألة معينة نجد أن المعدل لاى مستقيم فى هذه المجموعة يختلف باختلاف ميله فهو بعد متغير ويتراوح بين الصفر (اذا كان المستقيم عموديا على Π) وبين ∞ (اذا كان المستقيم موازياً الى Π) فالمعدل لايساوى الوحدة إلا اذا كان ميل المستقيم يساوى ١ أى اذا كانت الزاوية α تساوى ٤٥° .

بند ١٤٤ : تدريج الخط المستقيم — مقياس الميل

يطلق اسم تدريج الخط المستقيم على عملية تعيين مساقط النقط الواقعة على المستقيم والتى أرقامها أعداد صحيحة من الوحدة أى مساقط النقط التى ارتفاعاتها عن Π هى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ . . . ويسمى حينئذ هذا المسقط المدرّج بمقياس ميل المستقيم . وقد جرت العادة على تمثيل المستقيم فى الاسقاط الرقمى بمقياس ميله لان هذه الطريقة أسهل وأوضح من تمثيله بالمسقطين المرقومين لنقطتين من نقطه .

بند ١٤٥ : مسائل اساسية

يبين (شكل ١٢٨) مستقيما σ معلوماً بالمسقطين المرقومين ا′ (٦ ، ٢) ، ب′ (١ ، ٨) لنقطتين ا ، ب من نقطه والمطلوب :

اولا — ايجاد أثره س على مستوى المقارنة Π

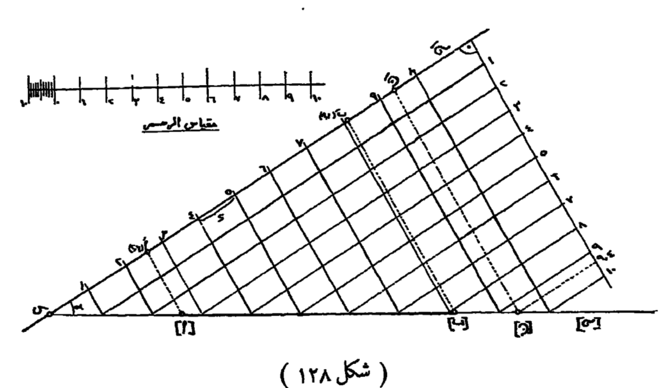
ثانياً — ايجاد زاوية ميله α على المستوى Π

ثالثاً — تعيين الطول الحقيقى للبعد ا ب

رابعاً — اذا علم المسقط ء′ لنقطة من نقطه مثل ء فالمطلوب ايجاد رقمها وبالعكس اذا علم رقم نقطة عليه فالمطلوب تعيين مسقطها على σ'

خامساً — ايجاد المعدل وتدريج المستقيم

لذلك نطبق المستوى المسقط ا ا' ب' ب (وهو المستوى المار بالمستقيم σ عمودياً على Π) على المستوى Π حيث محور الانطباق هو المسقط σ' للمستقيم. فاذا أقمنا من ا'، ب' عمودين على σ' وقسنا عليهما البعدين ا' [ا]، ب' [ب] مساويين الى ٢,٦ ، ٨,١ من الوحدات على التوالى كان المستقيم [σ] الذى يصل [ا]، [ب] هو موقع المستقيم σ بعد تطبيق المستوى المسقط المذكور على Π وتكون نقطة تقاطع الموقع [σ] مع المسقط σ' هى الاثر س للمستقيم σ على المستوى Π كما تكون الزاوية α المحصورة بين [σ]، σ' هى زاوية ميل المستقيم على Π ويكون البعد [ا] [ب] هو الطول الحقيقى للبعد ا ب وهذا هو المطلوب أولا وثانياً وثالثاً.



(شكل ١٢٨)

فاذا كانت ء' مسقط نقطة ء على المستقيم وأقمنا من ء' عموداً على σ' ليقابل [σ] فى النقطة [ء] كانت هذه النقطة هى موقع النقطة ء ويكون البعد ء' [ء] هو ارتفاع النقطة ء أو الرقم المطلوب لهذه النقطة (ويمكن قياسه على مقياس الرسم فهو فى الشكل يساوى ٩,٤ من الوحدات).

وبالعكس اذا فرضنا أنه يراد تعيين المسقط ﻫ′ لنقطة مثل ﻫ على المستقيم بحيث يكون رقمها ٤,٩ مثلا فاننا نرسم مستقيما موازياً للمسقط ٥′ بحيث يبعد عنه فى الاتجاه الموجب بعداً يساوى ٤,٩ من الوحدات فهذا الموازى يلاقى حينئذ الموقع [٥] للمستقيم فى الموقع [ﻫ] للنقطة المطلوبة ويكون مسقطها ﻫ′ هو نقطة تقاطع ٥′ مع العمود النازل من [ﻫ] على ٥′ .

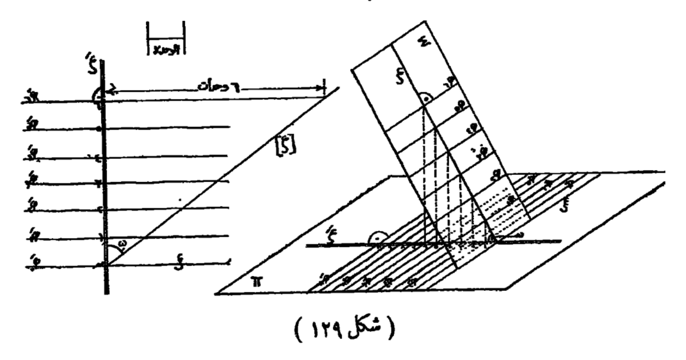
ولتدريج المستقيم نعين بالطريقة المذكورة آنفاً مساقط النقط التى أرقامها ١ ، ٢ ، ٣ ، ... فيتم تدريج المستقيم ويكفى لذلك تعيين مسقطى نقطتين متتاليتين يكون رقماهما عددين صحيحين مثل ٤ ، ٥ لان البعد بين المسقطين يحدد فى هذه الحالة المعدل الثابت ى للمستقيم فيمكن حينئذ قياسه على ٥′ مرات متعدده الى يمين النقطة ٥ للحصول على النقط ٦ ، ٧ ، ... ثم الى يسار النقطة ٤ للحصول على النقط ٣ ، ٢ ، ...

بند ١٤٦ : تمثيل المستوى

يتعين المستوى كما قدمنا فى (بند ٥) اذا علم منه ثلاث نقط أو نقطة وخط مستقيم أو مستقيمان متقاطعان أو متوازيان .

ويسمى خط تقاطع المستوى مع مستوى المقارنة **بأثر المستوى** ويرمز له عادة بالرمز ع كما تسمى المستقيمات الموازية لهذا الاثر والموازية بالتالى لمستوى المقارنة **افقيات المستوى** وهى خطوط تقاطع المستوى المعلوم مع مستويات أفقية (موازية الى Π) . وكل أفقى من هذه الافقيات هو المحل الهندسى لجميع نقط المستوى التى أرقامها متساوية ومساوية لارتفاع هذا الافقى عن Π وتختار عادة الافقيات التى ارتفاعاتها أعداد صحيحة مثل φ_1 ، φ_2 ، ... لتمثيل المستوى حيث يكفى اثنان منها لهذا الغرض .

وأى مستقيم فى المستوى مثل ع عمودى على أفقيات المستوى (شكل ١٢٩) يسمى مستقيماً ذا ميل اعظم (بند ٧). والمسقط المرقوم المدرج ع′ لاى واحد من مستقيمات المستوى ذوات الميل الاعظم يكون عمودياً على مساقط أفقياته ويسمى مقياس ميل المستوى وهو يكفى وحده لتعيين المستوى إذ لو فرضنا فى (شكل ١٢٩) أن ع′ هو مقياس ميل المستوى Σ فانه يمكن الحصول على أى عدد من أفقيات هذا المستوى برسم أعمدة على ع′ من نقط تدريجه. ولكى يتيسر تمييز مقياس الميل ع′ الذى يمثل مستوياً عن باقى المستقيمات جرت العادة برسمه مزدوجاً كما هو موضح فى (شكل ١٢٩).



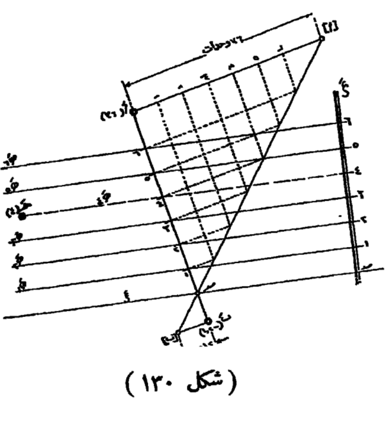
(شكل ١٢٩)

وأى مستو Σ يمكن أن يشغل بالنسبة الى Π ثلاثة أوضاع فقط فهو إما أن يكون مائلا عليه وفى هذه الحالة تكون زاوية ميله ω مساوية لزاوية ميل احد مستقيماته ذوات الميل الاعظم ويمكن الحصول على الزاوية الاخيرة كما سبق بيانه فى (بند ١٤٥) — أو موازياً له أى أفقياً وفى هذه الحالة تكون نقطه جميعاً متساوية الرقم ويكفى لتمثيله أن يعلم هذا الرقم. وأخيراً يجوز أن يكون Σ عمودياً على Π ويكفى لتمثيله فى هذه الحالة أن يعلم أثره على Π (بدون كتابة أرقام عليه).

١٤٧ : مسألة اساسية

اذا علمت (شكل ١٣٠) ثلاث نقط ا′ (٦ ، ٧) ، ب′ (— ١,٢) ، حـ′ (٤) فالمطلوب ايجاد مقياس ميل المستوى المار بها .

لذلك نصل ا′ ب′ وندرجه كما سبق شرحه فى (بند ١٤٥) ثم نصل حـ′ (وهى مسقط النقطة الثالثة حـ التى رقمها ٤) بالنقطة ٤ على ا′ ب′ وذلك بالمستقيم المتقطع المبين بالشكل فيكون هو المسقط φ_4′ لافقى المستوى الذى ارتفاعه ٤ ثم نرسم من نقط التدريج الاخرى على ا′ ب′ مستقيمات موازية الى φ_4′ ونرسم مستقيما حيثما اتفق عموديا على هذه المستقيمات فيقابلها فى نقط أرقامها صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... و يكون هذا المستقيم المدرج هو مقياس الميل المطلوب ع′ للمستوى وقد رسمناه لهذا السبب مزدوجا .

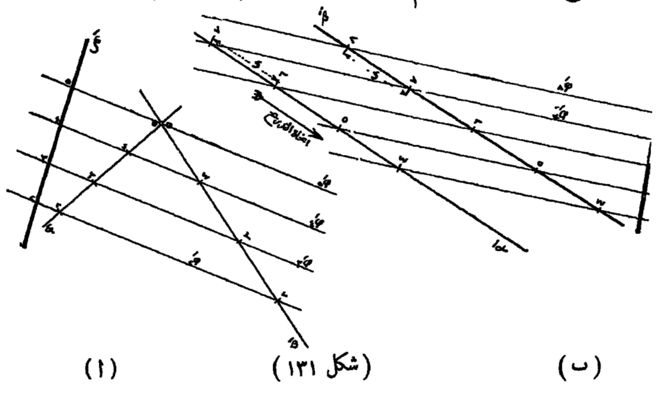


(شكل ١٣٠)

واذا كان رقم النقطة حـ ليس صحيحا كأن كان ٢,٨ مثلا فيعين أولا مسقط النقطة الواقعة على المستقيم ا ب والتى رقمها ٢,٨ (بند ١٤٥) ثم نصلها بالمسقط حـ′ فيكون الواصل هو مسقط الافقى الذى ارتفاعه ٢,٨ ثم نرسم الافقيات الاخرى ومقياس الميل كما تقدم .

واذا علم المستوى بمستقيم ونقطة فانه يمكن ايجاد مقياس ميله بنفس الطريقة

السابقة. أما اذا كان المستوى متعينا بمستقيمين متقاطعين أو متوازيين α ، β معلوم كل منهما بمقياس ميله كان تعيين الافقيات وبالتالى مقياس ميل المستوى بسيطا جداً لان مساقط الافقيات تكون فى هذه الحالة المستقيمات التى تصل أزواج النقط المتساوية الرقم على مسقطى المستقيمين (شكل ١٣١).



(ا) (شكل ١٣١) (ب)

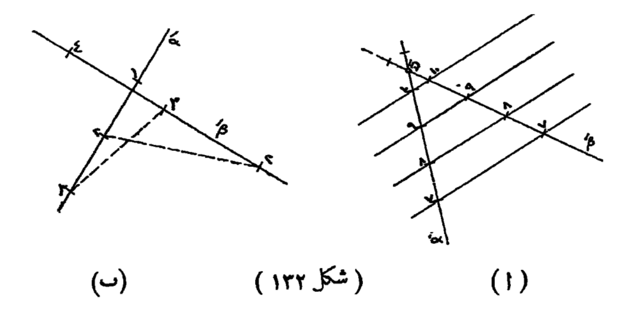
بند ١٤٨ : المستقيمات المتقاطعة والمتوازية

يؤخذ من (شكل ١٣١ ا) أن الشرط اللازم والكافى لان يكون مستقيمان α ، β معلومان بمقياسى ميلهما متقاطعين هو توازى المستقيمات الواصلة بين النقط المتناظرة (ذوات الارقام المتساوية) على المسقطين.

فالمستقيمان المبينان فى (شكل ١٣٢ ا) متقاطعان بينما المستقيمان المبينان فى فى (شكل ١٣٢ ب) غير متقاطعين أى لا يمكن أن يمر بهما مستو واحد.

وهناك طريقة أخرى لمعرفة ما اذا كان مستقيمان معلومان متقاطعين أو غير متقاطعين : فنفرض لذلك أن ﻫ′ هى نقطة تقاطع مسقطى المستقيمين ثم نجد

رقم النقطة ﻫ التى مسقطها ﻫ′ باعتبارها إحدى نقط المستقيم الاول ثم نجد رقمها باعتبارها واقعة على المستقيم الثانى (بند ١٤٥) فاذا تساوى الرقمان كان المستقيمان متقاطعين وإلا فهما غير متقاطعين . وتستعمل هذه الطريقة فى حالة ما اذا كان كل من المستقيمين معلوماً بنقطتين من نقطه أما اذا كان المستقيمان معلومين بمقياسى ميليهما كما فى (شكل ١٣٢) فلا شك أن الطريقة الاولى أسهل .



(ب) (شكل ١٣٢) (ا)

وينتج من (شكل ١٣١ ب) أنه اذا علم مستقيمان بمقياس الميل لكل منهما فان الشرط اللازم والكافى لان يكون المستقيمان متوازيين هو امكان جعل أحد مقياسى الميل ينطبق على الآخر بمجرد تحريكه حركة انتقالية بالتوازى لنفسه وبعبارة أوضح يكون المستقيمان متوازيين اذا توافرت الشروط الثلاثة الآتية معاً :

اولا — أن يكون مسقطا المستقيمين متوازيين

ثانياً — أن يكون المعدلان على المسقطين متساويين

ثالثاً — أن يكون اتجاه التدريج واحداً لكل من المستقيمين

ففى (شكل ١٣١ ب) يميل كل من المستقيمين على مستوى المقارنة فى اتجاه السهم وعليه فالتدريج فى كل من المستقيمين تنازلى فى هذا الاتجاه فالمستقيمان لهذا

السبب ولتوافر الشرطان الاولان أيضا متوازيان . أما اذا كان التدريج تنازليا بالنسبة لاحد المستقيمين وتصاعدياً بالنسبة للاخر كان المستقيمان غير متوازيين. حتى ولو توافر الشرطان الباقيان .

ملحوظ

يمثل المستوى على الأغلب فى الاسقاط الرقمى بمقياس الميل فاذا قيل المعلوم مستو فمعنى ذلك أن مقياس الميل هو المعلوم واذا كان المطلوب تعيين مستو فيكون المقصود بذلك ايجاد مقياس ميل هذا المستوى .

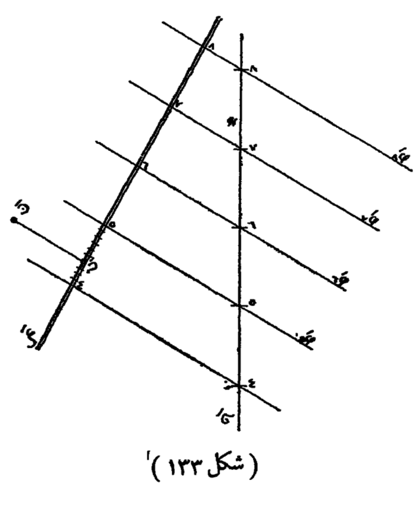
الفصل الثالث

مسائل الوضع

بند ١٤٩ : المسألة الاولى

(١) اذا علم مستو A بمقياس ميله ع′ وعلم المسقط غير المدرّج σ′ لمستقيم واقع فيه فالمطلوب تدريج σ′ .

نقط التدريج المطلوبة ٤ ، ٥ ، ٦ ، ... المبينة فى (شكل ١٣٣) هى نقط تقاطع المسقط المعلوم σ′ مع المستقيمات المرسومة من النقط ٤ ، ٥ ، ٦ ، ... عمودية على ع′ لان هذه المستقيمات هى مساقط أفقيات المستوى.



(شكل ١٣٣)′

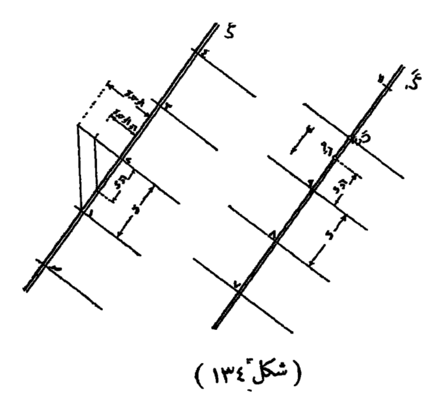
(ب) اذا علم المسقط غير المرقوم ء′ لنقطة ء واقعة فى المستوى A السالف الذكر فالمطلوب تعيين رقم النقطة ء .

لذلك ننزل من ء′ عموداً على ع′ فيقابله فى ء١′ فيكون هذا العمودى مسقط أفقى المستوى المار بالنقطة ء وتكون إذن النقطة ء١ التى مسقطها ء١′ على نفس منسوب النقطة ء . فاذا عينا رقم النقطة ء١ وذلك إما بقراءته مباشرة على

مقياس الميل ع' أو بتطبيق المستوى المسقط للمستقيم ع ذى الميل الاعظم على II (بند ١٤٥) كان هو نفس الرقم المطلوب للنقطة ن (وهذا الرقم فى شكل ١٣٣ هو ٤,٤ من الوحدات) .

١٥٠ : المسألة الثانية :

اذا علم مستو بمقياس ميله ع' والمسقط المرقوم ن'(١٠) لنقطة ن خارجة عنه فالمطلوب تعيين مقياس الميل ع١' للمستوى المار بالنقطة ن موازيا للمستوى المعلوم .



(شكل ١٣٤)

لذلك نرسم من ن مستقيما ع١ موازيا للمستقيم ذى الميل الاعظم ع فرسم بناء على ما سبق ذكره فى (بند ١٤٨) من ن'(١٠) المستقيم ع١' موازيا الى ع' (شكل ١٣٤) ثم ندرجه بحيث يكون المعدلان على المسقطين متساويين واتجاها لتدريج لهما واحداً فيكون ع١' هو المسقط المدرج للمستقيم ع١ أى مقياس الميل للمستوى المطلوب .

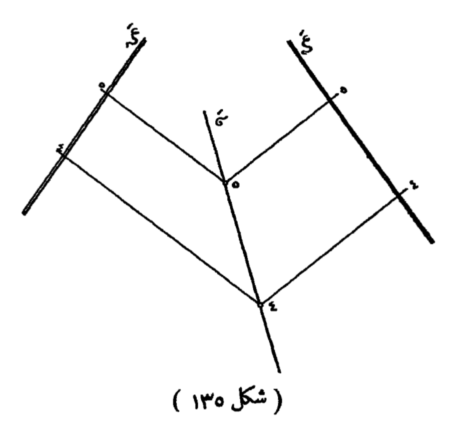
ويلاحظ أنه اذا كان رقم النقطة المعلومة ليس عدداً صحيحا مثلا ٩,٦ فاننا

نبدأ برسم ع′ ١ كما سبق ثم نعين عليه النقطة التي رقمها عدداً صحيحا وتسبق أو تلى مباشرة النقطة المعلومة وذلك بأن نقيس على ع′ ١ في اتجاه السهم مثلا ابتداء من النقطة ٩,٦ بعداً يساوى ٠,٦ ى حيث ى هو معدل مقياس الميل المعلوم ع′ فنحصل بذلك على النقطة التي رقمها ٩ ثم نجد النقط ٨ ، ١٠ ، ... فيتم بذلك تدريج ع′ ١ .

١٥١ : المسألة الثالثة

المطلوب تعيين خط تقاطع مستويين معلومين بمقياسي ميليهما ع′ ١ ، ع′ ٢ .

لذلك نصل في المسقط نقط تقاطع أزواج الافقيات المتساوية المنسوب في المستويين بالمستقيم ه′ فيكون ه′ هو المسقط المدرج أى مقياس الميل لخط التقاطع المطلوب (شكل ١٣٥) .



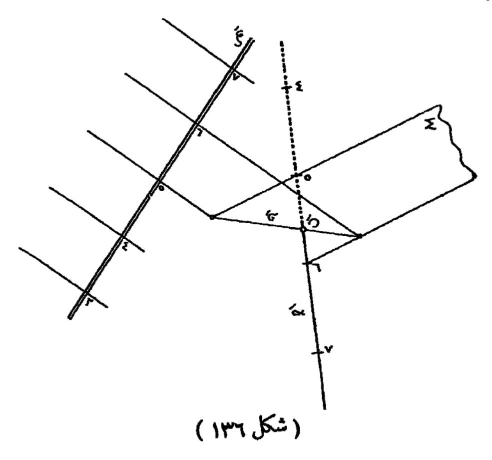
(شكل ١٣٥)

فاذا كان مقياسا الميل ع′ ١ ، ع′ ٢ متوازيين (وكان المستقيمان ع ١ ، ع ٢ نفساهما غير متوازيين في الفراغ) فان خط تقاطع المستويين يكون أفقياً وللحصول على نقطة من نقطه نفرض مستوياً ثالثا حيثما اتفق ثم نعين خطى

تقاطعه مع المستويين المعلومين فتكون نقطة تقاطع هذين الخطين هى النقطة المطلوبة [١] .

بند ١٥٢ : المسألة الرابعة

اذا علم مقياس الميل لكل من مستو A ومستقيم α فالمطلوب تعيين المسقط المرقوم لنقطة تقاطعهما ن .



(شكل ١٣٦)

لذلك نمر بالمستقيم α مستوياً مساعداً Σ يؤخذ حيثما اتفق ثم نجد خط تقاطع المستويين A و Σ فاذا رمزنا لخط التقاطع بالرمز σ وتقاطع المستقيمان σ و α فى النقطة ن كانت ن هى النقطة المطلوبة .

---

(١) توجد طريقة أسهل وأسرع للحصول على إحدى نقط خط التقاطع فى هذه الحالة : فنفرض لذلك أن نقط التدريج على مقياس الميل ئ$'_{١}$ هى $٦_{١}$ و $٧_{١}$ و $٨_{١}$ ... وعلى مقياس الميل ئ$'_{٢}$ هى $٦_{٢}$ و $٧_{٢}$ و $٨_{٢}$ ... ثم نصل $٦_{١}$ $٦_{٢}$ و $٧_{١}$ $٧_{٢}$ و $٨_{١}$ $٨_{٢}$ و ... فتتقاطع هذه المستقيمات فى نقطة على خط التقاطع . ونترك إثبات صحة هذه الطريقة للقارىء .

ولتطبيق هذا الحل إسقاطياً فى (شكل ١٣٦) نرسم من أى نقطتين مثل ٥ ، ٦ من نقط التدريج على المسقط α' للمستقيم المعلوم — مستقيمين متوازيين ونعتبرها مسقطى الافقيين ٥ ، ٦ فى المستوى المساعد Σ ويكون المسقط σ' لخط تقاطع المستويين A ، Σ هو المستقيم الذى يصل فى المسقط نقطة تقاطع الافقيين ٥ بنقطة تقاطع الافقيين ٦ فى المستويين . وتكون النقطة $\wp''$ لتقاطع α' ، σ' هى مسقط النقطة المطلوبة $\wp$ التى يمكن حينئذ تعيين رقمها إما باعتبارها إحدى نقط المستقيم α أو إحدى نقط المستوى A وهذا الرقم فى (شكل ١٣٦) هو ٥,٦ من الوحدات .

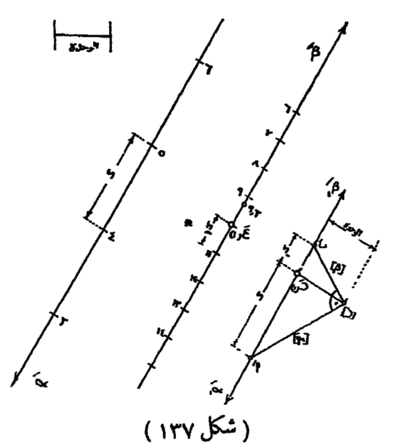
الفصل الرابع

مسائل القياس

بند ١٥٣ : المسألة الاولى

اذا علم مستو A ونقطة ع فالمطلوب ايجاد العمود المرسوم من النقطة ع على المستوى A وبالعكس اذا علم مستقيم ونقطة فالمطلوب تعيين المستوى المار بالنقطة عمودياً على المستقيم .

قبل أن نبدأ بحل هذه المسألة نشرح فيما يلى الشرط اللازم والكافى لتعامد مستقيمين فى الفراغ اذا توازى (أو انطبق) مسقطاهما :



(شكل ١٣٧)

لذلك نفرض فى (شكل ١٣٧) أن α' ، β' المسقطان المتوازيان للمستقيمين غير المتقاطعين α ، β وأن ى ، ى$_1$ هما المعدلان على α' ، β' على التوالى . فاذا افترضنا نقطة فى الفراغ مثل ۏ ورسمنا منها مستقيمين α_1 ، β_1 يوازيان α ، β على التوالى فان α_1 ، β_1 يعينان فى هذه الحالة مستوياً عمودياً على Π ويتعين هذا المستوى بأثره وهو المستقيم المرسوم من ۏ′ موازياً الى α' أو β' وبتطبيق هذا المستوى على Π نحصل على المثلث [ۏ] ا′ ب′

المبين بالشكل (حيث ا′ ، ب′ هما أثرا α_1 ، β_1 على II لاننا فرضنا رقم ه مساويا للوحدة) وتكون الزاوية المحصورة بين ضلعيه [ه] ا′ ، [ه] ب′ (اللذين هما موقعا المستقيمين α_1 ، β_1) هى المقدار الحقيقى للزاوية المحصورة بين α_1 ، β_1 وكذا بين α ، β فلكى تكون هذه الزاوية قائمة يجب أن يكون

$$ى \times ى_1 = -1$$

وهذا هو الشرط اللازم والكافى لتعامد المستقيمين α ، β اللذين مسقطاهما متوازيان [1] . ومعنى هذا الشرط :

أولا — أن المعدلين ى ، ى$_1$ عددان متعاكسان

ثانيا — أن اتجاه تدريج أحد المستقيمين مضاد لاتجاه الآخر .

وبالعكس اذا توافر هذان الشرطان فى مستقيمين متوازيين α' ، β' كان α' ، β' المسقطين المدرجين أو مقياسى الميل لمستقيمين α ، β متعامدين فى الفراغ .

واذا كان أحد المعدلين معلوماً أمكن ايجاد المعدل الآخر . فاذا فرضنا فى (شكل ١٣٧) أن مستقيما α معلوم بمسقطه المدرج α' (أى أن المعدل ى معلوم) ورسمنا من المسقط المرقوم ع′$_{(10)}$ لنقطة مثل ع مستقيما β' يوازى α' ثم درّجنا β' فى الاتجاه المضاد لتدريج α' بحيث يكون المعدل ى$_1$ على β' هو مقلوب المعدل ى كان β هو المسقط المدرج أو مقياس الميل لمستقيم β مار بالنقطة ع ومتعامد مع المستقيم α .

فاذا اعتبرنا α' فى (شكل ١٣٧) مقياس ميل لمستو معلوم مثل A (ويجب لذلك تصوره مرسوما مزدوجا فى الشكل) فان المستقيم β السالف الذكر يكون

(١) يمكن كتابة هذا الشرط على الصورة م × م$_1$ = −١ (حيث م ، م$_1$ هما ميلا المستقيمين α ، β) وهى الصورة التى تستعمل عادة فى الهندسة التحليلية .

فى هذه الحالة هو العمود النازل من ع على المستوى A واذا كان α' مسقطاً لمستقيم معلوم α كان β' مقياس ميل المستوى المار بالنقطة ع عمودياً على المستقيم α (ويكون β هو المستقيم ذو الميل الاعظم المار بالنقطة ع فى هذا المستوى)

وبذا نكون قد انتهينا من حل المسألة الاولى بجزئيها [1] .

بند ١٥٤ : المسألة الثانية

المطلوب تطبيق مستو معلوم A على المستوى الرقمى Π أو على أحد المستويات الموازية له .

لا تختلف هذه المسألة عن المسألة المشابهة فى طريقة مونج للاسقاط (بند ١٧) ولذا سنكتفى بحل مثال يبين الخطوات الرئيسية فى عملية التطبيق فى الاسقاط الرقمى :

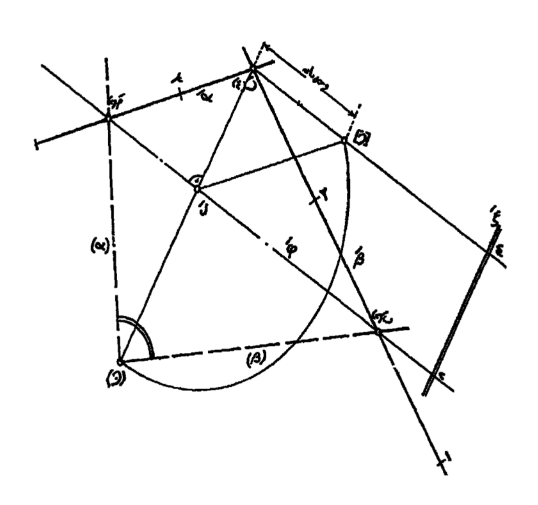
اذا علم مستقيمان α ، β متقاطعان فى ح فالمطلوب ايجاد المقدار الحقيقى للزاوية المحصورة بينهما . فهذه الزاوية يمكن الحصول عليها بتطبيق المستوى A المتعين بالمستقيمين المعلومين (شكل ١٣٨) حتى يصير موازيا (أو منطبقا) على المستوى الرقمى Π .

لذلك نختار مستويا مناسبا Φ موازيا الى Π ونطبق المستوى A عليه (وقد اخترنا فى الشكل المستوى الذى منسوبه ٢) حيث محور الانطباق هو الافقى φ الذى

---

(١) اذا فرضنا أن رقم النقطة ع فى (شكل ١٣٧) ليس عدداً صحيحاً مثلا ٩,٣ فاننا نبدأ كما تقدم بتعيين $ى_1$ وذلك برسم مثلث قائم الزاوية مثل [ح] ا' ب' (وقد جرت العادة تسهيلا للعمل بأن يرسم هذا المثلث بحيث تنطبق النقطتان ا' ، ح' على نقطتين من نقط تدريج α') ثم نقيس على β' ابتداء من ٩,٣ إما ٠,٣ $ى_1$ فى اتجاه السهم أو ٠,٧ $ى_1$ فى الجهة الاخرى لنحصل على النقطة التى رقمها ٩ أو النقطة التى رقمها ١٠ على التوالى ثم نكمل تدريج β' كما تقدم .

منسوبه يساوى منسوب المستوى Φ (فى شكل ١٣٨ φ' هو المستقيم الذى يصل نقطتى التدريج ا′$_{(٢)}$، ب′$_{(٢)}$ على α'، β') . فاذا أنزلنا من ه′ عموداً على φ' ليقابله فى ل′ وقسنا على هذا العمود ابتداء من ل′ البعد ل′ (ه) = ل′ [ه] = وتر المثلث القائم الزاوية الذى أحد أضلاعه ه′ل′ وضلعه الآخر ارتفاع النقطة.



(شكل ١٣٨)

بند ١٥٥ : أمثلة تطبيقية

مثال ١ : المطلوب تعيين الزاوية الزوجية بين مستويين معلومين.

معروف أن أى مستو عمودى على المستويين المعلومين (أى عمودى على خط تقاطعهما) يقطعهما فى مستقيمين يحصران بينهما زاوية مستوية مساوية للزاوية الزوجية المطلوبة. وعلى هذا يمكن تلخيص خطوات الحل الفراغى فيما يلى :

أولا ــ نجد خط التقاطع σ للمستويين المعلومين A و B .

ثانياً ــ نختار نقطة مثل ه على σ ونجد المستوى Σ الذى يمر بالنقطة ه عمودياً على σ فيكون Σ مستوياً عمودياً على المستويين المعلومين.

ثالثاً ــ نعين خطى تقاطع Σ مع A و B وسنرمز لهما بالرمزين α و β على التوالى.

رابعاً ــ نجد المقدار الحقيقى للزاوية المستوية بين α و β وذلك بتطبيق المستوى Σ كما تقدم فى (بند ١٥٤) فيكون هو مقدار الزاوية الزوجية بين المستويين.

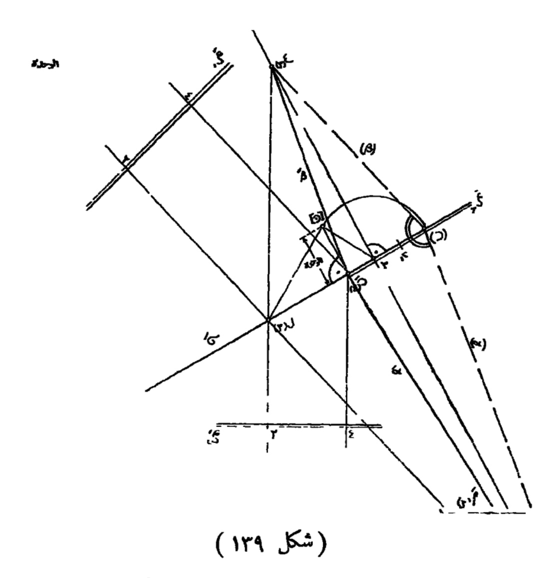
ويجد القارىء هذه الخطوات محلولة إسقاطياً فى (شكل ١٣٩) فالمستويان A و B معلومان بمقياسى ميليهما ى'١ و ى'٢ وقد اكتفينا برسم الافقيين ٣ و ٤ فى كل منهما واقتصرنا كذلك على رسم الجزء ه'(٤) ل'(٣) من المسقط σ' لخط التقاطع. فاذا كان ى'٣ هو مقياس ميل المستوى Σ المرسوم من النقطة ه'(٤) عموديا على σ (بند ١٥٣) وكانت ٣١ على هذا المقياس هى مسقط النقطة التى ارتفاعها ٣ وحدات[1] فان العمود المقام من ٣١ على ى'٣ يقابل العمود المقام على ى'١ من النقطة ٣ فى النقطة ا'(٣) كما يقابل العمود المقام على ى'٢ من ٣ فى النقطة ب'(٣) فاذا وصلت النقطة ه'(٤) بالنقطتين ا'(٣) و ب'(٣) حصلنا على المسقطين α' و β'

---

(١) للحصول على ٣١ نقيس على العمود المقام من ه' على σ' بعداً ه' [ه] مساوياً الوحدة ثم نصل [ه] ل' فالعمود المقام على هذا الواصل من النقطة [ه] يقابل ى'٣ (الذى افترضناه منطبقاً على σ') فى النقطة ٣١ .

لخطى تقاطع Σ مع المستويين A ، B . وبتطبيق المستوى Σ على المستوى الافقى الذى منسوبه ٣ مثلا نحصل على الموقعين (α) ، (β) للمستقيمين α ، β وبذا يكون المقدار الحقيقى للزاوية الزوجية المطلوبة هو الزاوية أ' (ج) ب' أو المكملة لها .

ملحوظة : أى مستويين متقاطعين يحصران بينهما فى الواقع زاويتين زوجيتين مجموعهما ١٨٠° فاذا تكلمنا عن «الزاوية الزوجية» بين مستويين فانما نقصد بذلك مع



(شكل ١٣٩)

التجاوز إحدى هاتين الزاويتين وذلك كما نتكلم مع التجاوز أيضاً عن «الزاوية المحصورة» بين مستقيمين متقاطعين فى حين أنهما يحصران بينهما زاويتين لا زاوية واحدة .

والزاوية الزوجية بين مستويين يمكن قياسها أيضاً كما هو معلوم بالزاوية

المستوية المحصورة بين العمودين النازلين على المستويين من أية نقطة فى الفراغ وهذه طريقة أخرى لتقدير الزاوية الزوجية ربما كانت فى بعض الاحيان أبسط من الطريقة السابقة .

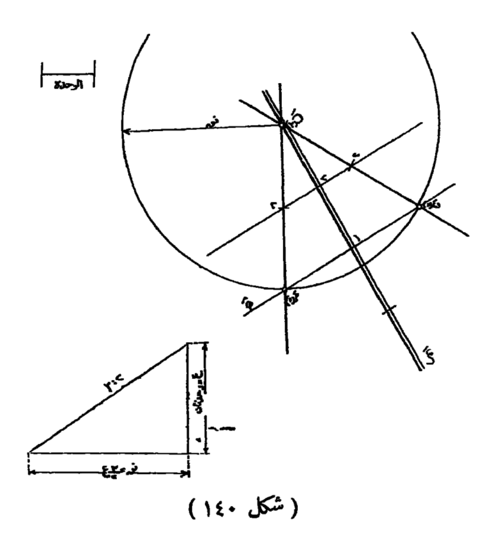
مثال ٢ : المطلوب تعيين اتجاهى المستقيمات التى ميلها على المستوى الرقمى II يساوى ٢ : ٣ مثلا والواقعة فى مستو A معلوم بمقياس ميله ع′ .

الحل الفراغى لهذا المثال يتلخص فى اختيار نقطة ما مثل ه فى المستوى A واعتبارها رأساً لمخروط دائرى قائم محوره عمودى على II ويميل عليه بزاوية ظلها $\frac{٢}{٣}$ فيتقاطع حينئذ المستوى A مع هذا المخروط فى راسمين يحددان الاتجاهين المطلوبين . وللحصول على هذين الراسمين نختار مستوياً أفقياً مناسبا Φ ليقطع المستوى A فى أحد أفقياته φ ويقطع المخروط فى دائرة نصف قطرها ىه = $\frac{٣}{٢}$ ع (حيث ع ارتفاع المخروط) فاذا كانت ١ ، ب نقطتى تقاطع φ مع هذه الدائرة كان الراسمان أو الاتجاهان المطلوبان هما المستقيمان ه ١ ، ه ب .

ففى (شكل ١٤٠) النقطة ه′$_{(٣)}$ هى المسقط المرقوم للنقطة ه فى المستوى A وهى فى الوقت نفسه مركز الدائرة التى نصف قطرها ىه = $\frac{٣}{٢}$ × ٢ = ٣ وحدات والتى تمثل قاعدة المخروط الذى رأسه ه وزاوية قاعدته هى ظا$^{-١}$ $\frac{٢}{٣}$ وارتفاعه ع = ٣ − ١ = ٢ وحدة (لان المستوى الافقى Φ الذى اخترناه منسوبه ١) . فاذا كان φ′ مسقط أفقى المستوى A الذى منسوبه ١ وتقاطع φ′ مع هذه الدائرة فى ١′$_{(١)}$ ، ب′$_{(١)}$ كان المستقيمان ه′ ١′ ، ه′ ب′ مسقطى الاتجاهين المطلوبين .

ملحوظ : المستقيم φ′ إما أن يقطع قاعدة المخروط فى نقطتين منفصلتين مثل ١′ ، ب′ كما هو الحال فى (شكل ١٤٠) وفى هذه الحالة يكون للمسألة حلان

(أى أنه يمكن من أية نقطة فى المستوى A رسم مستقيمين واقعين بتمامهما فى A بحيث يميل كل منهما على المستوى الرقمى Π بميل يساوى ٢ : ٣) أو يكون مماسا لهذه القاعدة وفى هذه الحالة لا يكون للمسالة سوى حل واحد (حيث يكون



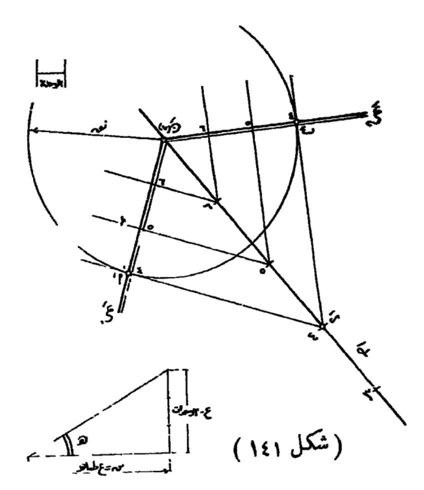
(شكل ١٤٠)

الاتجاه المطلوب هو اتجاه المستقيمات ذوات الميل الاعظم فى المستوى A) واخيراً يجوز أن يكون φ′ غير قاطع لقاعدة المخروط وفى هذه الحالة يتعذر الحل . وهذه الحالات الثلاث يكون حدوثها على حسب ما اذا كان ميل A $\lesseqgtr$ ٢ : ٣ على التوالى .

مثال ٣ : المعلوم مستقيم α والمطلوب تعيين المستويين A ، B المارين به واللذين يميل كل منهما على المستوى الرقمى Π بزاوية مقدارها هـ°.

لذلك نختار نقطة مثل ۻ على α ونعتبرها رأسا لمخروط دورانى محوره عمودى على Π وزاوية قاعدته تساوى هـ° ثم نختار مستوياً أفقياً مناسباً Φ يقطع α فى نقطة مثل ر ويقطع المخروط فى دائرة نصف قطرها س = ع ظتا هـ° (حيث ع ارتفاع المخروط) فاذا رسم من ر مماسان لهذه الدائرة فان هذين المماسين يعينان مع النقطة ۻ المستويين المطلوبين A ، B .

ففى (شكل ١٤١) النقطة ۻ′$_{(٧)}$ هى المسقط المرقوم للنقطة ۻ على α وقد اخترنا المستوى الافقى Φ الذى منسوبه ٤ ليقطع المستقيم α فى النقطة ر التى مسقطها المرقوم ر′$_{(٤)}$ ويقطع المخروط الذى رأسه ۻ فى دائرة مركزها ۻ′ ونصف



(شكل ١٤١)

قطرها س = ع ظتا هـ° حيث ع = ٧ — ٤ = ٣ وحدات . فاذا رسم من ر′ المماسان ر′ا′ ، ر′ب′ للدائرة ووصل المستقيمان ۻ′ا′ ، ۻ′ب′ كانا هما مقياسا الميل ع$_١$′ ، ع$_٢$′ للمستويين المطلوبين A ، B .

ملحوظة : يكون لهذه المسألة حلان أو حل واحد أو تكون مستحيلة الحل على حسب ما اذا كانت الزاوية هـ $\lesseqgtr$ ى اذا فرضنا أن ى هى الزاوية التى يميل بها المستقيم المعلوم α على Π

الباب التاسع

السطوح الطبوغرافية

الفصل الاول

كلمـــة عامة وتعـــاريف

بند ١٥٦ : ماهية السطوح الطبوغرافية

قدمنا فى (بند ٤٢) أن السطوح يمكن تقسيمها على وجه العموم الى قانونية وغير قانونية على حسب ما اذا كان يمكن أو لا يمكن اعتبارها متولدة عن خط معين يتحرك بحيث يكون خاضعاً أثناء الحركة لقانون معين . وقد رأينا فى الابواب السابقة أمثلة كثيرة على النوع الاول فالسطوح الدورانية واللولبية والمسطرة الخ كلها من النوع القانونى بحيث يكفى لكى يتحدد أى سطح منها أن يعلم المنحنى الراسم وقانون حركته .

أما فى السطوح غير القانونية فانه ينشأ عن عدم إمكان بيانها بحركة مثل ذلك المنحنى الراسم ضرورة معرفة أكبر عدد ممكن من نقطها ومنحنياتها ليكون من المستطاع وصفها على وجه التقريب . وتعطى هذه المنحنيات عادة بمساقطها على صورة منحنيات بيانية مرسومة على الورقة ومحددة للسطح ولهذا السبب يطلق أحياناً على السطوح غير القانونية اسم سطوح بيانية .

ومن أهم الامثلة على هذا النوع من السطوح — سطح الارض بارتفاعاته وانخفاضاته وسهوله ووديانه ويطلق عليه عادة اسم السطح الطبوغرافى نسبة الى

الطبوغرافيا وهو العلم الذى يبحث فى كيفية الحصول على النقط والمنحنيات المحددة لقطعة من الارض ورسمها بيانياً على الورقة .

بند ١٥٧ : خطوط المنسوب

جرت العادة كما قدمنا فى (بند ١٤٠) على استخدام طريقة الاسقاط الرقمى لتمثيل السطوح الطبوغرافية وفى هذه الحالة يكون المستوى الرقمى (مستوى الورقة) ممثلا لسطح البحر ومنسوبه صفر — كما جرت على اختيار منحنيات خاصة على السطح الطبوغرافى يطلق عليها اسم خطوط المنسوب أو منحنيات المنسوب أو خطوط الكنتور لتحديد السطح (شكل ١٤٢) . وتمثل هذه الخطوط منحنيات م السطح الطبوغرافى مع مستويات أفقية (موازية للمستوى الرقمى) يرتفع كل منها عن الآخر بمقدار ثابت ع وكل خط من هذه الخطوط مثل الخط ٢١ فى الشكل هو المحل الهندسى لجميع النقط الواقعة على سطح قطعة الارض المبينة والتى منسوب كل منها ٢١ وحدة (متراً) فوق سطح البحر[1] .

(شكل ١٤٢)

ويستطيع القارىء أن يكوّن لنفسه فكرة عن هذه الخطوط اذا لاحظ شاطىء نهر مثلا بعد انحسار المياه عنه .

(١) اذا كانت إحدى النقط تحت سطح البحر فان منسوبها يكون سالباً على أنه اذا كانت قطعة الارض كلها أوطى من سطح البحر فيكتفى عادة حينئذ بكتابة المناسيب كلها مجردة عن الاشارات السالبة .

بند ١٥٨ : الخرائط الطبوغرافية

تسمى الخريطة المحتوية على مجموعة من خطوط المنسوب المحددة لقطعة من الارض خريطة طبوغرافية لهذه القطعة أو خريطة كنتور أو خريطة ذات مناسيب .

والذى يلاحظه الانسان اذا القى نظرة على خريطة طبوغرافية مثل الخريطة المبينة فى (شكل ١٤٢) أننا من الوجهة النظرية نجهل كل مايتعلق باجزاء سطح الارض الممثلة بالشرائط المحصورة بين كل خطين متتاليين من خطوط المنسوب بمعنى أن منسوب النقطة ى التى مسقطها ى′ فى هذه الخريطة مجهول نظرياً ولكنه فى الواقع معلوم ويساوى بالتقريب ١٧,٥ كما سيأتى بيانه وذلك لاننا نفترض عادة أن السطح منتظم فى شكله الى حد ما وأن ليست هناك تغييرات فجائية كبيرة .

ويؤخذ مما تقدم أنه كلما كثرت خطوط المنسوب وصغرت بذلك تلك الشرائط التى لايمكن الحكم عليها الا بوجه التقريب أو بمعنى آخر كلما صغر الارتفاع ع الذى أشرنا اليه فى (بند ١٥٧) بين كل مقطع أفقى وآخر — كلما كان تحديد السطح أدق على أن هذه الدقة تتوقف على نوع العمل المطلوب انشاؤه على قطعة الارض ويتراوح الفرق بين منسوبى أى خطين متتاليين من خطوط المنسوب عادة من ١ الى ٥٠ مترا .

بند ١٥٩ : عدم تقاطع خطوط المنسوب فى الخرائط العادية

لما كانت معظم أجزاء سطح الارض هى بحيث أن أى مستقيم رأسى يلاقى السطح فى نقطة واحدة فانه ينشأ عن ذلك عدم إمكان تقاطع أى خطين مختلفين من خطوط المنسوب فى الخرائط العادية وإلا كان معنى ذلك أن المستقيم الرأسى المار بنقطة التقاطع يلاقى السطح فى نقطتين مختلفتين . على أن هذا لايمنع من وجود نقط على سطح الارض يمكن أن يتقاطع عندها خط واحد من خطوط المنسوب مرة أو أكثر (مثل النقطة المعقودة فى شكل ٤٠) .

بند ١٦٠ : مهمة الهندسة الوصفية

اذا اريد عمل مشروع مثل انشاء طريق أو شريط سكة حديد على قطعة من الارض فان أول مايجب القيام بعمله هو مسح هذه القطعة برفع نقطها المختلفة أى نقلها من الطبيعة الى ورقة الرسم وذلك بواسطة الطرق المختلفة المستعملة فى المساحة وبتوصيل النقط المتساوية المنسوب بعضها ببعض نحصل على خريطة طبوغرافية لقطعة الارض مبيناً عليها خطوط المنسوب .

وبعد الانتهاء من هذه العملية وتخطيط المشروع على الخريطة تستخدم نظريات الهندسة الوصفية فى تعيين ورسم منحنيات تقاطع سطوح الميل مع سطح الارض وكذا المقاطع العرضية والطولية مبيناً عليها مقادير الحفر والردم الى غير ذلك مما سنبينه فى الفصول التالية .

الفصل الثانى

بعض المسائل الاساسية

١٦١ : تقاطع السطح الطبوغرافى مع

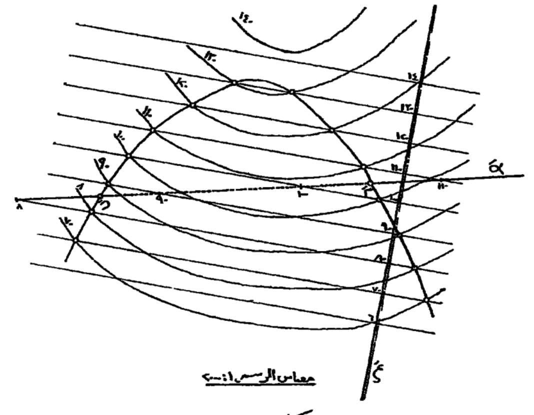
يبين (شكل ١٤٣ ا) خريطة طبوغرافية لقطعة من الارض ومقياس الميل ﻉ' لمستو A مائل على مستوى المقارنة Π فاذا رسمت من نقط التدريج ٧٠ ، ٨٠ ، ٩٠ ، . . . مستقيمات عمودية على ﻉ' فقطع كل مستقيم منها خط المنسوب المتساوى معه فى الارتفاع فى نقطتين أو اكثر كان المنحنى الذى يصل هذه النقط هو مسقط خط تقاطع سطح الارض مع المستوى المعلوم ويلاحظ فى رسم هذا المنحنى أن يكون متصلا ومنتظماً بقدر الامكان وألا يكون به بروزاً فجائياً . واذا أريد ايجاد الشكل الحقيقى لخط التقاطع يطبق المستوى A على أحد المستويات الافقية الموازية الى Π .

والمستوى Φ فى (شكل ١٤٣ ب) العمودى على Π والذى يمثله الاثر Φ' يسمى أحياناً «مستوى بروفيل» ويقطع السطح الطبوغرافى فى منحن يطلق عليه اسم *المقطع الجانبى أو البروفيل* . واذا فرضنا أنه يراد إنشاء مشروع ما على قطعة الارض المبينة بالشكل فان هذا المقطع الجانبي يسمى *مقطعاً طولياً* أو *عرضياً* على حسب ما اذا كان المستوى Φ ماراً بمحور المشروع (اذا فرضنا أن هذا المحور خط مستقيم) أو عمودياً عليه (١) .

ولايجادالشكل الحقيقى للمقطع الجانبي يلزم تطبيق المستوى القاطع Φ على أحد المستويات الموازية الى Π ويختار عادة هذا المستوى بحيث يكون منسوبه مساوياً

---

(١) اذا كان محور المشروع منحنياً فان المقطع الطولى يطلق حينئذ على منحنى تقاطع السطح الطبوغرافى مع الاسطوانة التى رواسمها رأسية ودليلها المحور المنحنى .



(شكل ١٤٣ ا)

على الاقل لمنسوب أوطى نقطة على المقطع (وهذا المنسوب هو ٢٠ فى شكل ١٤٣ ب). ويحسن منعاً لتزاحم الخطوط إجراء عملية التطبيق فى هذه الحالة بعيداً عن الخريطة الطبوغرافية وذلك بنقل المستقيم اَ بَ ... سَ صَ كما هو الى الفضاء المتسع من ورقة الرسم وإقامة أعمدة على هذا المستقيم من النقط بَ ٢ حَ ٢ ... فاذا قيس على هذه الاعمدة البعد بَ ب مساوياً الى زيادة ارتفاع النقطة ب عن المنسوب ٢٠ أى مساوياً الى متر واحد والبعد حَ ح مساوياً الى ٢ متر وهكذا فان المنحنى اَ ب ح ء ھ و س صَ يمثل حينئذ الشكل الحقيقى للمقطع . ونظراً الى أن مقياس الرسم فى الخرائط الطبوغرافية يؤخذ عادة صغيراً (فهو فى شكل ١٤٣ ب مثلا يساوى ١ : ٢٠٠٠) بحيث يكون من الصعب بيان الارتفاعات بَ ب ٢ حَ ح ٢ ... بمثل هذا المقياس لانها تكون فى هذه الحالة صغيرة صغراً لا يسمح بتمييز شكل المقطع — لذلك جرت العادة للتغلب على هذه الصعوبة بتغيير مقياس الرسم للارتفاعات وتكبيره ١٠ أضعاف أو ٢٠ ضعفاً عن مقياس الرسم للخريطة . ففى (شكل ١٤٣ ب) فرضنا أن مقياس الرسم للخريطة وبالتالى للاطوال اَ بَ ٢ بَ حَ ٢ ... هو ١ : ٢٠٠٠ فى حين أن مقياس الرسم الارتفاعات هو ١ : ٢٠٠ .

ويلاحظ أنه لا زوايا الميل ولا الاطوال ا ب ٢ ب ح ٢ ... على المنحنى تظهر فى مثل هذا الشكل المكبّر على حقيقتها ولكن لما كان هذا الشكل مؤتلفاً مع الشكل الحقيقى للمقطع (الذى يمكن الحصول عليه بجعل مقياس الرسم للارتفاعات مساوياً لمقياس الرسم للاطوال) ائتلافاً متوازياً حيث محور الائتلاف هو المستقيم اَ صَ (بند ١٢) لذا كانت المساحة الحقيقية مساوية لمساحة المقطع المكبر مقسومة على النسبة بين مقياسى الرسم للارتفاعات وللاطوال (نسبة الائتلاف) وهذه النسبة تساوى ١٠ فى (شكل ١٤٣ ب) .

بند ١٦٢ : تعيين منسوب نقطة على السطح اذا علم مسقطها

لنفرض فى (شكل ١٤٣ب) أن ﻫ' مسقط نقطة مثل ﻫ من نقط السطح الطبوغرافى يراد تعيين منسوبها . لذلك نرسم مستقيما ما مثل Φ' يمر بالمسقط ﻫ' ونعتبره أثراً لمستو مثل Φ عمودى على II ثم نعين كما تقدم المقطع الجانبى للسطح الطبوغرافى بالمستوى Φ فاذا كانت النقطة ﻫ' موضع المسقط على المستقيم ا' ص' فى وضعه الجديد وأقمنا منها عموداً يقابل المنحنى ا' ب حـ ء . . . فى ﻫ كان منسوب ﻫ يساوى منسوب ا زائداً الارتفاع الحقيقى ﻫ' ﻫ (وهذا الارتفاع فى الشكل يساوى ١,٣ متراً فيكون منسوب ﻫ هو ٢١,٣ تقريباً) .

وفى كثير من الحالات يكتفى بتقدير منسوب النقطة المعلوم مسقطها بالنظر أو بالطريقة الآتية وهى أبسط من السابقة وإن كانت أقل دقة :

نفرض أن م' مسقط النقطة فنرسم مستقيما ع' ط' يمر بهذا المسقط بحيث يقابل خطى المنسوب المحيطين به فى ع' ، ط' على زاويتين قائمتين بالتقريب (شكل ١٤٣ب) ثم نقيس على العمود المقام من ع' على ع' ط' البعد ع' [ع] ليمثل بمقياس الرسم للارتفاعات متراً واحداً (هو الفرق بين منسوبى ع ، ط) ونصل [ع] ط' بمستقيم يمكن اعتباره على وجه التقريب الشكل الحقيقى لمنحنى تقاطع هذا الجزء الصغير من السطح الطبوغرافى مع مستوى البروفيل الذى يمثله الاثر ع' ط' . وبذا يكون منسوب النقطة م مساوياً منسوب النقطة ط زائداً الارتفاع الحقيقى م' [م] (وهذا المنسوب هو ٢٢,٧ تقريباً فى الشكل) .

ويؤخذ من تشابه المثلثات فى هذه الحالة أن

$$م'[م] = \frac{ط'م'}{ط'ع'} \times ع'[ع] = \frac{ط'م'}{ط'ع'} = \text{تقريباً}\ \frac{ط_1'م'}{ط_1'ع_1'}$$

حيث $ط_1'$ ، $ع_1'$ نقطتا تقاطع خطى المنسوب ٢٢ ، ٢٣ مع أى مستقيم آخر مار بالمسقط م' ويكون التساوى الاخير أقرب الى الصحة كلما صغر المنحنيان ط' $ط_1'$ ، ع' $ع_1'$ وأمكن اعتبارهما بالتقريب مستقيمين متوازيين .

فاذا أمكن استخدام مسطرة مدرّجة توضع على م' بحيث يكون ط١' ح١' مساوياً ١ سم مثلا فان ط١' م' يعطينا مباشرة فى هذه الحالة زيادة منسوب النقطة م على منسوب النقطة ط١ (و يجب أن يساوى لذلك ٠,٨ سم).

بند ١٦٣ : استكمال خطوط المنسوب

اذا علمت خريطة طبوغرافية فاننا نعنى بعملية الاستكمال هذه إنشاء خطوط منسوب جديدة ورسمها بين خطوط المنسوب القديمة المعلومة . وتتلخص هذه العملية فى تعيين مساقط عدة نقط معلومة مناسيبها فهى إذن عكس العملية المذكورة فى البند السابق . فلانشاء خط الكنتور ٢٠,٥ المبين فى (شكل ١٤٣ب) بخطوط متقطعة نرسم عدة مستقيمات تكون بقدر الامكان عمودية على خطى المنسوب ٢٠ ، ٢١ ثم ننصفها فى نقط يمكن اعتبارها مساقطاً لنقط على السطح مناسيبها كلها بالتقريب ٢٠,٥ ويكون إذن خط المنسوب ٢٠,٥ هو المنحنى الذى يصل تلك النقط فى المسقط .

بند ١٦٤ : نقط تقاطع خط مستقيم مع سطح طبوغرافى

اذا أمررنا بالمستقيم المعلوم مستوياً حيثما اتفق يقطع السطح فى منحن فان نقط تقاطع هذا المنحنى مع المستقيم تكون النقط المطلوبة .

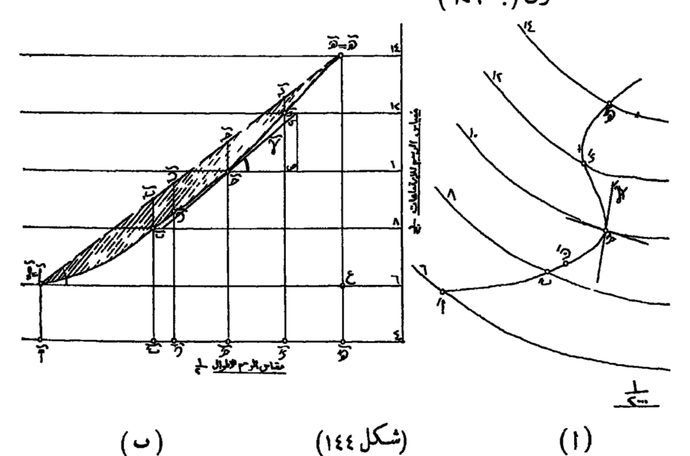
فلنفرض فى (شكل ١٤٣ ا) أن α' مقياس الميل لمستقيم مثل α يراد تعيين نقط تقاطعه مع السطح فاذا رسمنا من نقط التدريج على α' مستقيمات متوازية فى أى اتجاه فانه يمكن اعتبارها مساقط لافقيات مستو A مار بالمستقيم α (ويكون مقياس الميل ئ' لهذا المستوى هو أى مستقيم عمودى على تلك المستقيمات) فاذا رسمنا فى المسقط منحنى تقاطع هذا المستوى مع السطح الطبوغرافى كما تقدم فى (بند ١٦١) وتقاطع α' مع هذا المنحنى فى م' ، ى' كانت هاتان النقطتان مسقطى نقطتين م ، ى من نقط تقاطع المستقيم α مع السطح .

الفصل الثالث

الخطوط المنحنية على سطح طبوغرافى

بند ١٦٥ : المنحنيات المستوية والمنحنيات الفراغية

المنحنى المبين فى (شكل ١٤٣ ا) هو كما قدمنا خط تقاطع المستوى A مع السطح الطبوغرافى فهو واقع بتمامه فى المستوى A أى منحن مستو مرسوم على السطح. ويكفى لتمثيل مثل هذا المنحنى أن يعلم مسقطه والمستوى المرسوم فيه إذ أن منسوب أية نقطة واقعة على المنحنى يمكن تعيينه فى هذه الحالة بدقة باعتبارها إحدى نقط المستوى (بند ١٤٩) .



(ب) (شكل ١٤٤) (ا)

أما اذا رسم منحن حيثما اتفق ا ب حـ ء هـ ... على السطح فانه يكون على وجه العموم منحنياً فراغياً وفى هذه الحالة يمكن تعيين منسوب أية نقطة من نقطه باعتبارها واقعة على السطح الطبوغرافى المعلوم (بند ١٦٢) . فاذا كان

أ' ب' ح' ؤ' هـ' فى (شكل ١٤٤ ا) مسقط مثل هذا المنحنى وعلم السطح الطبوغرافى بخطوط المنسوب ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ... وكانت ا' ، ب' ، ... هى نقط تقاطع المسقط مع هذه الخطوط فان مناسيب النقط ا ، ب ، ح ، ؤ ، هـ تساوى ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ على التوالى .

بند ١٦٦ : خط تقاطع سطح طبوغرافى مع اسطوانة رأسية الرواسم

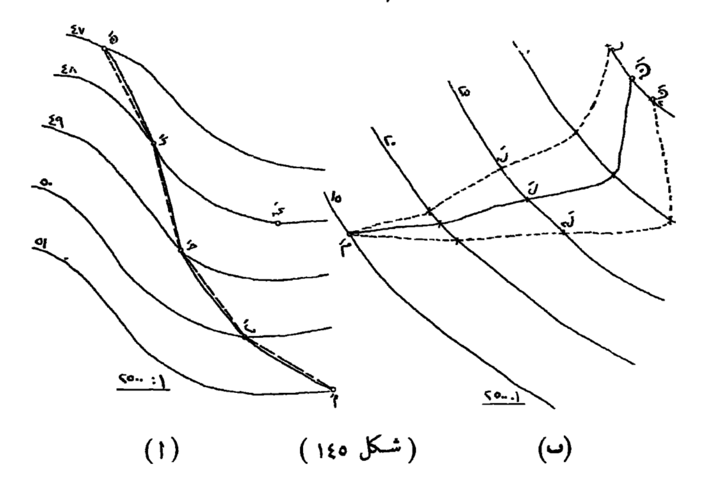
اذا فرضنا فى (شكل ١٤٤ ا) أن ا' ب' ح' ؤ' هـ' هو المسقط المشترك لمنحن ا ب ح ؤ هـ مرسوم على السطح ومنحن آخر $ا_١$ $ب_١$ $ح_١$ $ؤ_١$ $هـ_١$ (غير واقع على السطح) وأن هذا المنحنى الاخير يمثل محور شارع أو خط سكة حديد مطلوب إنشاؤه على قطعة الارض المبينة فى الشكل وفرضنا أنه يراد رسم مقطع طولى للمشروع فالمنحنى ا ب ح ؤ هـ يمكن اعتباره منحنى تقاطع السطح الطبوغرافى مع الاسطوانة التى رواسمها رأسية ودليلها هذا المنحنى (أو المنحنى $ا_١$ $ب_١$ $ح_١$ ...) وفى هذه الحالة يكون المقصود برسم المقطع الطولى للمشروع هو بسط هذه الاسطوانة ورسم مآلى المنحنيين المشار اليهما . فنرسم لذلك فى (شكل ١٤٤ ب) مستقيما ما ونفرض أنه يمثل المنسوب ٤ ثم نقيس عليه ابتداء من أية نقطة مثل اَ' البعد اَ' بَ' مساوياً بالتقريب طول المنحنى ا' ب' فى (شكل ١٤٤ ا) ونقيس بالمثل البعد بَ' حَ' مساوياً طول المنحنى ب' ح' وهكذا فاذا قيس على الاعمدة المقامة على المستقيم اَ' بَ' حَ' ... الارتفاعات اَ' اَ ، بَ' بَ ، حَ' حَ ، ... مساوية على التوالى الى ٢ ، ٤ ، ٦ ، ... متراً فان المنحنى اَ بَ حَ ... يمثل حينئذ المآل المطلوب (مكبراً ١٠ مرات) للمنحنى ا ب ح ؤ هـ . وبالمثل يمكن رسم المآل $اَ_١$ $بَ_١$ $حَ_١$ ... لمحور المشروع اذا علمت مناسيب النقط $ا_١$ ، $ب_١$ ، $ح_١$ ، ...

على أن رسم هذا المآل الاخير يتوقف عادة على طبيعة وشكل سطح الارض (التى يمكن الحكم عليها بواسطة المقطع آ بَ حَ ...) فاذا فرضناه فى (شكل ١٤٤ ب) خطاً مستقيما هو آ١ هـ١ — ومعنى هذا أننا نفرض أن محور المشروع هو منحن ثابت الميل على المستوى الافقى يصل بين النقطتين ا ٩ هـ — فانه يمكن بالعكس بواسطة هذا المآل تحديد مناسيب النقط ا١ ٩ ب١ ٩ حـ١ ٩ ... على المحور كما يمكن الحكم على كمية الردم أو الحفر اللازمة ومن هنا تتبين أهمية هذه المقاطع الطولية فى الشؤون الفنية .

بند ١٦٧ : المنحنيات ذوات الميل الثابت

اذا كان γ′ فى (شكل ١٤٤ ا) هو مسقط المماس γ فى النقطة حـ للمنحنى ا ب حـ ء ... المرسوم على السطح وكانت ω هى الزاوية التى يميل بها هذا المماس على المستوى الافقى فان ميل المنحنى عند حـ يقاس حينئذ بظل الزاوية ω ولما كانت هذه الزاوية لا تتغير ببسط الاسطوانة المرسوم عليها المنحنى المذكور (بند ١٢٧) لذا كان من الممكن قياس هذا الميل من (شكل ١٤٣ ب) لانه يساوى الظل الحقيقى للزاوية س حَ ص أى يساوى $\frac{\text{س ص}/١٠}{\text{ص حَ}}$. ومن الواضح أن ميل المنحنى عند حـ يختلف عنه على وجه العموم عند أية نقطة أخرى على المنحنى وهذا بخلاف المنحنى ا١ ب١ حـ١ ء١ .. الذى مسقطه ا′ ب′ حـ′ .. أيضاً والذى يؤول بعد بسط الاسطوانة الى الخط المستقيم آ١ هـَ١ فان هذا المنحنى —مثله فى ذلك مثل المنحنى اللولبى— ثابت الميل فى جميع نقطه على المستوى الافقى (وهذا الميل الثابت يساوى الظل الحقيقى للزاوية هـَ١ آ١ ع) ويسمى مثل هذا المنحنى الفراغى منحنياً ذا ميل ثابت .

ولنفرض الآن (شكل ١٤٥ ا) أنه يراد رسم منحن ذى ميل ثابت معلوم وليكن ١/٥٠ أو ٢٪ (كما يطلق عليه اصطلاحاً فى الشؤون الفنية) يبدأ عند النقطة ا ويكون واقعاً على السطح الطبوغرافى المبين بالشكل. فنركز لذلك فى ا' على خط المنسوب ٥١ وبفتحه تساوى ٢ سم (وتمثل ٥٠ متراً بمقياس الرسم) نقطع خط المنسوب ٥٠ فى ب' ثم نركز فى ب' وبنفس الفتحة نقطع خط المنسوب ٤٩ فى حـ' وهكذا ثم نصل هـــذه النقط بالخطوط المستقيمة



(ا) (شكل ١٤٥) (ب)

ا' ب' ، ب' حـ' ، حـ' ء' ، ء' هـ' فمن حيث إن طول كل من هذه المستقيمات ثابت ويساوى فى الرسم ٢ سم وفى الطبيعة ٥٠ متراً ومن حيث إن كلا منها هو مسقط جزء من مستقيم محدود بنقطتين الفرق بين منسوبيهما متراً واحداً فينتج من ذلك أن جميع المستقيمات الصغيرة ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء هـ متساوية الميل على المستوى الافقى (وهذا الميل مقداره ٢٪). والخط المنكسر ا ب حـ ء هـ

وإن كان غير منطبق على السطح تماماً إلا أنه يؤول الى خط منحن منطبق على السطح إذا اعتبرنا اجزاءه ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء هـ صغيرة صغراً كافياً ويكون حينئذ الخط المنحنى ا ب حـ ء هـ منحنياً ذا ميل ثابت أو خط ميل ثابت واقعاً على السطح الطبوغرافى ومبتدئاً عند النقطة ا [1] . ولما كانت مثل هـــذه المنحنيات يمكن تدريجها كالخط المستقيم فانه يكفى لتمثيل خط ميل ثابت أن يعلم مسقطه وميله أو مسقطه ومنسوب أى نقطتين من نقطه .

وكثيراً ما يعرض المهندس لمنحنيات الميل الثابت فى تخطيط المشروعات والمسألة الآتية من الامثلة العملية المهمة على هذه المنحنيات :

المطلوب رسم خط الميل الثابت الذى يصل نقطتين معلومتين مثل م ، ن على سطح طبوغرافى .

حل هذه المسألة يتم عادة بطريقة التجربة المتكررة . فنفرض فى (شكل ١٤٥ ب) أن م′ ، ن′ الواقعتين على خطى المنسوب ١٥ ، ٣٥ هما مسقطا النقطتين م ، ن على السطح الطبوغرافى المبين بالشكل . فاذا فتحنا البرجل فتحة تساوى بالتقريب ¼ المستقيم م′ ن′ (لان الفرق بين منسوبى م ، ن يساوى ٤ أمثال الفرق بين خطين متتاليين من خطوط المنسوب) وأجرينا العمل بالطريقة المشروحة فى أول هذا البند حصلنا على خط الميل الثابت الذى مسقطه م′ ل′١ ن′١ والذى يبدأ عند النقطة م وينتهى بنقطة مثل ن١ تكون غالباً غير النقطة المعلومة ن إلا أنه بتغيير فتحة البرجل زيادة ونقصاً عدة

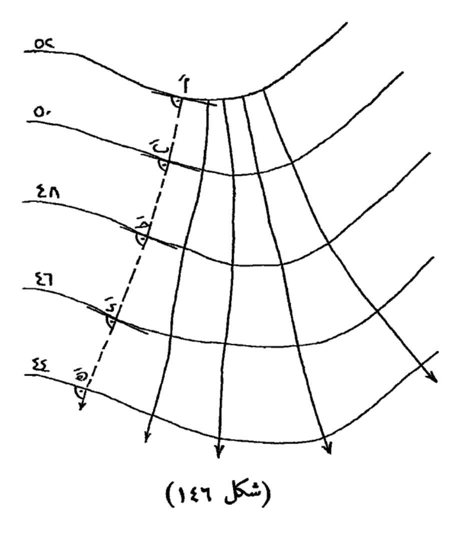
---

(١) يلاحظ أننا إذ نركز فى ا′ مثلا نستطيع بفتحة البرجل التى تتحدد بمعلومية الميل الثابت أن نقطع خط المنسوب التالى فى نقطتين على وجه العموم ومعنى هذا أن كل نقطة على السطح يمكن أن يمد منها على وجه العموم اتجاهان لخطى ميل ثابت .

مرات نحصل على خط الميل الثابت الذى مسقطه م′ ل′ ى′ والذى يبدأ النقطة م وينتهى بالنقطة ى نفسها فيكون هو المنحنى المطلوب .

١٦٨ : المنحنيات ذوات الميل الاعظم

لنفرض فى (شكل ١٤٦) أن ا′ نقطة ما على خط المنسوب ٥٢ رسمنا منها مستقيما ا′ ب′ عمودياً على المماس المرسوم عندها لخط المنسوب ٥٢ نفسه — ليقابل خط المنسوب التالى ٥٠ فى النقطة ب′ ومن ب′ أقمنا العمودى



(شكل ١٤٦)

ب′ ح′ على المماس المرسوم عندها لخط المنسوب ٥٠ وهكذا . فاذا اعتبرنا أجزاء الخط المنكسر ا′ ب′ ح′ ... صغيرة صغراً كافياً بحيث يمكن اعتبار المنحنى ا′ ب′ ح′ ى′ ﻫ′ مسقطاً لمنحن ا ب ح ى ﻫ واقع على السطح الطبوغرافى فان هذا

المنحنى الاخير يسمى منحنياً ذا ميل أعظم (١) . ويؤخذ من هذه العملية أنه لا يمكن رسم أكثر من خط واحد ذى ميل أعظم على وجه العموم من أية نقطة «عادية» على السطح الطبوغرافى . على أن هذا لا يمنع من وجود نقط شاذة على السطح يمكن أن يمد منها أكثر من خط واحد ذى ميل أعظم بل عدد لا نهاية له من هذه الخطوط كما هو الحال اذا كانت النقطة نقطة عليا أو سفلى فى هضبة أو وادى . وتمثل خطوط الميل الاعظم المرسومة من النقط المختلفة الى حد ما طرق سير المياه على السطح الطبوغرافى .

ولما كان المسقط ا′ ب′ ح′ ... للخط ذى الميل الاعظم المار بالنقطة ا متعامداً بالعمل على خطوط المنسوب فى نقط تقاطعه معها ولما كانت خطوط المنسوب تمثل منحنيات أفقية على السطح فينتج من ذلك أن الخطوط ذوات الميل الاعظم على سطح طبوغرافى وخطوط تقاطع السطح مع المستويات الافقية المختلفة تؤلفان مجموعتين من المنحنيات المتعامدة فى الفراغ وفى المسقط .

بند ١٦٩ : المماسات والمستويات المماسة للسطح الطبوغرافى

المماس γ فى النقطة ح للمنحنى ا ب ح ى ه (شكل ١٤٤) هو مماس للسطح عند هذه النقطة ويتعين بمعلومية مسقطه γ' والزاوية α التى يميل بها

(١) اذا فرضنا أن خطوط المنسوب فى منطقة صغيرة على سطح الارض تتألف من منحنيات متوازية ومتساوية البعد فان الخط ذا الميل الاعظم الذى يمكن رسمه فى هذه المنطقة يؤول الى خط مستقيم وفى هذه الحالة يكون المستوى المماس للسطح (أنظر بند ١٦٩) فى إحدى نقط هذا المستقيم ماساً للسطح بطول المستقيم ويمكن إذن اعتبار تلك المنطقة من سطح الارض جزءاً من سطح قابل للاستواء (بند ١٢٤). أما اذا آلت جميع المنحنيات ذوات الميل الاعظم على سطح طبوغرافى الى خطوط مستقيمة فان السطح يكون فى هذه الحالة ثابت الميل على المستوى الافقى أى يؤول الى «سطح ميل» (أنظر بند ١٧٠).

على مستوى المقارنة فاذا رسمنا مماساً جديداً للسطح عند النقطة حـ أى مماساً جديداً لمنحن آخر مار بالنقطة حـ وواقع على السطح مثل خط المنسوب ١٠ فان هذين المماسين يحددان المستوى المماس للسطح فى النقطة حـ . ويقاس ميل السطح الطبوغرافى عند احدى نقطه بظل الزاوية التى يصنعها المستوى المماس له فى هذه النقطة مع مستوى المقارنة .

ولنفرض فى (شكل ١٤٣ ب) أنه يراد تعيين المستوى المماس T للسطح فى النقطة هـ فابسط طريقة لذلك أن نقطع السطح بمستوى بروفيل Φ مار بالنقطة هـ ثم نطبق هذا المستوى على أحد المستويات الموازية لمستوى المقارنة فيكون مماس المقطع فى هـ هو المماس للسطح الواقع فى المستوى Φ ويمكن حينئذ رسم مسقطه المدرج الذى يظهر منطبقاً على الاثر Φ′ لمستوى البروفيل . ثم نرسم مماس خط المنسوب ٢٣ الواقعة عليه هـ′ فيكون هو مسقط الافقى ٢٣ للمستوى T وبذا يمكن رسم مقياس الميل ت′ للمستوى المطلوب كما هو مبين فى (شكل ١٤٣ ب) .
ويلاحظ أننا اذا أمررنا بالنقطة هـ مستوى بروفيل عمودياً على مماس خط المنسوب ٢٣ فى هـ′ فان المماس الواقع فى هذا المستوى للسطح يكون فى هذه الحالة أعظم مماسات السطح ميلا عند النقطة هـ على المستوى الافقى فهو المماس للمنحنى ذى الميل الاعظم المار بالنقطة هـ .

الفصل الرابع

سطوح الميل وتقاطعها مع السطوح الطبوغرافية

بند ١٧٠ : تعريف

يسمى *سطح ميل* كل سطح قابل للاستواء يكون ثابت الميل عند جميع نقطه على مستو ثابت (المستوى الافقى) . فالسطح اللولبى القابل للاستواء (بند ١١٣) وهو السطح المتولد عن مماسات منحن لولبى فى نقطه المختلفة هو سطح ميل . واذا علم منحن فراغى *فالمستوى الذى يتحرك ماساً له بحيث يكون ثابت الميل على المستوى الافقى* (فهو يتحرك إذن بدرجة واحدة من درجات الاطلاق) *يغلف أثناء الحركة سطح ميل* تكون رواسمه (وهى غير مماسات المنحنى الفراغى) خطوطاً مستقيمة ثابتة الميل على المستوى الافقى ويكون هذا الميل الثابت مساوياً لميل المستوى المتحرك .

وإذا قطع سطح ميل بمستويات أفقية يرتفع كل منها عن الآخر ببعد ثابت فان خطوط التقاطع التى يطلق عليها أيضاً اسم *خطوط المنسوب* تكون حينئذ عدة منحنيات متوازية ومتساوية البعد فى المسقط كما تكون المنحنيات ذوات الميل الاعظم على السطح فى هذه الحالة كلها خطوطاً مستقيمة (رواسم السطح) ثابتة الميل على المستوى الافقى .

بند ١٧١ : سطوح الميل المستعملة فى الانشاءات

اذا أريد انشاء جسر أو شارع مثلا على قطعة من الارض فانه يستعمل لامالة الجسر أو الشارع وسنده على سطح الارض (أو بالعكس) — سطح ميل يمر بحرف الجسر ويتراوح ميله الثابت عادة بين ١ : ١ ؟ ١ : ١,٢٥ (أو ٤ : ٥) ؟

١ : ١,٥ (أو ٢ : ٣) ، ١ : ٢ ، ١ : ٣ على حسب طبيعة الارض . وعلى هذا يمكن التفرقة بين الحالات الآتية :

(١) اذا كان حرف الجسر مستقيما أفقياً أو مائلا كان سطح الميل مستوياً وفى الحالة الثانية يمكن الحصول على مقياس ميل المستوى اذا علم هذا الميل أو علمت الزاوية التى يصنعها مع مستوى المقارنة بالطريقة التى شرحناها فى مثال ٣ (بند ١٥٥) .

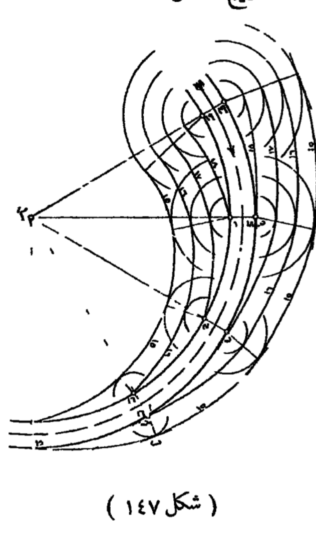
(٢) اذا كان حرف الجسر دائرة (أو قوس دائرة) واقعة فى مستو أفقى كان سطح الميل سطحاً لمخروط دورانى رأسىّ المحور وتكون خطوط المنسوب فى هذه الحالة دوائر متحدة المركز كما تكون الخطوط ذوات الميل الاعظم رواسم المخروط[١] .

(٣) اذا كان حرف الجسر منحنياً فراغياً حيثما اتفق معلوماً بالمساقط المرقومة لعدد كاف من نقطه فان سطح الميل يمكن الحصول عليه باعتباره السطح المغاف لمخاريط الميل المختلفة التى رؤوسها نقط المنحنى والتى تميل على مستوى المقارنة بالميل المعلوم للسطح وتكون خطوط المنسوب فى هذه الحالة هى المنحنيات المتوازية التى يغلف كل منها قواعد المخاريط المشار اليها الواقعة فى مستو أفقى واحد .

ويبين (شكل ١٤٧) كيفية الحصول على خطوط المنسوب لسطح الميل وكذا رواسمه عند ما يكون حرف الجسر المار به السطح منحنياً لولبياً . فلما كان حرف الجسر فى هذه الحالة ثابت الميل على المستوى الافقى أو مستوى المقارنة II فانه يمكن لذلك تدريجه (كالخط المستقيم) فى النقط ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، . . .

(١) اذا كان حرف الجسر أى منحن واقع فى مستو أفقى كقطع ناقص مثلا فان أعمدة المنحنى فى نقطه المختلفة تمثل حينئذ فى المسقط رواسم سطح الميل الذى لا يكون فى هذه الحالة سطحاً مخروطياً وإنما يمكن الحصول على مقاطعه الافقية فى لمسقط كمنحنيات موازية لحرف الجسر .

واذا اعتبرنا هذه النقط رؤوسا لمخاريط ميل تميل جميعاً على II بالميل المعلوم لسطح الميل وليكن هذا الميل ١ : ١,٥ فان المستوى الافقى ١٥ يقطع هذه المخاريط فى دوائر مراكزها نقط التدريج المذكورة وأنصاف أقطارها على التوالى صفر ، ١,٥ ، ٣ ، ٤,٥ ، . . . متراً ويكون خط المنسوب ١٥ لسطح الميل هو المنحنى المغلف لتلك الدوائر (ويمر بالنقطة ١٥ على حرف الجسر) . واذا كان أ′ س′ مسقط المماس للمنحنى اللولبى فى النقطة ا (ومنسوبها ١٦)وكان س′ أثر هذا المماس على المستوى الافقى ١٥ (ويمكن الحصول عليه كما قدمنا فى بند ١٠٩ بجعل أ′ س′ مساويا لطول القوس أ — ١٥) ورسم من س′ المماس س′ب′ لقاعدة مخروط الميل الذى رأسه فى النقطة ا وارتفاعه مترا واحدا [1] كان س′ب′ أثر المستوى المماس المشترك للمخروط وسطح الميل على المستوى الافقى ١٥



(شكل ١٤٧)

(١) يلاحظ أنه يمكن رسم مماسين من النقطة س′ الى قاعدة المخروط ويستعمل المماس الثانى (غير المبين بالشكل) فى حالة ما اذا كان سطح الميل المراد تعيينه يميل الى أعلا (بدلا من ميله الى أسفل كما هو الحال فى الشكل) أى اذا كان الجسر أو الشارع أوطى من منسوب الارض فى هذا المكان .

لانهذا المستوى لابدأن يحتوى مماس المنحنىاللولبى فى ا باعتبارهذا المنحنى منحنياً مرسوما على السطح . كما أن راسم التماس ا ب بين السطحين وبين المستوى المماس هو نفس الراسم المار بالنقطة ا لسطح الميل وتكون ب′ هى نقطة التماس بين قاعدة المخروط السالف الذكر وخط المنسوب ١٥ لسطحالميل . ولما كانت الزاوية ω المحصورة بين مسقط راسم السطح فى أى وضع من أوضاعه وبين مسقط مماس المنحنى اللولبى فى نقطة تقاطعه مع الراسم هى كما يتبين من الشكل زاوية ثابتة كان من السهل تعيين أى عدد من رواسم السطح بدون حاجة الى تكرار رسم مماس المنحنى اللولبى فى كل مرة .

ويلاحظ أن سطح الميل فى هذه الحالة هو سطح لولبى قابل للاستواء (بند ١١٣) ضلع رجوعه هو منحن لولبى جديد (غير حرف الشارع) يمس الاوضاع المختلفة لراسم السطح . فاذا رمزنا الى نصفى قطرى الاسطوانتين المرسوم عليهما حرف الشارع وضلع الرجوع بالرمزين $\text{نق}_١$ ، $\text{نق}_٢$ على التوالى والى زاوية ميل المماس لحرف الشارع على المستوى الافقى Π بالرمز $\alpha_١$ والى زاوية ميل راسم السطح (المماس لضلع الرجوع) على Π بالرمز $\alpha_٢$ فانه لما كانت الخطوتان لهذين المنحنيين متساويتين فينتج أن

$$\text{غ} = ٢\,\text{ط}\,\text{نق}_١\,\text{ظا}\,\alpha_١ = ٢\,\text{ط}\,\text{نق}_٢\,\text{ظا}\,\alpha_٢$$

أى أن

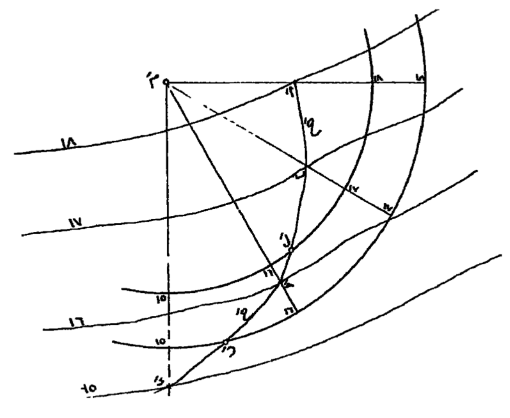
$$\text{نق}_٢ = \text{نق}_١ \times \frac{\text{ظا}\,\alpha_١}{\text{ظا}\,\alpha_٢}$$

بند ١٧٢ : تقاطع السطوح والمنحنيات مع السطح الطبوغرافى

لايجاد منحنى تقاطع سطح معلوم بعدد كاف من خطوط المنسوب مع سطح طبوغرافى تصل نقط تقاطع خطوط المنسوب المتناظرة (أى الواقعة فى مستو أفقى واحد) فى السطحين بمنحن متصل فيكون هو منحنى التقاطع المطلوب .

واذا علمت رواسم السطح كما هو الحال فى سطح الميل المبين فى (شكل ١٤٧) فان منحنى التقاطع يتألف أيضاً من نقط تقاطع هذه الرواسم مع السطح الطبوغرافى.

ولنفرض الآن أن الدائرتين المتحدتى المركز م′ فى (شكل ١٤٨) يمثلان منحنيين لولبيين هما حرفا شارع يراد إنشاؤه على قطعة الارض المبينة فيلاحظ

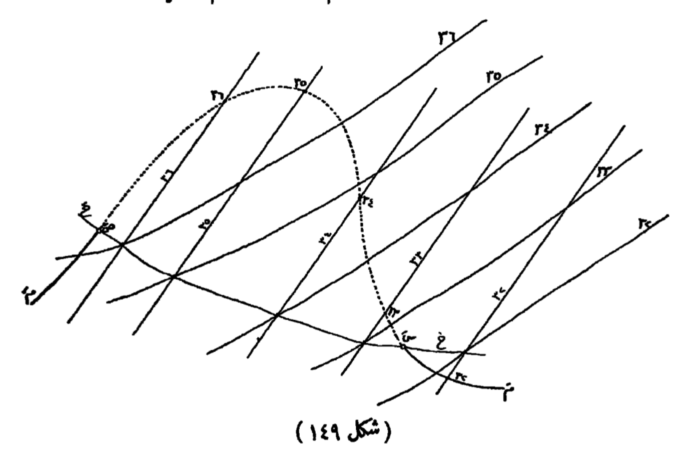


(شكل ١٤٨)

أولا أن سطح الشارع فى هذه الحالة هو سطح لولبى محورى عمودى (بند ١١٩) رواسمه فى المسقط هى المستقيمات ١٨ — ١٨ ، ١٧ — ١٧ ، ١٦ — ١٦ ، ... التى تمر جميعاً بالمركز م′ فاذا تقاطعت هذه المستقيمات مع خطوط المنسوب ١٨ ، ١٧ ، ١٦ ، ... للسطح الطبوغرافى فى النقط ا′ ، ب′ ، حـ′ ، ... على التناظر وتقاطع المنحنى ا′ب′حـ′ ... مع الدائرتين فى ل′ ، ى′ كان المنحنى ل′ ى′ هو مسقط منحنى تقاطع سطح الشارع مع السطح الطبوغرافى .

ولايجاد نقط تقاطع المنحنى الفراغى م المبين فى (شكل ١٤٩) بالمساقط المرقومة ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ... لعدد كاف من نقطه نمر بهذا المنحنى

سطحاً حيثما اتفق والاسهل أن يكون هذا السطح أسطوانة ذات رواسم أفقيه ودليلها المنحنى ويمكن تمثيل هذه الرواسم فى المسقط برسم مستقيمات متوازية



(شكل ١٤٩)

من النقط ٣٢، ٣٣، ٣٤، ... فى أى اتجاه فاذا تقاطعت هذه المستقيمات مع خطوط المنسوب ٣٢، ٣٣، ٣٤، ... على التناظر فان المنحنى ح′ح′ الذى يتالف من نقط التقاطع يمثل حينئذ المسقط لمنحنى تقاطع الاسطوانة المذكورة مع السطح الطبوغرافى ويتقاطع لذلك مع المسقط م′ للمنحنى المعلوم فى نقطتين (أو أكثر) س′، ص′ هما مسقطان لنقطتين من نقط تقاطع المنحنى م مع السطح الطبوغرافى .

الفصل الخامس

أمثلة عملية

بند ١٧٣ : الطرق المستعملة فى رسم خطوط التقاطع

اذا علمت خريطة طبوغرافية وتحددت سطوح الميل التى تستخدم لامالة سطح الشارع أو الجسر على السطح الطبوغرافى (أو بالعكس) فانه يطلق على الميل الثابت لهذه السطوح (الذى يتراوح غالباً بين ١ : ١ ، ١ : ٣ كما قدمنا) اسم الميل الجانبى وذلك تمييزاً له من الميل الطولى الذى يطلق عادة على ظل الزاوية التى يميل بها حرف الشارع أو محوره على المستوى الافقى [1] . وتستخدم فى المسائل العملية لرسم خطوط التقاطع طريقتان :

الطريقة الاولى وتكون برسم خطوط المنسوب لسطوح الميل المختلفة ثم تعيين نقط تقاطع هذه الخطوط مع خطوط المنسوب للسطح الطبوغرافى بالتناظر وذلك كما قدمنا فى (بندى ١٧١ ، ١٧٢) .

---

(١) يتوقف الميل الطولى على طبيعة الارض فى المنطقة وهل هى جبلية أو منبسطة كما يتوقف على نوع المشروع المراد إنشاؤه فى المنطقة وهل هو مشروع شارع أو جسر سكة حديد مثلا . فالميل الطولى للشارع يختلف من ٢ ٪ أو ٣ ٪ فى المناطق المنبسطة الى ١٠ ٪ أو ١٢ ٪ فى المناطق الجبلية . أما فى شؤون السكك الحديدية فالميل الطولى يكون عادة أقل من هذا بكثير ولذا يستخدم فى التعبير عنه عدد أمتار الارتفاع فى كل ألف متر طولى فيقال مثلا إن الميل الطولى ٥ ..٪ أى ٥, ٪ على أن هذا الميل قد يصل فى بعض البلاد الجبلية للخطوط غير الرئيسية الى ٤٠ ..٪ أو ٥٠ ..٪ وقد يصل لبعض سكك حديد الجبال فى تلك البلاد الى ٢٥٠

ويكون الميل الطولى صفراً اذا سمحت الظروف بان يكون الشارع أفقياً غير أنه لا بد فى مثل هذه الحالة من إمالة الشارع ميلا طولياً بسيطاً لتصريف المياه .

الطريقة الثانية وتكون باستخدام مقاطع عرضية (بروفيلات) عمودية على محور الشارع كما سنبينه فى (بند ١٧٥) . وتفضل هذه الطريقة عادة فى المسائل العملية لان المقاطع العرضية للسطح الطبوغرافى يمكن الحصول عليها مباشرة بواسطة « الميزانية » . على أنه يشترط فى هذه الطريقة أن يكون سطح الشارع أو الجسر أفقياً أو مائلا ميلا طولياً بسيطاً يسمح باعتبار الزاوية ω فى (شكل ١٤٧) قائمة تقريباً (إذ يكون الفرق حينئذ صغيراً) . ولكن يجب أن يلاحظ أن هذا الفرض التقريبى فى حالة وجود ميل طولى يجعل السطوح الجانبية غير ثابتة الميل على المستوى الافقى وأيضاً غير قابلة للاستواء . فاذا اعتبرنا مثلا الزاوية ω فى (شكل ١٤٧) قائمة كان معنى هذا أننا نفترض أن المجموعة كلها ناشئة عن تحرك المقطع العرضى حركة لولبية حول المحور ففى هذه الحالة يؤول كل من السطحين الجانبيين الى سطح لولبى محورى مائل (بند ١٢٠) .

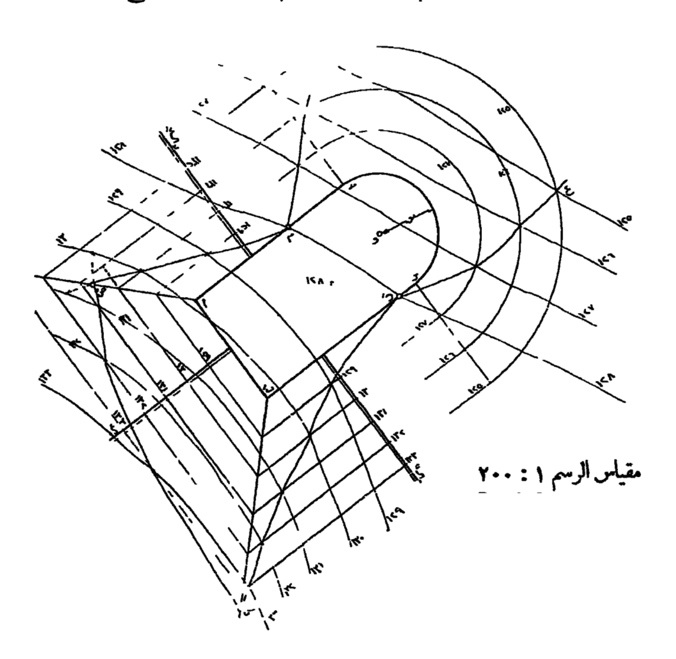
ونعطى فيما يلى مثالا على كل واحدة من الطريقتين .

بند ١٧٤ : المثال الاول

يبين (شكل ١٥٠) خريطة طبوغرافية لقطعة من الارض والمسقط المرقوم ا' ب' ى' ح' لمصطبة أفقية (منسوبها ١٢٨) يراد إنشاؤها على قطعة الارض . والمطلوب تمثيل سطوح الميل ورسم خطوط تقاطعها بعضها مع بعض ومع سطح الارض بالطريقة الاولى اذا علم أن الميول الجانبية فى الحفر ١ : ١ وفى الردم ٢ : ٣ .

لذلك نبدأ بتعيين الحد الفاصل بين الحفر والردم وهو خط تقاطع سطح المصطبة مع سطح الارض فلما كانت المصطبة أفقية كان الحد الفاصل فى هذه الحالة هو نفس خط المنسوب ١٢٨ الذى يقابل الحرفين ا' ح' ، ب' ى' فى النقطتين م' ، ن' وبذا يكون م' ن' ب' ا' مسقط الجزء م ن ب ا من المصطبة

الذى يلزم لانشائه عملية حفر لانه أوطى من سطح الارض ويكون مَ ﻫَ ءَ حَ مسقط الجزء الباقى الذى يلزم لانشائه عملية ردم لانه أعلا من سطح الارض .



(شكل ١٥٠)

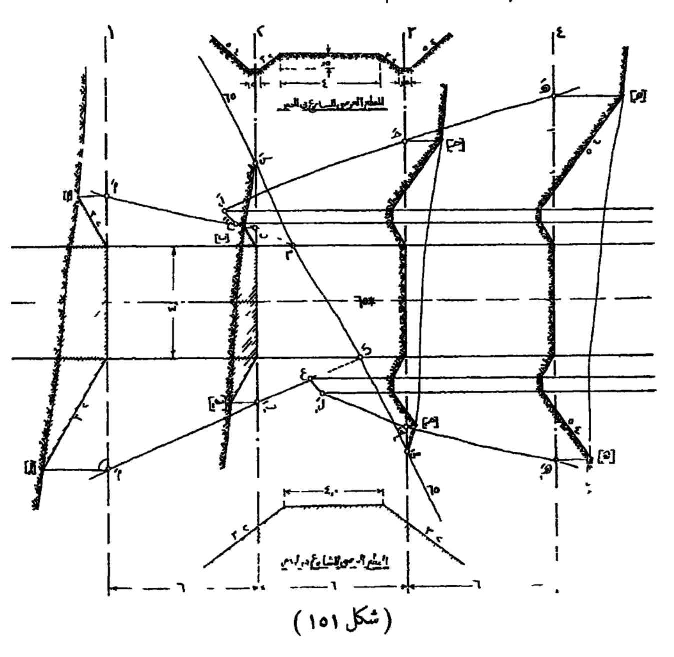
ثم نعين سطوح الميل الجانبية المارة بالاحرف المختلفة للمصطبة : فسطوح الميل المارة بالمستقيمات الافقية ﻫ ب ، ب ا ، ا م هى مستويات A_1 ، A_2 ، A_3 يميل كل منها الى أعلا بزاوية ظلها = ١ (لان الميل فى الحفر = ١ : ١) وبذا تكون مقاييس الميل لهذه المستويات هى ءَ١ ، ءَ٢ ، ءَ٣ على التوالى

حيث المعدل لكل منها يساوى متراً واحداً . ويتكوّن سطحا الميل اللذان يمران بالمستقيمين م حـ ، ﻫ ى من مستويين أيضاً يميل كل منهما الى أسفل بزاوية ظلها = ٢/٣ (لان الميل فى الردم = ٢ : ٣) وإذن يكون المعدل لمقياس ميل كل من هذين المستويين = ٣/٢ = ١,٥ متراً (وقد ضربنا صفحاً عن رسم هذين المقياسين فى الشكل) . أما سطح الميل المار بنصف الدائرة حـ ى فهو سطح مخروط دائرى قائم زاوية قاعدته = ظا^١⁻ ٢/٣ وتتألف خطوط المناسيب ١٢٧ ، ١٢٦ ، ١٢٥ ، ... له من دوائر متحدة المركز فى و' وأنصاف أقطارها تساوى بالامتار على التوالى ن +١,٥ ، ن +٣ ، ن +٤,٥ ، ... (حيث ن هو نصف قطر الدائرة حـ'ى') .

وأخيراً يمكن رسم منحنيات تقاطع السطح الطبوغرافى مع مستويات الميل المختلفة ومع السطح المخروطى كما تقدم فى (بندى ١٦١ ، ١٧٢) فمثلا ﻫ'س' هو المنحنى الذى يصل نقط تقاطع مساقط الافقيات ١٢٩ ، ١٣٠ ، ١٣١ ، . . . فى المستوى A_1 مع خطوط المنسوب ١٢٩ ، ١٣٠ ، ١٣١ ، . . . على التناظر . أما المستقيمان ب' س' ، أ' ص' فهما مسقطا خطى تقاطع المستوى A_2 مع المستويين A_1 ، A_3 على التوالى . ويلاحظ أن المنحنيين ﻫ' س' ، س' ص' يتقاطعان فى النقطة س' الواقعة على المستقيم ب' س' لان هذه النقطة هى مسقط إحدى نقط تقاطع ثلاثة سطوح : المستوى A_1 والمستوى A_2 وسطح الارض ويمكن تعيين س' ورقم النقطة س بطريقة أضبط باعتبارها إحدى نقط تقاطع المستقيم ب س مع سطح الارض اذا طبقنا المستوى المسقط للمستقيم ب س على أحد المستويات الافقية . ويقال مثل هذا عن ص' حيث يتلاقى المنحنيان م' ص' ، س' ص' .

بند ١٧٥ : المثال الثانى

اذا علم فى (شكل ١٥١) مسقط طريق أفقى (منسوبه ٦٥) يراد إنشاؤه على قطعة من الارض وكان سطح الارض فى هذه المنطقة معلوماً بالبروفيلات ١، ٢، ٣، ٤ (وقد تصورنا أنه تم تطبيق مستوى كل منها على المستوى الافقى ٦٥)



(شكل ١٥١)

فالمطلوب رسم تقاطع الميول مع سطح الارض باستعمال الطريقة الثانية فى (بند ١٧٣) مع ملاحظة أن يكون المقطعان العرضيان للشارع بالميول الجانبية فى كل من الحفر والردم كما هو مبين بالشكل .

قبل أن نشرح طريقة العمل نلفت نظر القارىء الى المقطع العرضى لجزء الطريق الموجود فى الحفر فان ميوله الجانبية بدلا من أن تمر بحرفى الشارع متجهة الى أعلا مباشرة لسند سطح الارض — تتجه أولا الى أسفل لعمق صغير (٥٠ سم) ثم تتجه بعد ذلك الى أعلا كما هو مبين بالشكل مكوّنة بذلك مصرفين صغيرين على الجانبين (عرض قاع كل منهما ٥٠ سم) . أما الغرض من هذين المصرفين فهو منع مياه الامطار وما شابه ذلك فى الحفر حيث يكون سطح الطريق أوطى من سطح الارض — من الانحدار مباشرة الى سطح الطريق مسببة بذلك تآكله .

ولحل هذا المثال يحسن أن نبدأ أولا برسم خط المنسوب ٦٥ على وجه التقريب وذلك بأن نصل مثلا النقطتين سَ ، صَ (وهما مسقطا نقطتين س ، ص على سطح الارض منسوب كل منهما ٦٥) فيكون الخط سَ صَ هو خط المنسوب ٦٥ وهو الحد الفاصل بين الحفر والردم الذى يقطع حرفى الشارع فى النقطتين المحددتين مَ ، ةَ . ثم نرسم المسقطين اَ بَ مَ ، اَ$_١$ بَ$_١$ ةَ لمنحني تقاطع مستويي الميل فى الردم مع سطح الارض فالنقطة اَ هى مسقط النقطة ا الواقعة فى مستوى البروفيل (١) والتى موقعها بعد تطبيق هذا المستوى على المستوى الافقى ٦٥ هو النقطة [ا] (حيث يتقاطع سطح الارض فى الموقع مع المستقيم ذى الميل الاعظم فى مستوى الميل) . وبنفس الطريقة نعين المساقط اَ$_١$ ، بَ ، بَ$_١$.

وكذلك نعين فى الحفر المسقطين حَ ، حَ$_١$ للنقطتين ح ، ح$_١$ الواقعتين فى مستوى البروفيل (٣) والمسقطين هَ ، هَ$_١$ للنقطتين هـ ، هـ$_١$ الواقعتين فى مستوى البروفيل (٤) وبذا يكون المنحنيان هَ حَ لَ ، هَ$_١$ حَ$_١$ لَ$_١$ هما مسقطا منحني التقاطع فى الحفر . ويجب أن يلاحظ أن هذين المنحنيين لا يمران بالنقطتين المحددتين مَ ، ةَ كما فى المثال السابق لان مستوى الميل فى

الحفر لا يمران فى هذه الحالة بحرفى الشارع وإنما بالحرفين المتطرفين (ومنسوبهما ٥ ,٦٤) لقاعى المصرفين .

أما الخطان ع'ل' ، ع,'ل,' فهما مسقطا منحني تقاطع قاعى المصرفين مع سطح الارض ولما كان هذان القاعان موجودين فى المستوى الافقى الذى منسوبه ٥ ,٦٤ وجب أن يكون ع'ل' ، ع,'ل,' موازيين بالتقريب لخط المنسوب ٦٥ لانهما قطعتان من خط المنسوب ٥ ,٦٤ غير المبين بالشكل . وغنى عن البيان أن الجزئين ع'م' ، ع,'ن' (من مسقطى منحني التقاطع فى الردم) ليس لهما وجود مع وجود المصرفين .

الباب العاشر

الاسقاط المركزى أو المنظور

الفصل الاول

تعاريف ومباديء أساسية

بند ١٧٦ : ماهية المنظور والغرض منه

ذكرنا فى التمهيد أن الاسقاط المركزى أو المنظور هو إسقاط من نقطة ثابتة فى الفضاء على مستو ثابت كما ذكرنا أن هذه الطريقة للاسقاط هى من الطرق التصويرية التى يلجأ اليها المهندس لرسم صور واضحة ناطقة لمختلف الاجسام والمنشئات التى يريد التعبير عنها بالرسم مثلها فى ذلك مثل طريقة الاسقاط الاكسنمترى والاسقاط المتوازى المائل وهذا هو الغرض الرئيسى من هذه الطرق التصويرية.

وتجب الاشاره هنا الى أن طريقتى الاسقاط الاكسنمترى والاسقاط المتوازى المائل لا يصلحان إلا لتمثيل الاجسام الصغيرة كالآلات الميكانيكية وما أشبه ذلك أما اذا أريد رسم صور توضيحية لاظهار معالم بعض الانشاءات الضخمة من مبانى وكبارى الى غير ذلك باحدى هاتين الطريقتين فان بقاء خاصية التوازى محفوظة فى هذه الحالة يتعارض مع ما يلاحظه الناظر الى مستقيمين متوازيين مترامين فى الطول (كحرفى شارع فى خط مستقيم) من ظهورهما متلاقيين فى نقطة على بعد نهائى — ويحول بذلك دون تحقيق الغرض السالف الذكر على الوجه الأكمل. وعلى العكس من ذلك اذا استخدم الانسان طريقة المنظور فى هذه الحالة فانه يحصل بذلك على صور واضحة قريبة ما أمكن من تلك التى

تنطبع فى عين الرائى لمثل تلك الانشاءات وذلك لان المستقيمات المتوازية تظهر بهذه الطريقة كما سنرى متلاقية فى نقطة على بعد نهائى . ويتبين من هذا أن دراسة المنظور ضرورية للمهندس المدنى ومهندس المبانى فى حين أن المهندس الميكانيكى يستطيع الاستغناء عنها بالاسقاط الاكسنمترى .

بند ١٧٧ : تعاريف اساسية

تسمى النقطة الثابتة المذكورة فى أول البند السابق **مركز الاسقاط** أو **العين** كما يسمى مستوى الاسقاط الثابت **مستوى الصورة** وهو يفرض عادة رأسياً (شكل ١٥٢) . وسنستخدم فيما يلى دائماً — إلا اذا نبهنا الى غير ذلك — الرمزين م ، Π للدلالة على مركز الاسقاط ومستوى الصورة على التوالى .

ولتحديد وضع العين م بالنسبة الى المستوى Π يكفى أن يعلم مسقطها العمودى على هذا المستوى وبعدها عنه وكذا اتجاه هذا البعد . ويرمز عادة لمسقط م العمودى على Π بالرمز ط (بدلا من م") كما يرمز لبعد م عن Π بالرمز « ع » وهذا البعد يعطى عادة على شكل دائرة مرسومة فى Π مركزها ط ونصف قطرها ع ومصحوبة بسهم يبين هل مركز الاسقاط أمام أو خلف Π [1] .

(شكل ١٥٢)

(١) يعتبر عادة مركز الاسقاط أمام Π اذا كان اتجاه السهم عكس عقرب الساعة (شكل ١٥٢) .

وتسمى النقطة ط **بالنقطة الرئيسية** كما تسمى الدائرة التى مركزها ط ونصف قطرها ع **بدائرة البعد** . والمستقيم الذى يصل م باية نقطة فى الفراغ مثل ا هو **شعاع اسقاطى** ويقابل Π فى المسقط المركزى للنقطة ا وهذا المسقط يرمز له عادة بالرمز ا̄ ويطلق عليه أيضاً اسم **منظور النقطة** أو **صورة النقطة**.

واذا كانت خ نقطة فى الفراغ بحيث أن الشعاع م خ يوازى Π فان مسقطها المركزى خ∞ يكون نقطة فى اللانهاية ويطلق على النقطة خ نفسها اسم **نقطة اختفاء** لان صورتها خ∞ لا يكون لها فى هذه الحالة وجود على بعد نهائى أى « تختفى » من مستوى الصورة . ويسمى المستوى المار بمركز الاسقاط م موازياً الى Π **بمستوى الاختفاء** لانه المحل الهندسى لجميع نقط الاختفاء ويرمز له عادة بالرمز X .

وأخيراً يطلق على المستوى المار بالعين م وأى مستقيم فى الفراغ اسم **مستوى مسقط** كما يطلق على المستوى الافقى المار بالعين عمودياً على Π اسم **مستوى الافق** وعلى خط تقاطعهما ں ں١ اسم **الافق** .

بند ١٧٨ : دراسة المنظور

ينقسم بحثنا فى هذه الطريقة الجديدة للاسقاط الى قسمين رئيسيين :

(ا) قسم نظرى ويشمل الفصول الثانى والثالث والرابع وسنشرح فى هذا القسم كيفية تمثيل النقطة والخط المستقيم والمستوى وطريقة حل مسائل الوضع والقياس التى سبق شرحها بطريقة مونج وطريقة الاسقاط الرقمى .

(ب) قسم عملى فى الفصل الخامس لشرح بعض الطرق المستعملة لرسم منظور جسم معلوم بمسقطيه الافقى والرأسى أو بمسقطه المرقوم على ضوء القسم النظرى السالف الذكر .

الفصل الثانى

تمثيل النقطة والمستقيم والمستوى [1]

بند ١٧٩ : النقطة

قدمنا أن منظور النقطة أو مسقطها المركزى هو نقطة تقاطع الشعاع الاسقاطى المار بها مع مستوى الصورة (شكل ١٥٢) .

فاذا علم المنظور كانت النقطة إحدى نقط الشعاع الاسقاطى و يتحدد وضعها على هذا الشعاع بطرق مختلفة أكثرها استعمالا أن يعلم مستقيم آخر (غير شعاع الاسقاط) يمر بها أو مستو واقعة فيه . ويجوز أن يكون هذا المستوى هو نفس مستوى الصورة أو المستوى الذى فى اللانهاية للفضاء ففى هذه الحالة تكفى الصورة وحدها لتحديد النقطة .

واذا علمت النقطة بصورتها وبمستقيم فى الفراغ مار بها (وهو الاغلب) فانه يطلق على هذا المستقيم اسم المستقيم الحامل أو حامل النقطة .

بند ١٨٠ : الخط المستقيم

لما كان منظور الخط المستقيم أو صورته هو المستقيم المؤلف من الصور المنظورية لنقطه فمتى علم منظور المستقيم فقد علم مستو يقع فيه هذا المستقيم وهو المستوى المسقط . ويتحدد وضع المستقيم فى الفضاء اذا علم مستو آخر يقع فيه

---

(١) يلاحظ أنه لتمثيل النقطة والمستقيم والمستوى ولحل مسائل الوضع المتعلقة بها فى الفصل الثالث يمكن الاستغناء عن النقطة الرئيسية ط ودائرة البعد اللتين يحددان وضع م بالنسبة الى Π على أن هذا التحديد يصبح ضرورياً لحل مسائل القياس فى الفصل الرابع وعندئذ يكون من الضرورى رسم دائرة البعد .

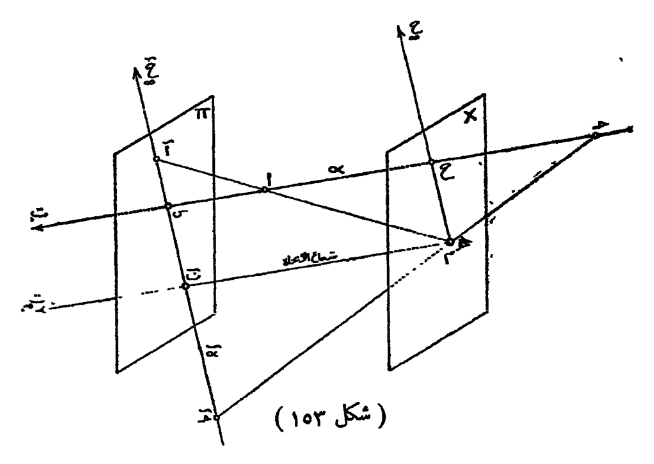
أو اذا تحددت نقطتان من نقط المستقيم لوقوعهما فى مستويين معلومين . وقد جرت العادة بان تكون هاتان النقطتان هما أثر المستقيم مع مستوى الصورة II ونقطته التى فى اللانهاية لانه لما كانت أولى هاتين النقطتين واقعة فى المستوى II وثانيتهما واقعة فى المستوى الذى فى اللانهاية للفضاء فان صورة كل منهما كافية وحدها كما قدمنا لتحديد وضع النقطة وتكون صورة المستقيم أو مسقطه المركزى هو المستقيم الذى يصل صورتى هاتين النقطتين .

وتسمى صورة النقطة التى فى اللانهاية على المستقيم **بنقطة اتجاه المستقيم** لان جميع المستقيمات التى توازى اتجاهاً ثابتاً يكون لها كما سنرى نقطة اتجاه واحدة تتقابل فيها مساقطها المركزية (١) . وسنستعمل فيما يلى — إلا اذا نبهنا الى غير ذلك — الرمزين س ، تَ للدلالة على أثر المستقيم ونقطة اتجاهه على التوالى .

والشعاع الاسقاطى المرسوم من مركز الاسقاط م موازياً الى مستقيم ما مثل α يطلق عليه اسم **شعاع الاتجاه** للمستقيم α ويقابل مستوى الصورة II فى النقطة تَ التى هى نقطة اتجاه المستقيم α (شكل ١٥٣) ويتبين من الشكل كيفية الحصول على المستقيم α نفسه اذا علم بصورته $\bar{\alpha} \equiv$ س تَ (حيث س هو الاثر ، تَ نقطة الاتجاه لهذا المستقيم) إذ أن α يكون فى هذه الحالة المستقيم المرسوم من س موازياً لشعاع الاتجاه م تَ . فاذا كانت آ صورة نقطة ما مثل ا على المستقيم فان الشعاع الاسقاطى م آ يتقاطع حينئذ مع α فى النقطة ا . ويتضح من هذا أن أية نقطة مثل ا يتحدد وضعها فى الفراغ اذا علمت صورتها

(١) كثيراً ما يستخدم الاصطلاح الانجليزى Vanishing Point للدلالة على نقطة الاتجاه باعتبارها صورة لنقطة فى اللانهاية أو نقطة «مختفية» غير أننا نفضل استعمال معنى الاختفاء للدلالة على النقط التى ليس لصورها وجود فى مستوى الصورة كما قدمنا فى (بند ١٧٧) وسنحتفظ لذلك بهذا المعنى للكلمات الانجليزية فى القاموس المذيل به الكتاب .

آ والصورة $\bar{\alpha}$ ≡ س تَ المحددة لاى مستقيم α يمر بها ويسمى حينئذ كما قدمنا فى (بند ١٧٩) حاملا لهذه النقطة .



(شكل ١٥٣)

واذا تتبع القارىء المسقط المركزى لنقطة تتحرك على المستقيم α ابتداء من الأثر س متجهة نحو نقطة الاختفاء غ لهذا المستقيم وجد أن هذا المسقط يتحرك على الصورة $\bar{\alpha}$ مبتعداً عن س فى اتجاه آ ويؤول الى النقطة حَ$_\infty$ التى فى اللانهاية على الصورة $\bar{\alpha}$ عندما تنطبق النقطة المتحركة على نقطة الاختفاء غ فاذا استمرت النقطة فى التحرك على المستقيم α بعد ذلك ظهرت صورتها فجأة على الجزء تَ حَ [١] وتأخذ فى الاقتراب من تَ كلما بعدت النقطة

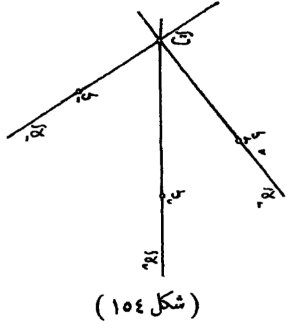
(١) يسمى هذا الجزء (وامتداده) من الصورة $\bar{\alpha}$ « بالجزء الخيالى » أو « الجزء الهندسى » لانه صورة الجزء من المستقيم α الواقع وراء العين م والذى لذلك لا تمكن رؤيته عملياً .

المتحركة على α عن النقطة خ حتى اذا صار هذا البعد لانهائياً انطبقت صورتها على تَ . أما النقط الواقعة على الجزء س تَ من الصورة $\bar{\alpha}$ فهى الصور المنظورية لنقط المستقيم الواقعة على امتداده الى الجهة الاخرى من مستوى الصورة بالنسبة الى م .

ونستخلص الآن مما تقدم النظريات الهامة الآتية :—

(١) اذا كانت خ نقطة اختفاء مستقيم كانت صورته موازية الى المستقيم م خ الذى هذه النقطة بمركز الاسقاط .

(٢) المستقيمات المتوازية لها *نقطة اتجاه واحدة* هى نقطة تقابل الشعاع الاسقاطى الموازى لها (شعاع الاتجاه) مع مستوى الصورة وهى التى تعين *اتجاه* المستقيمات .



(شكل ١٥٤)

ينتج من ذلك أن المساقط المركزية لعدة مستقيمات متوازية لا تكون متوازية — كما هو الحال فى طرق الاسقاط الاخرى — بل تتلاقى جميعاً فى نقطة واحدة هى نقطة الاتجاه المشتركة تَ (شكل ١٥٤). ويستثنى من ذلك الحالة التى تكون فيها المستقيمات المتوازية موازية أيضاً لمستوى الصورة II فان مساقطها المركزية فى هذه الحالة وحدها تكون جملة مستقيمات متوازية وموازية للمستقيمات نفسها . وذلك لان الأثر ونقطة الاتجاه ونقطة الاختفاء لاى مستقيم مواز الى II تتحد حينئذ جميعاً فى نقطة المستقيم التى فى اللانهاية وبذا تكون صورته مستقيماً موازياً للمستقيم نفسه .

(٣) نقطة اتجاه المستقيمات العمودية على Π هى النقطة الرئيسية ط

(٤) دائرة البعد هى المحل الهندسى لنقط اتجاهات المستقيمات التى تميل على Π بزاوية مقدارها ٤٥° . ويمكن القول بصفة عامة أن المحل الهندسى لنقط اتجاهات المستقيمات التى تميل على Π بزاويةمقدارها ω هو دائرة مركزها ط ونصف قطرها يساوى ع ظتا ω .

(٥) يتضح من (شكل ١٥٣) أن

$$\overline{ت} \text{ س} = \text{م خ} \quad \text{وأن} \quad \text{خ س} = \text{م} \overline{ت}$$

(٦) ويؤخذ من ذلك أنه اذا اتحدت نقطتا الاختفاء لمستقيمين α ، β كان س$_١$ $\overline{ت}_١$ يساوى ويوازى س$_٢$ $\overline{ت}_٢$ [١] (حيث س$_١$ ، س$_٢$ أثرا المستقيمين α ، β وحيث $\overline{ت}_١$ ، $\overline{ت}_٢$ نقطتا الاتجاه لهذين المستقيمين على التوالى) وبالعكس اذا توافر هذا الشرط أى اذا كان س$_١$ $\overline{ت}_١$ مساوياً وموازياً الى س$_٢$ $\overline{ت}_٢$ اشترك المستقيمان α ، β حينئذ فى نقطة اختفاء واحدة .

بند ١٨١ : تمثيل المستوى

يتحدد وضع مستو مثل P فى الفضاء (راجع شكل ٦٨) [٢] اذا علم أثره ع والمستقيم $\overline{ع}$ (الموازى لهذا الاثر) الذى هو خط تقاطع مستوى الصورة Π مع المستوى T المرسوم من م موازياً الى P .

---

(١) اذا رمزنا الى نقطتى اختفاء مستقيمين α ، β بالرمزين خ$_١$ ، خ$_٢$ فان صورتيهما $\overline{\alpha}$ ، $\overline{\beta}$ تكونان متوازيتين اذا اتحدت نقطتا الاختفاء فى نقطة واحدة خ$_١$ ≡ خ$_٢$ (ويجوز أن تكون هذه النقطة فى اللانهاية فيكون معنى هذه أن α ، β متوازيان وموازيان الى Π) أو اذا كانت النقط م ، خ$_١$ ، خ$_٢$ على استقامة واحدة.

(٢) على القارىء أن يتصور لذلك Π قد رسم رأسياً فى هذا الشكل .

ويطلق على المستقيم $\overline{T}$ اسم **خط الاتجاه** للمستوى P (وللمستويات الموازية له) وهو المحل الهندسى لنقط اتجاهات المستقيمات الواقعة فى المستوى P (أو الموازية له) ويمكن تعريفه بانه **صورة المستقيم الذى فى اللانهاية فى المستوى** P (بند ٦٤) . كما يطلق على المستوى T السالف الذكر اسم **مستوى الاتجاه** للمستوى P والمستويات الموازية له .

واذا تقاطع المستوى P مع مستوى الاختفاء X فى المستقيم χ فان هذا المستقيم يسمى **خط الاختفاء** للمستوى P وهو المحل الهندسى لنقط المستوى P التى تقع مساقطها المركزية على بعد لا نهائى أى « تختفى » .

وعلى القارىء أن يتحقق من صحة النظريات الهامة الآتية بالرجوع الى (شكل ٦٨) :—

(١) اذا رسم مستقيم مثل α فى مستو معلوم P فان أثره س ونقطة اتجاهه $\overline{ت}$ يقعان بالترتيب على الاثر ع وخط الاتجاه $\overline{\tau}$ للمستوى P .

(٢) لما كان ع ، $\overline{\tau}$ لاى مستو هما دائماً مستقيمان متوازيان فينتج من ذلك **أن المستقيم الذى يصل أثرى مستقيمين متقاطعين (واقعين فى المستوى) يجب أن يوازى المستقيم الذى يصل نقطتى اتجاهيهما** وهذا هو الشرط اللازم والكافى لتقاطع مستقيمين .

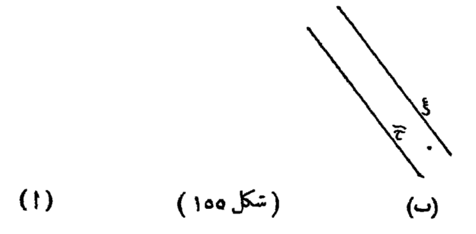
(٣) المستويات المتوازية تشترك فى **خط اتجاه واحد** هو الذى يعين وضعها أو اتجاهها وهو كما قدمنا خط تقاطع Π مع مستوى الاتجاه لهذه المستويات .

(٤) المستقيم ن ن١ (شكل ١٥٢) هو خط اتجاه جميع المستويات الموازية لمستوى الافق . وعلى وجه العموم يجب أن يمر خط الاتجاه لاى مستو عمودى على Π بالنقطة الرئيسية ط .

(٥) المستويات التى تميل على Π بزاوية مقدارها ٤٥° تمس خطوط اتجاهاتها جميعاً دائرة البعد . ويمكن القول بصفة عامة أن خطوط الاتجاهات للمستويات المختلفة التى تميل على Π بزاوية مقدارها ω تغلف دائرة مركزها ط ونصف قطرها يساوى ع ظتا ω (حيث ع هو بعد م عن Π) .

(٦) العلاقة الهندسية بين أى شكل سه مرسوم فى مستو مثل P وبين صورته سَه هى كما قدمنا فى (بند ٦٤) ائتلافية مركزية حيث م مركز الائتلاف ، ع محور ، وحيث χ ، $\bar{\tau}$ هما المستقيمان المحددان فى هذا الائتلاف .

وفيما يلى سنفترض دائماً (ما لم ننص على غير ذلك)



(ا) (شكل ١٥٥) (ب)

أولا — فى حالة مستقيم مثل α أنه يعلم بأثره س ونقطة اتجاهه ـَ (شكل ١٥٥ ا) .

ثانياً — فى حالة نقطة فى الفراغ مثل ھ أنها تعلم بصورتها ھَ وبالصورة $\bar{\alpha}$ ≡ س تَ المحددة لاى مستقيم حامل α مار بها (شكل ١٥٥ ا) .

ثالثاً — فى حالة مستو مثل P أنه يعلم بأثره ع وخط اتجاهه $\bar{\tau}$ (١٥٥ ب) .

واذا جاء فى مسألة أن المطلوب تعيين نقطة أو خط مستقيم أو مستو فلا يعتبر الحل منتهياً إلا اذا تحددت المعالم السابقة فى كل حاله .

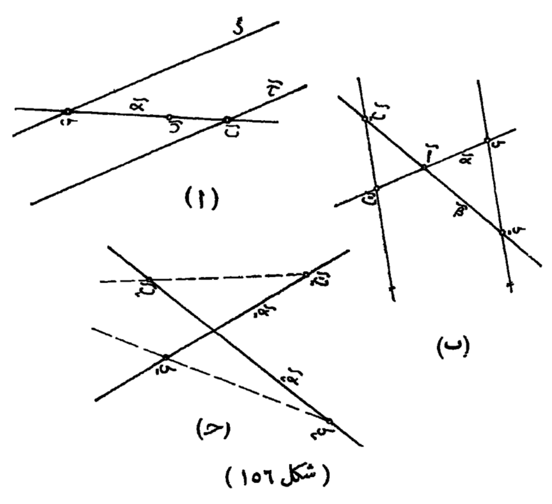
الفصل الثالث

مسائل الوضع

بند ١٨٢ : المسألة الاولى

(ا) اذا علم مستو والمسقط المركزى $\bar{\alpha}$ لمستقيم α موجود فيه فالمطلوب تعيين الأثر س ونقطة الاتجاه تَ لهذا المستقيم .

بناء على النظرية الاولى فى (بند ١٨١) تكون س ، تَ هما على التوالى نقطتا تقاطع $\bar{\alpha}$ مع الأثر ع وخط الاتجاه $\bar{\tau}$ للمستوى المعلوم (شكل ١٥٦ ا).



(شكل ١٥٦)

واذا كانت ەَ صورة نقطة ە واقعة فى المستوى المعلوم فان هذه الصورة تكفى بجانب المستوى (الذى يمكن اعتباره حاملا للنقطة) لتحديد وضع النقطة

ﻫ (بند ١٧٩) . على أنه اذا رسم من ﻫ̄ أى مستقيم $\bar{\alpha}$ ليقطع ع ، $\bar{\tau}$ فى س ، ت̄ فانه يمكن اعتبار المستقيم α الذى صورته $\bar{\alpha}$ وأثره س ونقطة اتجاهه ت̄ مستقيما حاملا ومحدداً للنقطة ﻫ .

(ب) اذا علمت نقطة مثل ا بصورتها ا̄ وبالمستقيم الحامل $\bar{\alpha}$ ≡ س ت̄ ومر بها مستقيم آخر مثل β علمت منه الصورة $\bar{\beta}$ والأثر س١ فالمطلوب تعيين نقطة الاتجاه ت̄١ للمستقيم β .

بما أن المستقيمين α ، β متقاطعان (فى النقطة ا) فبناء على النظرية الثانية فى (بند ١٨١) يكون المستقيم المجهول ت̄ ت̄١ موازياً للمستقيم المعلوم س س١ وبذا تتعين النقطة ت̄١ (شكل ١٥٦ ب) . وبالعكس اذا علمت ت̄١ أمكن تعيين س١ .

أما (شكل ١٥٦ ﺣ) فيمثل مستقيمين غير متقاطعين α_1 ، α_2 لان المستقيم س١ س٢ لا يوازى ت̄١ ت̄٢ .

بند ١٨٣ : المسألة الثانية

اذا علم مستو ونقطة خارجة فالمطلوب رسم مستومنها يوازى المستوى المعلوم .

نفرض فى (شكل ١٥٧) أن النقطة المعلومة هى ا وحاملها المستقيم α المعلوم بالصورة $\bar{\alpha}$ ≡ س ت̄ ونفرض أيضاً أن المستوى A معلوم بالأثر ع وخط الاتجاه $\bar{\tau}$. فاذا اخترنا على $\bar{\tau}$ اية نقطة مثل ت̄١ ووصلنا ا̄ ت̄١ فانه يمكن اعتبار هذا الواصل صورة $\bar{\beta}$ لمستقيم β نقطة اتجاهه هى النقطة ت̄١ ويكون المستقيم ماراً بالنقطة ا وواقعاً فى المستوى المطلوب فاذا كانت س١ الاثر

(الذي يمكن الحصول عليه كما تقدم في بند ١٨٢ب) للمستقيم β ورسم من س١ المستقيم ع١ موازياً الى ت كان ع١ أثر المستوى المطلوب أما خط اتجاهه ت١ فهو نفس خط الاتجاه للمستوى المعلوم أي ت١ ≡ ت .

ويلاحظ القارىء أن الأثر ع للمستوى المعلوم A لم يكن له أى دخل فى حل هذه المسألة وذلك لان خط الاتجاه ت يكفى وحده لتحديد الاتجاه الذى كان مطلوباً رسم مستو موازله من النقطة ا .

(شكل ١٥٧)

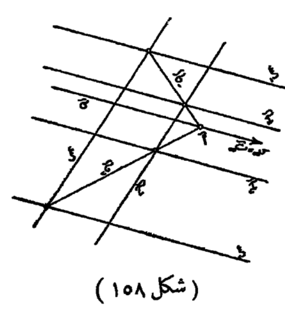
بند ١٨٤ : المسألة الثالثة

المطلوب تعيين خط تقاطع مستويين معلومين .

اذا تقاطع الأثران ع١ ، ع٢ فى س وتقاطع خطا الاتجاه ت١ ، ت٢ فى النقطة تَ كانت س ، تَ هما الأثر ونقطة الاتجاه لخط التقاطع المطلوب σ .

واذا توازت المستقيمات الاربعة المعلومة ع١ ، ع٢ ، ت١ ، ت٢ (شكل ١٥٨) فان خط التقاطع σ يكون فى هذه الحالة موازياً لمستوى الصورة II ويكفى لكى يتحدد وضعه أن تعلم منه نقطة واحدة مثل ا وهذه يمكن الحصول

عليها برسم مستقيمين متوازيين حيثما اتفق ع و $\bar{\tau}$ واعتبارهما الأثر وخط الاتجاه لاى مستو مساعد يتقاطع مع المستويين المعلومين فى المستقيمين σ_1 و σ_2 (ويمكن ايجادهما كما تقدم) فاذا تقاطع $\bar{\sigma}_1$ و $\bar{\sigma}_2$ فى $\bar{ا}$ كانت $\bar{ا}$ صورة النقطة ا وبذا يكون $\bar{\sigma}$ هو المستقيم المرسوم من $\bar{ا}$ موازياً الى $ع_1$ (أنظر بند ١٨٦).



(شكل ١٥٨)

بند ١٨٥ : المسألة الرابعة

اذا علم مستقيم ومستو فالمطلوب ايجاد نقطة تقاطعهما.

لذلك نفرض فى (شكل ١٥٩) أن المستقيم المعلوم هو α وأن س و $\bar{ت}$ هما الأثر ونقطة الاتجاه لهذا المستقيم. فنرسم من س و $\bar{ت}$ مستقيمين متوازيين حيثما اتفق مثل $ع_1$ و $\bar{\tau}_1$ ليمثلا الأثر وخط الاتجاه لاى مستو مساعد A مارا بالمستقيم α فاذا كان σ هو خط تقاطع هذا المستوى مع المستوى المعلوم بأثره ع وخط اتجاهه $\bar{\tau}$ وكانت $\bar{ح}$ نقطة تقاطع $\bar{\sigma}$ مع الصورة $\bar{\alpha}$ للمستقيم المعلوم فان $\bar{ح}$ تكون صورة نقطة التقاطع

(شكل ١٥٩)

المطلوبة ۞ (وهى لا تحتاج الى تحديد آخر لانها إحدى نقط المستقيم α الذى يمكن اعتباره حاملا لها) .

بند ١٨٦ : بعض الاوضاع الخاصة للمستقيم والمستوى

اذا وازى المستقيم أو المستوى مستوى الصورة Π فان هذا الوضع الخاص لايهما يحتاج الى بعض الايضاح :

فالمستقيم σ فى (شكل ١٥٨) يوازى كما قدمنا مستوى الصورة ولذا فالأثر ونقطة الاتجاه لهذا المستقيم يتحدان فى نقطته التى فى اللانهاية $س_{\infty} \equiv \bar{ت}_{\infty}$. ولتمثيل σ فى هذه الحالة يكفى أن يعلم بجانب صورته $\bar{\sigma}$ إما مستو حامل له كالمستوى (ξ_{1} ، $\bar{\tau}_{1}$) أو نقطة واحدة من نقطه كالنقطة ا (المعلومة فى الشكل بالمستقيم الحامل σ_{1} أو σ_{2}) .

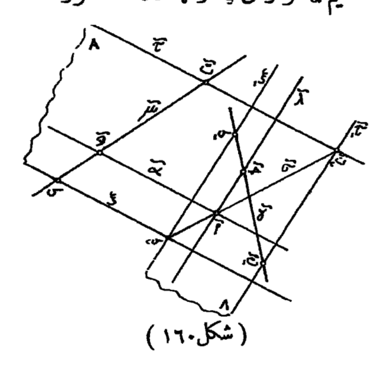
كذلك يكفى أن نعلم نقطة واحدة لكى يتحدد مستو يمر بها موازياً الى Π . فشكل (١٥٥ ا) مثلا يبين النقطة ۞ ويمكن اعتباره فى الوقت نفسه ممثلا لمستو يمر بهذه النقطة موازياً الى Π .

اذا تقرر هذا فان حل مسائل الوضع فى مثل هذه الحالات الخاصة لايختلف حينئذ عما ذكرنا فى البنود السابقة :

فمثلا لايجاد نقطة تقاطع مستو A (معلوم بأثره ξ وخط اتجاهه $\bar{\tau}$) مع مستقيم λ مواز لمستوى الصورة ومعلوم بمسقطه $\bar{\lambda}$ وبمستو حامل له Λ = (ξ_{1} ، $\bar{\tau}_{1}$) (شكل ١٦٠) نجد خط تقاطع المستويين A ، Λ وهو المستقيم σ فيتقاطع حينئذ هذا المستقيم مع λ فى نقطة التقاطع المطلوبة ا .

ولتعيين خط التقاطع α للمستوى A السالف الذكر مع مستو Γ مواز لمستوى الصورة ومعلوم بالنقطة حـ التى حاملها $\bar{\gamma} \equiv س_{1}$ $\bar{ت}_{1}$ (شكل ١٦٠)

نرسم من النقط حَ ، سَ، ، تَ، ثلاثة مستقيمات متوازية $\bar{\lambda}$ ، ξ_1 ، $\bar{\tau}_1$ فيكون $\bar{\lambda}$ صورة مستقيم حيثما اتفق λ مواز الى Π ومحمول بالمستوى (ξ_1 ، $\bar{\tau}_1$) ويمر بالنقطة حـ فهو لذلك واقع فى المستوى Γ . فاذا كانت اَ صورة نقطة تقاطع المستقيم λ مع المستوى A ورسم من اَ مستقيم $\bar{\alpha}$ موازاً الى ξ أو $\bar{\tau}$ كان $\bar{\alpha}$ صورة خط التقاطع المطلوب α الذى يوازى Π ويمكن اعتبار المستوى A حاملا محدداً له .



(شكل ١٦٠)

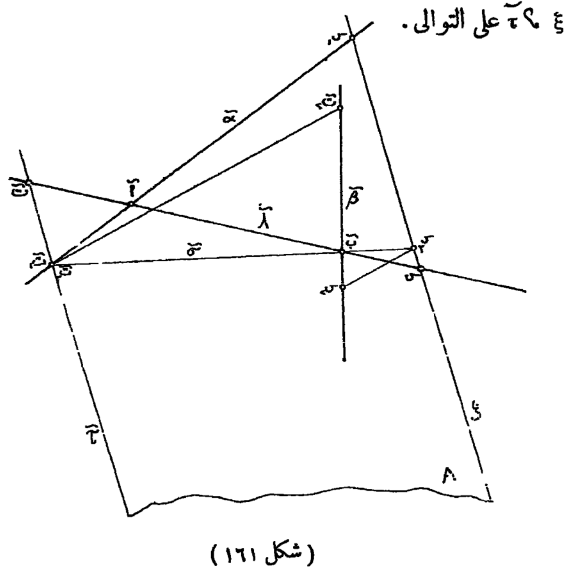
واذا كان μ مستقيماً معلوماً يراد تعيين نقطة تقاطعه مع المستوى Γ السالف الذكر والموازى الى Π نمر به مستوياً A (شكل ١٦٠) ونجد خط تقاطعه α مع المستوى Γ كما تقدم فيتقاطع حينئذ المستقيمان α ، μ فى نقطة التقاطع المطلوبة ه .

١٨٧ : امثلة محلولة على مسائل الوضع

مثال ١ — اذا علمت نقطتان ا ، ب بصورتيهما اَ ، بَ وحامليهما $\bar{\alpha}$ ≡ سَ، تَ، ، $\bar{\beta}$ ≡ سَ٢ تَ٢ فالمطلوب تعيين الأثر س ونقطة الاتجاه تَ للمستقيم λ الواصل بينهما.

لذلك نصل اَ بَ بالمستقيم $\bar{\lambda}$ (شكل ١٦١) فيكون $\bar{\lambda}$ منظور المستقيم المطلوب λ . ثم نصل بَ تَ، بالمستقيم $\bar{\sigma}$ الذى يمكن اعتباره صورة لمستقيم σ يمر بالنقطة ب موازياً الى α اذا فرضنا نقطة اتجاهه تَ٢ هى نفس نقطة

الاتجـاه تَ١ للمستقيم α . فاذا عُين الاثر س٣ للمستقيم σ كما تقدم فى (بند ١٨٢ ب) ووصل س١ س٣ بالمستقيم ع ثم رسم من النقطة تَ١ = تَ٣ مستقيم τ مواز الى ع فان المستقيمين ع ، τ يكونان الاثر وخط الاتجاه للمستوى A المار بالمستقيمين المتوازيين α ، σ ولما كان المستقيم λ واقعاً فى هذا المستوى كان أثره س ونقطة اتجاهه تَ هما نقطتا تقاطع λ مع ع ، τ على التوالى .



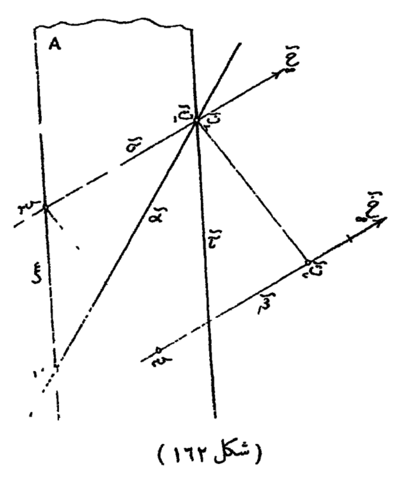
(شكل ١٦١)

مثال ٢ — المطلوب تعيين المستوى المار بنقطة ومستقيم معلومين .

اذا فرضنا فى (شكل ١٦١) أن النقطة المعلومة هى ب وحاملها β وأن المستقيم المعلوم هو α فيكون المستقيم σ المذكور فى المثال السابق هو المستقيم المار بالنقطة ب موازياً الى α ويكون المستوى المطلوب هو المستوى A المار

بالمستقيمين المتوازيين α ، σ والذى أثره ع وخط اتجاهه $\bar{\tau}$.

ولا يختلف العمل عما سبق اذا كانت النقطة المعلومة هى خ إحدى نقط مستوى الاختفاء X ففى هذه الحالة تكون خ معلومة بصورتها $\bar{خ}_{\infty}$ التى يجب أن تكون النقطة التى فى اللانهاية لحامل معلوم $\bar{\beta} \equiv$ س$_2$ ت$\bar{}_2$ فلتعيين المستوى A الذى يمر بالنقطة خ وبمستقيم معلوم $\bar{\alpha} \equiv$ س$_1$ ت$\bar{}_1$ نرسم من خ مستقيماً σ موازياً الى α ويكون ذلك «بتوصيل» $\bar{خ}_{\infty}$ بنقطة الاتجاه ت$\bar{}_1$ للمستقيم α فيكون الواصل هو الصورة $\bar{\sigma}$ للمستقيم σ الذى نقطة اتجاهه ت$\bar{}_3 \equiv$ ت$\bar{}_1$ ولما كان المستقيمان β ، σ



(شكل ١٦٢)

يمر بهما مستو واحد لتقاطعهما فى النقطة خ وجب أن يكون س$_2$ س$_3$ موازياً الى ت$\bar{}_2$ ت$\bar{}_3$ وبذا يتعين الأثر س$_3$ للمستقيم σ (بند ١٨٢ ب) ويكون الأثر ع للمستوى المطلوب A (الذى يمر بالمستقيمين المتوازيين α ، σ) هو المستقيم س$_1$ س$_3$ كما يكون خط الاتجاه $\bar{\tau}$ لهذا المستوى هو المستقيم المرسوم من النقطة ت$\bar{}_1 \equiv$ ت$\bar{}_3$ موازياً الى ع .

مثال ٣ — المطلوب تعيين المستوى المار بثلاث نقط معلومة ا ، ب ، حـ. لذلك نصل ا ب كما جاء فى المثال الاول ثم نعين المستوى المار بالمستقيم ا ب والنقطة حـ كما فى المثال الثانى .

مثال ٤ — المطلوب رسم المستقيم λ الذى يوازى اتجاهاً معيناً ويقابل مستقيمين معلومين غير متقاطعين : $\bar{\alpha} \equiv$ س$_1$ ت$_1$ ، $\bar{\beta} \equiv$ س$_2$ ت$_2$

الحل الفراغى لهذه المسألة يتلخص فيما يلى :

أولا — نعين المستوى A المار باحد المستقيمين وليكن α موازياً للاتجاه المعلوم

ثانياً — نجد نقطة تقاطع المستقيم الثانى β مع المستوى A ولتكن النقطة ى

ثالثاً — نرسم من ى (فى المستوى A) موازياً للاتجاه المعلوم فيكون هو المستقيم المطلوب λ .

ولتطبيق هذه الخطوات إسقاطياً نفرض فى (شكل ١٦٣) أن تَ هى النقطة المحددة للاتجاه المعلوم[1] الذى يجب أن يوازيه المستقيم λ فتكون تَ نقطة اتجاه هذا المستقيم. واذا كان $\bar{\tau}$ هو المستقيم الذى يصل نقطتى الاتجاه تَ ، تَ$_1$ فان $\bar{\tau}$ يكون خط الاتجاه للمستوى A (الذى يمر بالمستقيم α موازياً للاتجاه المعلوم) ويكون الاثر ع لهذا المستوى هو المستقيم المرسوم من س$_1$ موازياً الى $\bar{\tau}$. فاذا كانت ىَ

(شكل ١٦٣)

(١) يلاحظ أنه لكى يعلم اتجاه معين فى أية طريقة من طرق الاسقاط الاخرى يجب أن يعلم مستقيم مواز لهذا الاتجاه . أما فى الاسقاط المركزى فان نقطة واحدة هى نقطة الاتجاه تكفى لهذا الغرض .

صورة نقطة تقاطع المستقيم β مع المستوى A (بند ١٨٥) فان الواصل $\bar{\lambda}$ الذى يصل $\bar{ه}$ بنقطة الاتجاه $\bar{ت}$ يكون صورة المستقيم المطلوب λ ولما كان هذا المستقيم واقعاً فى المستوى A كان أثره س هو نقطة تقاطع $\bar{\lambda}$ مع ع .

ويلاحظ أنه لما كان λ متقاطعاً مع كل من المستقيمين α ، β وجب أن يكون $\bar{ت}\bar{ت}_{١}$ موازياً الى س $س_{١}$ من جهة وأن يكون $\bar{ت}\bar{ت}_{٢}$ موازياً الى س $س_{٢}$ من الجهة الاخرى . ويمكن الاستفادة من هذه الحقيقة فى التحقق من دقة الرسم المبين للحل بالطريقة السابقة كما يمكن الاستفادة منها فى حل المسألة بطريقة أخرى تفسيرها الفراغى هو أن λ يمكن الحصول عليه أيضاً كخط تقاطع المستويين المارين بالمستقيمين المعلومين واللذين يوازى كل منهما الاتجاه المعلوم .

بند ١٨٨ : طريقة أخرى لتمثيل النقطة والمستقيم والمستوى

لنفرض فى (شكل ١٦٤) أن Δ مستو يوازى مستوى الافق ويقطع مستوى الصورة Π فى المستقيم δ (الموازى الى الافق ں $ں_{١}$) وأن ه′ المسقط العمودى على Δ أى المسقط الافقى لاية نقطة فى الفراغ مثل ه . فاذا رمزنا الى صورة ه (مسقطها المركزى من م على Π) بالرمز $\bar{ه}$ والى صورة ه′ (من م على Π) بالرمز $\bar{ه}'$ فمن الواضح أن النقطة ه يتحدد حينئذ وضعها فى الفراغ بمعلومية الصورتين $\bar{ه}$ ، $\bar{ه}'$ إذ للحصول على النقطة فى هذه الحالة نصل م $\bar{ه}'$ ونفرض أنه يلاقى المستوى Δ فى ه′ فتكون النقطة ه هى نقطة تقاطع العمود المقام على Δ من ه′ مع الشعاع الاسقاطى م $\bar{ه}$.

ويطلق على المستوى Δ اسم مستوى الارض [١] وعلى المستقيم δ اسم

(١) سمى كذلك لانه يؤخذ غالباً أوطى من مستوى الافق ليمثل المستوى الذى يقف عليه المشاهد (بند ١٩٤) ومع ذلك فهو يفترض أحياناً أعلا من مستوى الافق .

خط الارض . كما يطلق على الصورتين ق̅، ق̅' معاً اسم المسقطين المركزيين أو المسقطين المنظورين للنقطة ق ويفهم من هذا أن ق̅ هو المسقط المركزى أو المنظورى المباشر للنقطة وأن ق̅' هو المسقط المركزى للمسقط الافقى (أو منظور المسقط العمودى) لهذه النقطة ويسمى لذلك المسقط الافقى المنظورى .

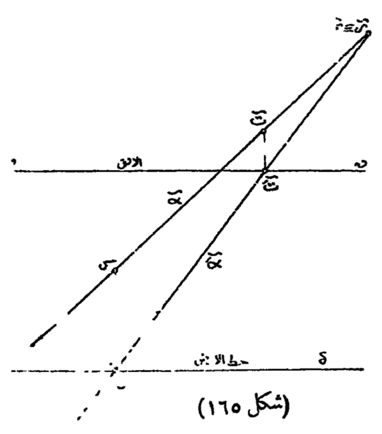
فالنقطة اذن يتحدد وضعها فى الفراغ بمعلومية مسقطيها المنظوريين . وبالمثل يتعين أى مستقيم α اذا علم مسقطاه المنظوريان أى مسقطه المركزى المباشر $\bar{\alpha}$ ومسقطه الافقى المنظورى $\bar{\alpha}'$.

(شكل ١٦٤)

ويتضح من (شكل ١٦٤) أن خط التناظر الذى يصل المسقطين المنظوريين

لاية نقطة فى الفراغ يكون عمودياً على خط الارض δ . ويصدق هذا أيضاً اذا كانت النقطة فى اللانهاية فالمسقطان المنظوريان تَ ، تَ' للنقطة $ت_\infty$ التى فى اللانهاية على المستقيم α — يصلهما أيضاً خط تناظر عمودى على δ ويلاحظ أن تَ هى نقطة اتجاه المستقيم α وأن تَ' هى نقطة اتجاه المسقط الافقى α' للمستقيم وتقع لذلك على الافق ى ى١ الذى هو خط اتجاه المستوى Δ .

واذا كانت م إحدى نقط المستوى Δ (وهى فى الشكل نقطة تقاطع المستقيم α مع Δ) انطبق حينئذ مسقطاها المنظوريان مَ $\equiv$ مَ' ولا يحدث هذا الانطباق إلا لنقط المستوى Δ فقط . أما اذا وقعت نقطة ما فى مستوى الصورة Π كالنقطة س كان سَ $\equiv$ س وكان سَ' $\equiv$ س' ومعنى هذا أن سَ' تكون فى هذه الحالة إحدى نقط δ . وبالعكس اذا كان المسقط الافقى المنظورى لنقطة ما واقعاً على خط الارض δ كانت النقطة نفسها واقعة فى Π .

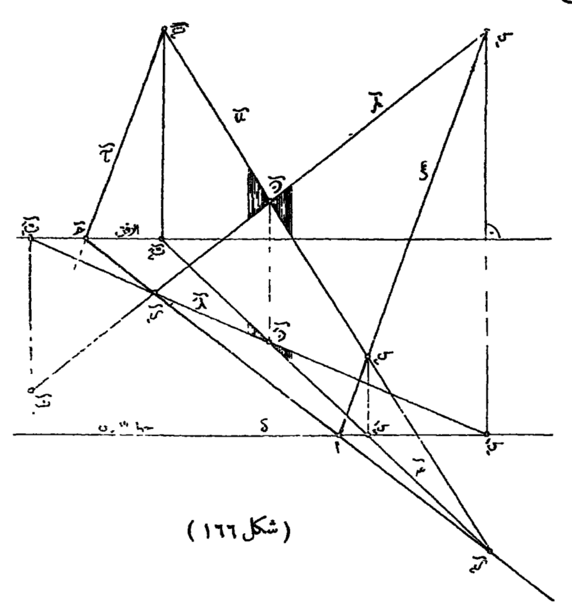


(شكل ١٦٥)

وبناء على ما تقدم يمكن الحصول على الاثر س ونقطة الاتجاه تَ لاى مستقيم α اذا علم مسقطاه المنظوريان $\bar{\alpha}$ ، $\bar{\alpha}'$ وبالعكس اذا علم س ، تَ لاى مستقيم فانه يمكن الحصول على $\bar{\alpha}$ ، $\bar{\alpha}'$ — وذلك كما يلى :

نفرض فى (شكل ١٦٥) أن ى ى١ هو الافق ، δ خط الارض وأن $\bar{\alpha}$ ، $\bar{\alpha}'$ المسقطان المنظوريان للمستقيم α فاذا تقاطع $\bar{\alpha}'$ مع δ ، ى ى١

فى النقطتين س′ ، ت′ ورسم من هاتين النقطتين مستقيما تناظر (عموديان على δ) ليقابلا $\bar{\alpha}$ فى س ، ت كانا هما الاثر ونقطة الاتجاه للمستقيم α .
أما النقطة ر ≡ ر′ لتلاقى المسقطين المنظوريين فتمثل نقطة تقابل α مع مستوى الارض (قارن أيضاً شكل ١٦٤) .



(شكل ١٦٦)

واذا علم فى (شكل ١٦٦) مستقيمان متقاطعان λ ، μ بالمسقطين المنظوريين لكل منهما وتقابل $\bar{\lambda}$ ، $\bar{\mu}$ فى النقطة ه وتقابل أيضاً $\bar{\lambda}'$ ، $\bar{\mu}'$ فى ه′ فان شرط تقاطع المستقيمين هو أن يكون المستقيم ه ه′ عمودياً على δ أى أحد خطوط التناظر . واذا كان $س_1$ ، $س_2$ أثرى المستقيمين كان المستقيم ع الذى

يصل هذين الأثرين هو أثر المستوى A الذى يمر بالمستقيمين λ ، μ وبالمثل يكون خط الاتجاه $\bar{\tau}$ لهذا المستوى هو المستقيم الذى يصل نقطتى الاتجاه $\bar{ت}_1$ ، $\bar{ت}_2$ للمستقيمين . أما المستقيم $\bar{ر}_1$ $\bar{ر}_2$ فيمثل خط تقاطع A مع مستوى الارض Δ ويلاحظ أنه يلاقى ع ، $\bar{\tau}$ فى نقطتين ا ، $\bar{ح}$ واقعتين على خط الارض والافق على التوالى لان ا تمثل نقطة تقابل المستويات الثلاثة Π ، Δ ، A كما تمثل $\bar{ح}$ نقطة تقابل المستويات الثلاثة : مستوى الافق ، Π ، مستوى الاتجاه للمستوى A .

ونترك للقارىء حل مسائل الوضع بهذه الطريقة الجديدة التى فصلناها فى هذا البند لان كيفية الحل فى هذه الحالة لا تختلف كثيرا عما سبق بيانه فى الفصل الثالث من الباب الاول (طريقة مونچ) فمثلا اذا أريد ايجاد نقطة تقاطع مستقيم معلوم ($\bar{\alpha}$ ، $\bar{\alpha}'$) مع المستوى A المعين بالمستقيمين المعلومين λ ، μ فى (شكل ١٦٦) نمر بالمستقيم α مستوياً مساعدا عمودياً على Δ فيقطع A فى مستقيم وليكن σ فتكون نقطة التقاطع المطلوبة هـ هى نقطة تلاقى σ ، α وطريقة ذلك تكون بان نجعل المسقط الافقى المنظورى $\bar{\alpha}'$ (الذى يمثل فى نفس الوقت المستوى المساعد) يقطع $\bar{\lambda}'$ ، $\bar{\mu}'$ فى $\bar{ا}'$ ، $\bar{ب}'$ مثلا ثم نجد $\bar{ا}$ ، $\bar{ب}$ على $\bar{\lambda}$ ، $\bar{\mu}$ فيكون $\bar{\sigma}$ هو المستقيم $\bar{ا}$ $\bar{ب}$ ويتقاطع حينئذ مع $\bar{\alpha}$ فى الصورة $\bar{هـ}$ لنقطة التقاطع المطلوبة .

وتستعمل هذه الطريقة لتمثيل النقطة والمستقيم والمستوى فى التطبيق العملى للمنظور (أنظر الفصل الخامس) وفى رسم الظلال حيث تفرض النقطة المضيئة ل بمعلومية مسقطيها المنظوريين $\bar{ل}$ ، $\bar{ل}'$. فاذا كانت ل نقطة فى اللانهاية (أى إضاءة متوازية) كانت $\bar{ل}'$ فى هذه الحالة إحدى نقط الافق .

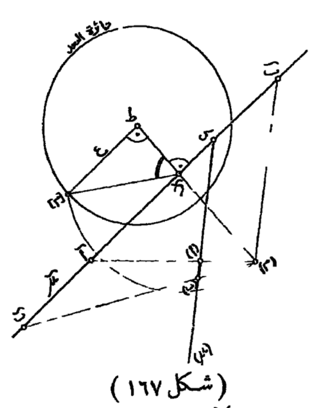
الفصل الرابع

مسائل القياس (١)

بند ١٨٩ : المسألة الاولى — تطبيق المستويات

(١) تطبيق المستويات المسقطة أى المارة بمركز الاسقاط

مثال : اذا علم فى (شكل ١٦٧) المستقيم $\bar{\mu}$ ≡ س تَ فالمطلوب ايجاد البعد الحقيقى بين النقطتين ا ، ب الواقعتين عليه .



(شكل ١٦٧)

لذلك نطبق المستوى المسقط M المار بمركز الاسقاط م والمستقيم المعلوم μ — على مستوى الصورة Π حيث محور الانطباق هو خط تقاطع M ، Π أى الصورة $\bar{\mu}$. فالموقع (م) لمركز الاسقاط يوجد على امتداد العمودى النازل من ط على $\bar{\mu}$ بحيث يكون ن̄(م) = ن̄[م] = وتر المثلث القائم الزاوية الذى أحد أضلاعه ط ن̄ (وهو المسقط العمودى للمستقيم ذى الميل الاعظم فى M المار بالمركز م) وضلعه الآخر الارتفاع المعلوم ع لمركز الاسقاط عن Π . ويكون الموقع (μ) للمستقيم المعلوم هو المستقيم المرسوم من الاثر س موازياً للمستقيم (م) تَ (لان هذا الاخير هو موقع شعاع الاتجاه المرسوم من م موازياً للمستقيم μ) . فاذا وصل

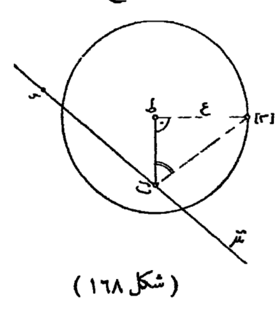
(١) هذه المسائل تستلزم معرفة النقطة الرئيسية ط ودائرة البعد .

(م) آ ، (م) بَ ليقابلا (μ) فى الموقعين (ا) ، (ب) للنقطتين كان (ا) (ب) هو البعد الحقيقى المطلوب بين النقطتين ا ، ب [١] .

. (ب) تطبيق المستويات العمودية على Π

مثال : المطلوب ايجاد الزاوية التى يميل بها مستقيم معلوم على Π .

لذلك نفرض فى (شكل ١٦٨) أن س ، تَ الاثر ونقطة الاتجاه للمستقيم المعلوم μ ونصل ط تَ فيكون هو المسقط العمودى لشعاع الاتجاه م تَ الذى يميل على Π بنفس الزاوية التى يميل بها المستقيم μ نفسه فالزاوية المطلوبة تساوى إذن الزاوية م تَ ط . وللحصول على هذه الاخيرة نطبق المستوى م تَ ط على Π حول ط تَ فنقيم من ط عموداً على ط تَ ليقابل دائرة البعد فى الموقع [م] لمركز الاسقاط ونصل [م] تَ فتكون الزاوية [م] تَ ط هى الزاوية المطلوبة [٢] .



(شكل ١٦٨)

(١) غنى عن البيان أن المسقط المركزى لبعد ما يجوز أن يكون أكبر من طوله الحقيقى وذلك بخلاف الحال فى الاسقاط العمودى حيث المسقط أصغر دائماً من الطول الحقيقى .

(٢) يلاحظ أنه بناء على النظرية الرابعة فى (بند ١٨٠) تكون زاوية ميل مستقيم ما على Π $\lesseqgtr$ ٤٥° على حسب ما اذا كانت نقطة اتجاه المستقيم واقعة داخل دائرة البعد أو عليها أو خارجها على التوالى .

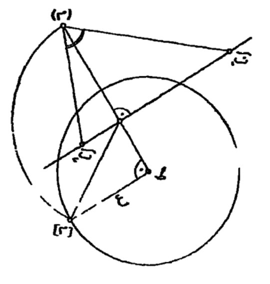
ويتبين من هذا الحل أن الأثر س للمستقيم المعلوم ليس له أدنى تأثير على النتيجة إذ أن زاوية الميل لا تتغير بتغير س . وكذلك الحال فى المستويات كما يتضح من المثال الآتى :

لنفرض فى (شكل ١٦٧) أن مٓ هو خط اتجاه مستو ما مثل A وأن أثره مستقيم حيثما اتفق (غير مبين بالشكل) يوازى مٓ فلايجاد زاوية ميل A على Π يكفى أن نجد زاوية ميل مستوى الاتجاه الموازى الى A والذى رمزنا اليه فى (الفقرة ١) بالرمز M ويكون ذلك بتطبيق المستوى م ط ڡٓ (حيث م ڡٓ هو المستقيم ذو الميل الاعظم فى M المار بالمركز م) على Π فتكون الزاوية [م] ڡٓ ط المبينة بالشكل هى الزاوية المطلوبة .

يستخلص من ذلك أنه *لتعيين الزوايا يكفى أن تعلم عناصر الاتجاه وحدها سواء للمستقيمات أو للمستويات .*

(ح) تطبيق المستويات المارة باشعة الاتجاه

مثال : المطلوب ايجاد الزاوية المحصورة بين مستقيمين معلومين (متقاطعين أو غير متقاطعين) .



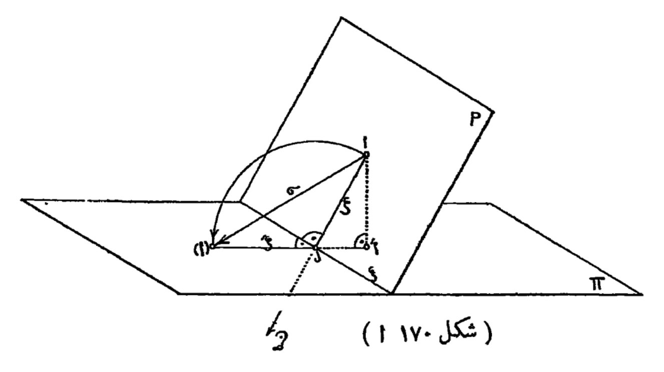
(شكل ١٦٩)

لحل هذه المسألة يكفى كما قدمنا أن تعلم نقطتا الاتجاه تٓ١ ، تٓ٢ للمستقيمين (شكل ١٦٩) ثم يطبق المستوى م تٓ١ تٓ٢ المحتوى على شعاعى الاتجاه للمستقيمين (والذى هو فى حالة المستقيمين المتقاطعين مستوى الاتجاه للمستوى المعين بهما) على Π حول تٓ١ تٓ٢ . ولما كان هذا المستوى مستوياً مسقطاً

طريقة التطبيق لا تختلف عنها فى (الفقرة ١) وتكون الزاوية تَ١ (م) تَ٢ هى الزاوية المطلوبة .

(ى) تطبيق المستويات على وجه العموم

لنفرض فى (شكل ١٧٠ ا) أنه يراد تطبيق المستوى P على مستوى الصورة Π حول خط تقاطعهما ع (محور الانطباق) فالخطوات الرئيسية فى الفراغ اللازمة لايجاد الموقع (ا) لنقطة مثل ا فى المستوى P يمكن تلخيصها كما يلى :



(شكل ١٧٠ ا)

الخطوة الاولى : نرسم من ا المستقيم ذا الميل الاعظم ىَ للمستوى P فيقابل ع فى نقطة مثل ل .

الخطوة الثانية : نقيم فى Π من النقطة ل المستقيم ىَ' العمودى على ع فيكون الموقع المطلوب (ا) موجوداً على ىَ' الذى هو المسقط العمودى [1] على Π للمستقيم ىَ .

(١) اذا تصورنا Π رأسياً كما جرت بذلك العادة وجب أن يرمز لهذا المسقط بالرمز ىَ'' بدلا من ىَ' .

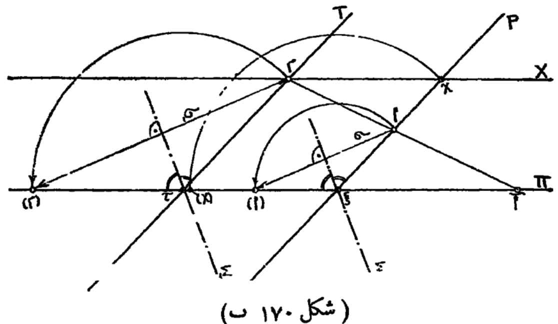
الخطوة الثالثة : نرسم من ا المستقيم σ العمودى على المستوى Σ المنصف للزاوية الزوجية بين P ، Π فيكون الموقع (ا) موجوداً أيضاً على هذا المستقيم.

ويطلق على المستقيم σ اسم وتر الدوران للنقطة ا ومن الواضح أن أوتار الدوران للنقط الاخرى فى P (أى المستقيمات التى تصل هذه النقط بمواقعها على Π) تكون جميعاً موازية الى σ أى الى الاتجاه الثابت العمودى على المستوى Σ وذلك اذا طبقنا P على Π فى اتجاه السهم المبين بالشكل أما اذا كان التطبيق فى الاتجاه الآخر فان أوتار الدوران تكون فى هذه الحالة موازية للاتجاه العمودى على المستوى المنصف للزاوية الزوجية الثانية بين P ، Π .

الخطوة الرابعة : نجد نقطة تقاطع المستقيمين ع′ ، σ فتكون هى الموقع المطلوب (ا) للنقطة ا .

ولتمثيل هذه الخطوات إسقاطياً نعين أولا الصورة عَ للمستقيم ع ونفرض أن هذه الصورة تتقاطع مع الأثر ع للمستوى المعلوم فى النقطة ل السالفة الذكر ثم نقيم من ل عموداً على ع فيكون هذا العمود هو ع′ الذى ينطبق فى هذه الحالة على صورته والذى يجب أن يمر بالموقع المطلوب (ا) إذ من الواضح أن الزاوية القائمة المحصورة بين المستقيمين ع ، ع′ الواقعين معاً فى مستوى الصورة Π لا تتغير بالاسقاط . ولتعيين الصورة σ̄ لوتر الدوران σ وهى الصورة التى يجب أن تمر أيضاً بالموقع (ا) يكفى أن تعلم نقطة الاتجاه لهذا الوتر . فنفرض لذلك فى (شكل ١٧٠ ب) أن مستوى الورقة يمثل مستوياً عمودياً على المستويات Π ، P ، T (حيث T هو مستوى الاتجاه للمستوى المعلوم P) . فاذا رسم من مركز الاسقاط م شعاع الاتجاه σ_1 الموازى الى σ فان هذا الشعاع يقابل Π فى نقطة (م) هى نقطة الاتجاه للوتر σ (ولجميع أوتار الدوران الاخرى

العمودية على Σ) . ولما كان σ_1 كما يتبين من الشكل عمودياً على المستوى Σ_1 المنصف للزاوية الزوجية بين T ، Π لذا كانت نقطة الاتجاه (م) هى موقع م الذى يمكن الحصول عليه بتطبيق T على Π فى اتجاه التطبيق للمستوى P .



(شكل ١٧٠ ب)

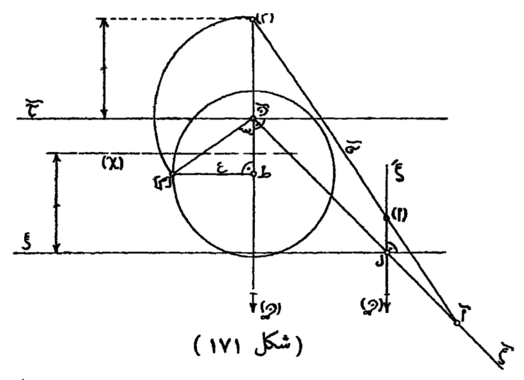
ويجد القارى هذا الحل الاسقاطى مبيناً فى (شكل ١٧١) حيث فرضنا أن ع ، ت̄ الاثر وخط الاتجاه لمستو معلوم P وأن ا̄ صورة نقطة ا واقعة فى المستوى ويراد تعيين موقعها (ا) .

لذلك ننزل من ط عموداً على ت̄ ليقابله فى ه̄ فتكون ه̄ نقطة الاتجاه للمستقيم ذى الميل الاعظم ع فى (شكل ١٧٠ ا)[(١)] ثم نصل ه̄ ا̄ فيكون الواصل ع̄ الذى يقابل ع فى ل ويكون العمود المقام من ل على ع هو ع′ الذى يمر بالموقع المطلوب (ا) .

واذا مددنا ط ه̄ الى (م) بحيث كان ه̄ (م) = ه̄ | م] = وتر

(١) وذلك لان ط ه̄ فى (شكل ١٧١) يمثل فى هذه الحالة المسقط العمودى للمستقيم م ه̄ ذى الميل الاعظم فى مستوى الاتجاه T الموازى الى P ومعنى هذا أن م ه̄ هو شعاع الاتجاه للمستقيمات ذوات الميل الاعظم فى المستوى P .

المثلث القائم الزاوية الذى أحد أضلاعه ط ﻫ̄ وضلعه الآخر الارتفاع ع لمركز الاسقاط م عن Π — كانت (م) موقع المركز م بعد تطبيق المستوى T على Π وفى الوقت نفسه نقطة الاتجاه لجميع أوتار الدوران الواصلة بين نقط



(شكل ١٧١)

المستوى P ومواقعها ويكون إذن المستقيم اَ (م) هو الصورة σ̄ لوتر الدوران σ للنقطة ا . ويتقاطع لذلك المستقيمان σ̄ ، ڠ′ حينئذ فى الموقع المطلوب (ا) للنقطة ا . أما المستقيم (χ) المرسوم موازياً الى ڠ وعلى بعد منه مساو لبعد (م) عن τ̄ — فهو موقع خط الاختفاء χ للمستوى P (قارن أيضاً شكل ١٧٠ ب أو شكل ٦٨) .

واذا كانت اَ ترسم شكلا سَ هو منظور شكل س واقع فى المستوى P فان (ا) ترسم شكلا (س) هو موقع الشكل س ومن الواضح أن سَ ، (س) هما شكلان مؤتلفان (لان كلا منهما مؤتلف مع س) . ولما كانت أزواج النقط المتناظرة فى هذين الشكلين مثل اَ ، (ا) تقع على مستقيمات تمر جميعاً بالنقطة الثابتة (م) التى هى نقطة الاتجاه لاوتار الدوران فينتج من ذلك أن المستقيمات المتنـــاظرة تتلاقى على مستقيم ثابت (راجع بند ٦٢) وأن

الشكلين سَهَ ، (سه) مؤتلفان مركزياً حيث مركز الائتلاف هو (م) ومحور الائتلاف هو الاثر ع لمستوى الشكل سه . ويكون تَ ، (χ) هما المستقيمان المحددان فى هذا الائتلاف فالاول منهما هو المحل الهندسى لصور النقط التى تناظرها فى الموقع نقط فى اللانهاية وثانيهما هو المحل الهندسى لجميع النقط فى الموقع التى تناظرها فى الصورة نقط فى اللانهاية .

تلخيص : يؤخذ مما تقدم أنه اذا علم الاثر ع وخط الاتجاه تَ لمستو P وأريد تطبيق هذا المستوى على II لتعيين الموقع (سه) لشكل سه مرسوم فيه — فاننا نبدأ بتطبيق المستوى T (مستوى الاتجاه المار بمركز الاسقاط موازياً للمستوى المعلوم) حول تَ فنحصل بذلك على (م) ثم نستخدم الائتلاف المركزى بين سَهَ ، (سه) الذى يتحدد بمعلومية مركز الائتلاف (م) ومحور الائتلاف ع وأحد المستقيمين المحددين وليكن تَ [وهو المستقيم المرسوم فى مجموعة سَهَ ليناظر المستقيم الذى فى اللانهاية باعتباره مرسوماً فى مجموعة (سه)] فى ايجاد موقع أية نقطة فى المستوى P اذا علمت صورتها وبالعكس . فمثلا اذا علمت فى (شكل ١٧١) الصورة اَ وأريد تعيين (ا) فاننا نختار على تَ أية نقطة [1] مثل كَ ونعتبرها إحدى نقط المجموعة سَهَ فتكون النقطة (ك)$_{\infty}$ المناظرة لها فى المجموعة (سه) هى النقطة التى فى اللانهاية للمستقيم (م) كَ فاذا وصلنا اَ كَ وفرضنا أنه يقطع ع فى نقطة مثل س ثم وصلنا س بالنقطة (ك)$_{\infty}$ أى رسمنا من س موازياً الى المستقيم (م) كَ فان هذا الموازى يقابل الشعاع (م) اَ فى الموقع المطلوب (ا) .

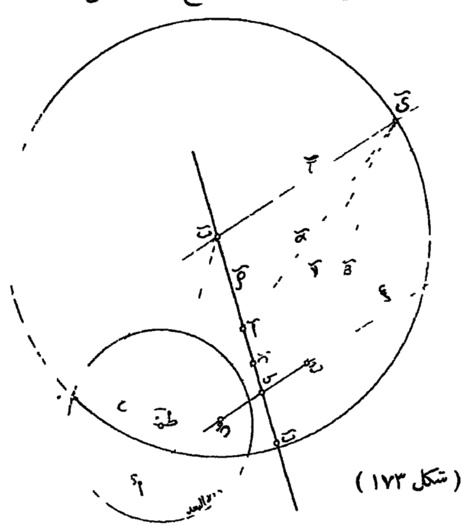
(١) ومعنى هذا أنه ليس من الضرورى أن تكون النقطة التى نختارها على تَ هى النقطة ىَ التى إنما اخترناها أولا فى (شكل ١٧١) لشرح الخطوات الرئيسية فى عملية الت

١٩٠ : نقطة القياس أو نقطة البعد النسبي

سنشرح فيما يلى طريقة خاصة بالمنظور لقياس الابعاد: فنفرض لذلك فى (شكل ١٧٢) أن س ، تَ هما الاثر ونقطة الاتجاه لمستقيم ρ يراد ايجاد البعد الحقيقى بين نقطتين من نقطه مثل ا ، ب ونفرض أيضاً أننا أمررنا بهذا المستقيم مستوياً حيثما اتفق P وأن ع ، ع َ هما الأثر وخط الاتجاه لهذا المستوى . فاذا رسمنا من ا مستقيماً α يقابل ع فى النقطة اَ بحيث تكون الزاويتان س ا اَ ، س اَ ا متساويتين ورسمنا من ب المستقيم β موازياً الى α فمن الواضح أن البعد اَ بَ يكون مساوياً الى ا ب . وللحصول على ا ، ب نرسم من م الشعاع م ىَ موازياً الى المستقيمين α ، β فيقابل

(شكل ١٧٢)

ﺡ̅ فى نقطة الاتجاه ى̅ لهذين المستقيمين فاذا وصل ى̅ ا̅ ، ى̅ ب̅ كان هذان الواصلان الصورتين α̅ ، β̅ (للمستقيمين α ، β) اللتين يقطعان ع فى ا ، ب.
ولما كان البعد ت̅ ى̅ يساوى م ت̅ (كما يتبين من المثلث المتساوى الساقين ت̅ م ى̅ المشابه الى المثلث س ا ا) وكان م ت̅ هو طول شعاع الاتجاه للمستقيم ρ (والمستقيمات الموازية له) وهو الطول الذى يمكن تعيينه متى علمت نقطة الاتجاه ت̅ لانه يساوى وتر المثلث القائم الزاوية الذى أحد أضلاعه ط ت̅ وضلعه الآخر الارتفاع المعلوم ع لمركز الاسقاط م عن Π — فالنقطة ى̅ يمكن لذلك الحصول عليها بقياس طول الشعاع المذكور على ﺡ̅ ابتداء من ب



(شكل ١٧٣)

ويرى القارىء فى (شكل ١٧٣) كيفية تطبيق هذه الطريقة إسقاطياً. فلكى نجد البعد الحقيقى بين النقطتين ا ، ب على المستقيم ρ المعلوم بأثره س ونقطة

اتجاهه تَ نرسم من س ، تَ مستقيمين متوازيين ع ، τَ ليمثلا الاثر وخط الاتجاه لمستو حيثما اتفق P يمر بالمستقيم المعلوم ρ ثم نقيس على τَ البعد تَ ىَ مساوياً الى البعد تَ [م] (وهذا الاخير يساوى وتر المثلث القائم الزاوية الذى أحد أضلاعه ط تَ وضلعه الآخر الارتفاع ع) فتكون ىَ نقطة الاتجاه للمستقيمين المتوازيين α ، β السالفى الذكر ويكون المستقيمان اللذان يصلان ىَ بالنقطتين آ ، بَ هما الصورتان αَ ، βَ اللتان يقطعان ع فى ا′ ، ب′ فالبعد ا′ ب′ هو إذن البعد الحقيقى المطلوب . واذا كانت ﻫ′ منتصف ا′ ب′ ووصل ﻫ′ ىَ ليقطع ρَ فى ﻫَ كانت ﻫَ صورة منتصف ا ب .

وتسمى ىَ **بنقطة القياس** أو **نقطة البعد النسبى** للاتجاه تَ بالنسبة الى المستوى P [1].

ومن الواضح أنه اذا تغير المستوى P مع ثبوت ρ أو اتجاهه تغيرت ىَ ومعنى هذا أن هناك عدداً لانهاية له من نقط القياس لاتجاه واحد تَ كلها واقعة على دائرة مركزها تَ ونصف قطرها تَ [م] أى الطول الثابت لشعاع الاتجاه المعلوم ويطلق على هـذه الدائرة اسم **دائرة البعد النسبى للاتجاه** تَ .

وبالنظر الى أهمية هذه الطريقة نرى تلخيص الخطوات التى تستعمل لتطبيقها عملياً كما يلى (شكل ١٧٣) : —

الخطوة الاولى : أوجد الطول الحقيقى تَ [م] لشعاع اتجاه المستقيم المعلوم P .

الخطوة الثانية : ارسم الدائرة التى مركزها تَ ونصف قطرها تَ [م] فتكون

(١) فى الواقع توجد نقطة قياس ثانية لنفس الاتجاه تَ بالنسبة الى المستوى P وهذه النقطة هى النقطة المماثلة الى ىَ بالنسبة الى تَ وهى التى يمكن الحصول عليها فى (شكل ١٧٢) برسم المستقيم الآخر من ا الذى يصنع مثل α مع ع ، ρ زاويتين متساويتين .

هى دائرة البعد النسبى للاتجاه تَ أى المحل الهندسى لنقط قياس المستقيم ϱ والمستقيمات الموازية له .

الخطوة الثالثة : اختر أية نقطة قياس مثل ىَ على هذه الدائرة ثم صلها بالنقطة تَ فيكون الواصل هو خط الاتجاه τ̄ للمستوى P الذى تحدده ىَ والذى يمر بالمستقيم ϱ ويكون المستقيم ع المرسوم من س موازياً الى τ̄ هو أثر هذا المستوى .

الخطوة الرابعة: أسقط الصور الواقعة على ϱ̄ للنقط المطلوب ايجاد البعد الحقيقى بينها من ىَ على الاثر ع فتظهر الابعاد الحقيقية على ع . وبالعكس اذا أسقطت عدة نقط على ع من ىَ على ϱ̄ تحددت صور النقط التى تبعد كل منها عن الاخرى بالابعاد المناظرة على ع .

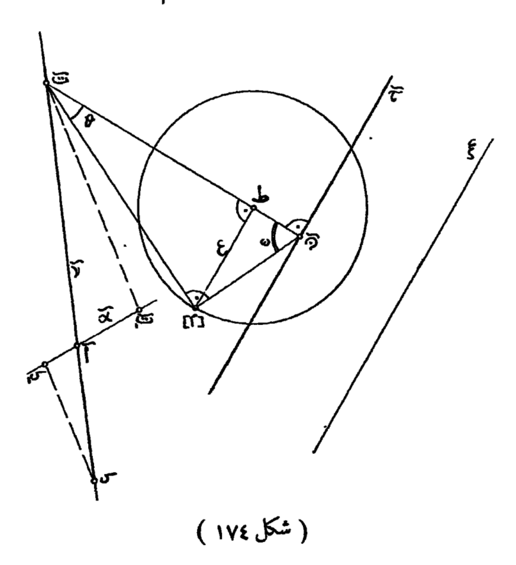
بند ١٩١ : المسألة الثانية — الاعمدة

(أ) اذا علم مستو A = (ع ، τ̄) وعلمت نقطة ا بصورتها اَ وبالحامل ᾱ = س١ تَ١ فالمطلوب تعيين العمود ν من ا على A .

لذلك نطبق فى (شكل ١٧٤) المستوى م ط ضَ (المار بمركز الاسقاط م عمودياً على كلا المستويين Π ، T حيث T مستوى الاتجاه للمستوى المعلوم) على Π ثم نقيم من [م] عموداً على [م] ضَ ليقابل امتداد ط ضَ فى تَ فتكون تَ نقطة الاتجاه للاعمدة النازلة أو المقامة على A فهى إذن نقطة الاتجاه للعمود المطلوب ν فاذا وصلت تَ اَ كان الواصل هو الصورة ν̄ لهذا العمود أما الاثر س فيمكن الحصول عليه كما تقدم فى (بند ١٨٢ ب) بجعل س١ س موازياً الى تَ١ تَ .

ويلاحظ أن الزاويتين ω ، θ هما زاويتا ميل A ، ν على Π . كما

يلاحظ أن الاثر ع للمستوى المعلوم ليست له قيمة فى حل المسألة إذ أن ح̅ يكفى وحده لتحديد اتجاه المستويات المطلوب رسم ν عمودياً عليه .



(شكل ١٧٤)

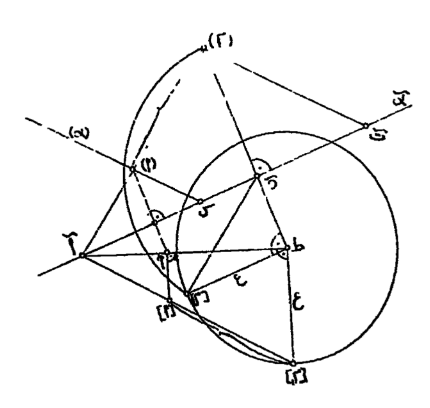
(ب) المطلوب تعيين المستوى الذى يمر بنقطة معلومة عمودياً على مستقيم معلوم .

هذه المسألة عكس السابقة ولشرح طريقة الحل نفرض فى (شكل ١٧٤) أن ت̅ نقطة الاتجاه للمستقيم المعلوم (ويلاحظ أنها تكفى وحدها لحل المسألة) فاذا طبق المستوى العمودى م ط ت̅ على Π أمكن تعيين ق̅ (نقطة الاتجاه للمستقيمات ذوات الميل الاعظم فى المستويات العمودية على الاتجاه ت̅) ويكون المستقيم ح̅ المرسوم منها عمودياً على ت̅ ق̅ هو خط الاتجاه للمستوى المطلوب

أما أثر هذا المستوى فيعين كما تقدم فى (بند ١٨٣) باعتباره المستوى المرسوم من النقطة المعلومة موازياً للمستويات المشتركة فى خط الاتجاه τ̄ (١) .

بند ١٩٢ : أمثلة محلولة

مثال ١ : أوجد المسقط العمودى ا′ على Π لنقطة معلومة ا وأوجد كذلك بعد ا عن Π .



(شكل ١٧٥)

لنفرض فى (شكل ١٧٥) أن ا معلومة بصورتها آ وبالمستقيم الحامل α̅ = س تَ فللحصول على ا′ نطبق المستوى المسقط (المار بمركز الاسقاط م وبالحامل α) على Π حول α̅ ونجد الموقع (ا) للنقطة ا كما قدمنا فى

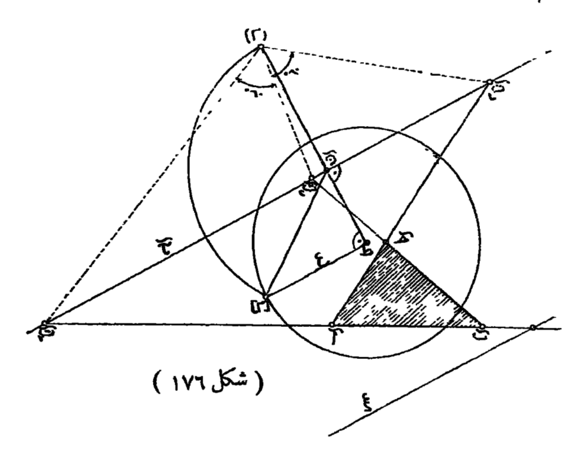
(١) اذا رمزنا فى (شكل ١٧٤) الى قطب τ̄ بالنسبة الى دائرة البعد بالرمز ك كانت النقطتان تَ ، ك متماثلتين بالنسبة الى ط أى أن ط تَ = ط ك . وكذلك يكون الخط القطبى للنقطة تَ موازياً الى τ̄ ومتماثلا معه بالنسبة الى ط وهو ما يمكن البرهنة عليه بسهولة من الخواص القطبية للدائرة .

(شكل١٦٧) ثم نسقط من (١) عموداً على $\bar{\alpha}$ ليقابل المستقيم ط آ فى المسقط العمودى المطلوب ١َ

ولايجاد بعد ١ عن II نطبق المستوى العمودى م ط آ ١ على II حول ط آ فيكون ١َ [١] هو البعد المطلوب .

ويلاحظ أن [م١] [١] يجب أن يساوى (م) (١) لان كلا منهما يساوى البعد الحقيقى بين م ، ١ .

مثال ٢ : اذا كان ع ، ع̄ هما الاثر وخط الاتجـــاه لمستو معلوم A وكان آ بَ المسقط المركزى لاحد أضلاع مثلث متساوى الاضلاع ب حـ مرسوم فى A فالمطلوب تعيين الصورة حـَ للرأس حـ .



(شكل ١٧٦)

يمكن حل هذه المسألة بتطبيق المستوى A على II (بند ١٨٩ ء) واستخدام الائتلاف المركزى فى تعيين حـَ بعد رسم المثلث فى الموقع . على أن هناك طريقة

أخرى خاصة بالمنظور وهى أبسط من السابقة ويمكن معها الاستغناء عن ع : ذلك بأن يكتفى بتطبيق المستوى T وحده (حيث T مستوى الاتجاه للمستوى A^*) فننزل من ط (شكل ١٧٦) العمود ط ف على T ثم نمده الى (م) بحيث يكون ف (م) = ف [م] = وتر المثلث القائم الزاوية الذى أحد أضلاعه ط ف وضلعه الآخر الارتفاع ع فيكون (م) موقع مركز الاسقاط ٠ ويكون (م) ت١ موقع شعاع الاتجاه للمستقيم ا ب (حيث ت١ هى نقطة تقاطع امتداد ا ب مع T أى نقطة الاتجاه للضلع ا ب) . فاذا رسم من (م) المستقيمان (م) ت٢ ، (م) ت٣ اللذان يميل كل منهما على (م) ت١ بزاوية مقدارها ٦٠° وكانت ت٢ ، ت٣ نقطتى تقاطع هذين المستقيمين مع T كانت هاتان النقطتان نقطتى الاتجاه للضلعين ب حـ ، ا حـ ويتقاطع حينئذ ب ت٢ ، ا ت٣ فى الصورة حـ للنقطة حـ . ولهذه المسألة حلان إذ أن ت٢ ، ت٣ يمكن اعتبارهما نقطتى اتجاه ا حـ ، ب حـ وفى هذه الحالة تكون حـ نقطة تقاطع ا ت٢ ، ب ت٣ .

مثال ٣ — المساقط المركزية للدائرة

هذه المساقط هى كما قدمنا مقاطع مخروطية . فاذا علمت دائرة فى المستوى P (شكل ٦٨) فان صورتها فى Π تكون قطعاً زائدا أو مكافئاً أو ناقصاً على حسب ما إذا قطعت الدائرة خط الاختفاء χ للمستوى P فى نقطتين حقيقتين أو مسته أو لم تقطعه (فى نقط حقيقية) . ويمكن الحكم على نوع الصورة بعد تطبيق المستوى P المرسومة فيه الدائرة كما جاء فى (بند ١٨٩ ى) فاذا فرضنا أن ا فى (شكل ١٧١) مركز دائرة واقعة فى المستوى P ومعلوم نصف قطرها ورسمنا فى الموقع هذه الدائرة حيث يكون (ا) مركزها فانه على حسب

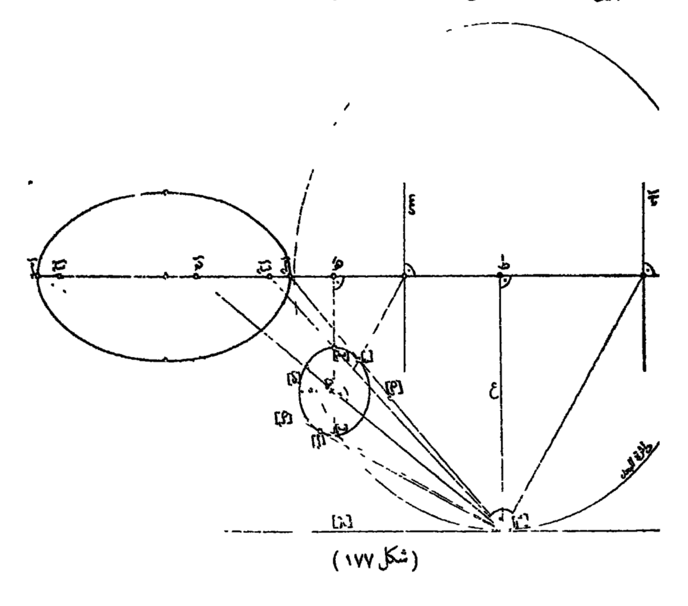
الدائرة مع الموقع (χ) لخط الاختفاء فى نقطتين حقيقيتين أو مسته أو لم تقطعه تكون صورة الدائرة قطعاً زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً على التوالى ويستخدم الائتلاف المركزى فى رسم الصورة (بند ٧٢) .

مثال ٤ — منظور الكرة

إذا علمت كرة واعتبرنا مركز الاسقاط م رأساً لمخروط دورانى مرسومة داخله الكرة فان المحيط الظاهرى لهذه الكرة بالنسبة الى م يكون المسقط المركزى لدائرة التماس بين المخروط والكرة ويكون قطعاً زائداً أو مكافئاً أو ناقصاً على حسب ما إذا كانت دائرة التماس أو الكرة نفسها قاطعة مستوى الاختفاء أو ماسة له أو غير قاطعة له على التوالى . فالمحيط الظاهرى للكرة هو على هذا منحنى تقاطع المخروط الدورانى المذكور آنفاً مع Π فاذا رمزنا الى نقطتى تقاطع الكرة مع قطرها العمودى على Π (أى نهايتى هذا القطر) بالرمزين ب١ ، ب٢ كان المسقطان المركزيان ب١ ، ب٢ لهاتين النقطتين بؤرتى المحيط الظاهرى (بند ٥٠) .

ولنفرض فى (شكل ١٧٧) أن مركز الكرة معلوم بصورته هـ وبمسقطه العمودى هـ' على مستوى الصورة (حيث هـ' يجب أن يكون إحدى نقط المستقيم ط هـ — راجع مثال ١) فللحصول على المحيط الظاهرى للكرة اذا علم نصف قطرها س نعتبر المستوى م ط هـ' هـ هـ العمودى على Π فهذا المستوى يقطع الكرة فى دائرة عظمى δ مركزها هـ ونصف قطرها س ويقطع المخروط الدورانى الذى رأسه م والمرسومة داخلة الكرة فى راسمين ϱ_1 ، ϱ_2 يمسان δ ويقطع أخيراً مستوى الاختفاء X فى مستقيم χ يكون قاطعاً الدائرة δ أو ماساً لها أو غير قاطع لها على حسب ما اذا كانت الكرة نفسها قاطعة مستوى الاختفاء أو ماسة له أو غير قاطعة له . وبتطبيق المستوى

م ط هـ ′ هـ̄ هـ على II حول ط هـ̄ يظهر لنا فى الموقع [δ] ، [ρ₁] ، [ρ₂] ، [χ] . ولما كان [χ] لا يلاقى [δ] فى الشكل فانه يمكن الحكم بان المحيط الظاهرى للكرة فى هذه الحالة هو قطع ناقص . فاذا كانت [ب₁] ، [ب₂] نهايتى القطر العمودى على ط هـ̄ فى الدائرة [δ] ووصل [م] [ب₁] ،



(شكل ١٧٧)

[م] [ب₂] ليقابلا ط هـ̄ فى النقطتين ب̄₁ ، ب̄₂ كانت هاتان النقطتان بؤرتى القطع الناقص وكذلك يتقاطع ط هـ̄ مع [ρ₁] ، [ρ₂] فى الرأسين آ₁ ، آ₂ المحددين للمحور الاكبر وبذا يتعين المحيط الظاهرى المطلوب

ويمكن رسم هذا المحيط بطريقة أخرى أشرنا اليها أيضاً فى (شكل ١١٧

وذلك بتعيين الاثر ع وخط الاتجاه تَ المحددين للمستوى A المرسومة فيه دائرة التماس بين الكرة والمخروط ثم تطبيق هذا المستوى على Π واستخدام الائتلاف المركزى فى رسم صورة دائرة التماس (وهى الدائرة التى قطرها يساوى [١,١] [١,٢] ومركزها نقطة تقاطع المستقيم م هـ مع A) . فهذه الصورة يجب أن تكون نفس القطع الناقص المبين .

تمارين

(١) اذا علم مستقيم يميل على Π بزاوية قدرها ٣٠° فالمطلوب تعيين المستوى الذى يمر به ويصنع مع Π زاوية قدرها ٦٠° .

(٢) المطلوب رسم منظور مكعب اذا علم المستوى المرسوم فيه أحد الاوجه وعلم أيضاً ضلع من أضلاع هذا الوجه .

(٣) المطلوب تعيين الزاوية الزوجية بين مستويين .

(٤) المطلوب تعيين زاوية ميل مستقيم على مستو .

(٥) أوجد البعد بين مستقيمين متوازيين .

(٦) أوجد بعد نقطة معلومة عن مستقيم أو عن مستو معلوم .

(٧) أوجد أقصر بعد بين مستقيمين غير متقاطعين .

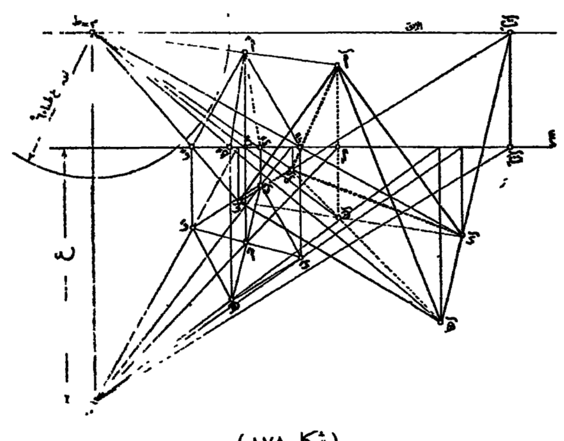
(٨) المطلوب تمثيل المستوى الذى يقطع مخروطاً دورانياً (محوره عمودى على Π) فى قطع زائد قائم .

الفصل الخامس

رسم الصور المنظورية

بند ١٩٣ : الطريقة المباشرة

يبين (شكل ١٧٨) المسقطين الافقى والرأسى لهرم رباعى قائم رأسه ا وقاعدته ء هـ و ر واقعة فى مستو أفقى ويراد رسمه رسماً منظوراً .



(شكل ١٧٨)

فالطريقة المباشرة لذلك تتلخص فى اختيار مستوما وليكن المستوى الرأسى المتقاطع مع مستوى القاعدة فى المستقيم ع — ليمثل مستوى الصورة II واختيار نقطة فى الفراغ مثل م لتمثل مركز الاسقاط . وتتحدد م بمعلومية مسقطيها الافقى والرأسى م′ ، م″ وتكون م″ فى هذه الحالة هى النقطة الرئيسية ظ نفسها . فاذا وصلنا م الى نقط الجسم المختلفة بالمستقيمات م ا ، م ء ، ... ورمزنا

الى نقط تقاطع هذه المستقيمات مع II بالرموز آ ، ب ، ء ، ... فان صورة الجسم تتألف حينئذ من هذه النقط . فللحصول مثلا على آ نصل م ١ ، م″ ١″ (وهما المسقطان الافقى والرأسى المحددان للشعاع م ١) ونمد م ١ ليقطع المستقيم ع فى ١، ثم نقيم من ١، عموداً على ع ليقابل م″ ١″ فى الصورة آ للنقطة ١ .

ويلاحظ أن هـ ء ، و ر لا بد أن يتقاطعا فى نقطة مثل ت١ واقعة على المستقيم الذى يمثل الافق والمرسوم من م″ موازياً الى ع وذلك لان هـ ء ، و ر مستقيمان متوازيان وواقعان فى مستو أفقى فالنقطة ت١ هى إذن نقطة اتجاههما وبالمثل يتلاقى ء ر ، هـ و فى نقطة مثل ت٢ على الافق هى نقطة اتجاههما .

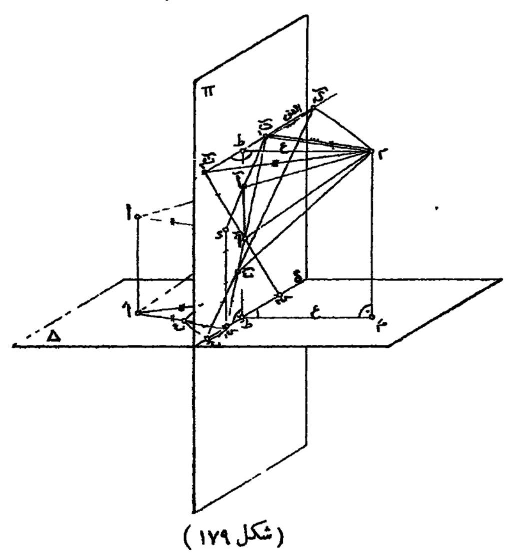
كما يلاحظ على هذه الطريقة أنه إذا أريد استخدامها فى رسم منظور جسم أكثر تعقيداً من الهرم المبين بالشكل صار العمل شاقا ولهذا السبب كانت هذه الطريقة قليلة الاستعمال فى الامثلة العملية . وسنشرح فى البند التالى طريقة أخرى أكثر استعمالا ودقة من هذه الطريقة وتوضح القواعد الاساسية لاكثر الطرق الاخرى المستعملة فى رسم الصور المنظورية .

بند ١٩٤ : الطريقة العامة

نبدأ باختيار مستوى الصورة II ومركز الاسقاط م وسنبين فى البند الآتى كيف يكون هذا الاختيار ليتيسر الحصول على منظر حسن للجسم المعلوم . ثم نفرض أن Δ مستوى الارض (بند ١٨٨) الذى يمثل المستوى الافقى الذى يقف عليه الناظر الى الجسم والذى يقطع II فى خط الارض ة (شكل ١٧٩).

فاذا كانت ١ إحدى نقط الجسم معلومة بمسقطها الافقى ١′ وارتفاعها ١ ١′ عن Δ ويراد تعيين صورتها فاننا نبدأ أولا بتعيين المسقط الافقى المنظورى آ′ لهذه النقطة بالطريقة الآتية : نفرض أن ت١ ، ت٢ على الافق (وهو خط الاتجاه

المستوى Δ) هما نقطتا الاتجاه لاى مستقيمين ا َس ١ ، ا َس ٢ مرسومين من ا َ فى Δ ليقابلا Π فى الأثرين س ١ ، س ٢ على خـــط الارض ٥ (وسيرى القارىء على ضوء المثال المذكور فى البند التالى أن المستقيمين ا َس ١ ، ا َس ٢ يختاران عادة بالتوازى لاتجاهين رئيسيين فى الجسم المراد رسم منظوره بحيث



(شكل ١٧٩)

تمر صور جميع المستقيمات الموازية لهما بنقطتى الاتجاه تَ ١ ، تَ ٢) فاذا وصل س ١ تَ ١ ، س ٢ تَ ٢ فانهما يتقاطعان فى المسقط الافقى المنظورى اَ َ . وللحصول على الصـــورة اَ نصل ا َ اَ بأية نقطة على الافق ولتكن نقطة الاتجاه تَ ١ للمستقيم ا َس ١ ونمد هذا الواصل ليقطع ٥ فى نقطة مثل س ١ ثم

نقيس على العمود المقام من س١ على δ الارتفاع س١ء مساوياً للارتفاع المعلوم ا′ا ونصل ء تَ١ فيتقاطع حينئذ مع خط التناظر المرسوم من اَ عمودياً على δ فى الصورة المطلوبة اَ . وذلك لان س١ تَ١ ، ء تَ١ هما فى هذه الحالة صورتان لمستقيمين متوازيين ا′س١ ، ا ء البعد الحقيقى بينهما يساوى س١ء الذى يساوى ا′ا [١] .

واذا كانت ب′ إحدى نقط المستقيم ا′س١ وفرضنا أنها تمثل المسقط الافقى لنقطة جديدة من نقط الجسم مثل ب يراد تعيين مسقطها الافقى المنظورى بَ′ فاننا نقيس على الافق ابتداء من تَ١ البعد تَ١ ىَ١ مساوياً م تَ١ فتكون ىَ١ نقطة البعد النسبي للاتجاه تَ١ بالنسبة لمستوى الارض Δ (بند ١٩٠) فاذا قيس على δ البعد س١ ب٥ مساوياً الى البعد المعلوم س١ب′ ووصل ىَ١ ب٥ فان هذا الواصل يتقاطع حينئذ مع س١ تَ١ فى بَ′ . ولكى يتيسر قياس الابعاد على المستقيم ا′س٢ تعين بالمثل نقطة القياس الأخرى ىَ٢ للاتجاه بَ٢ .

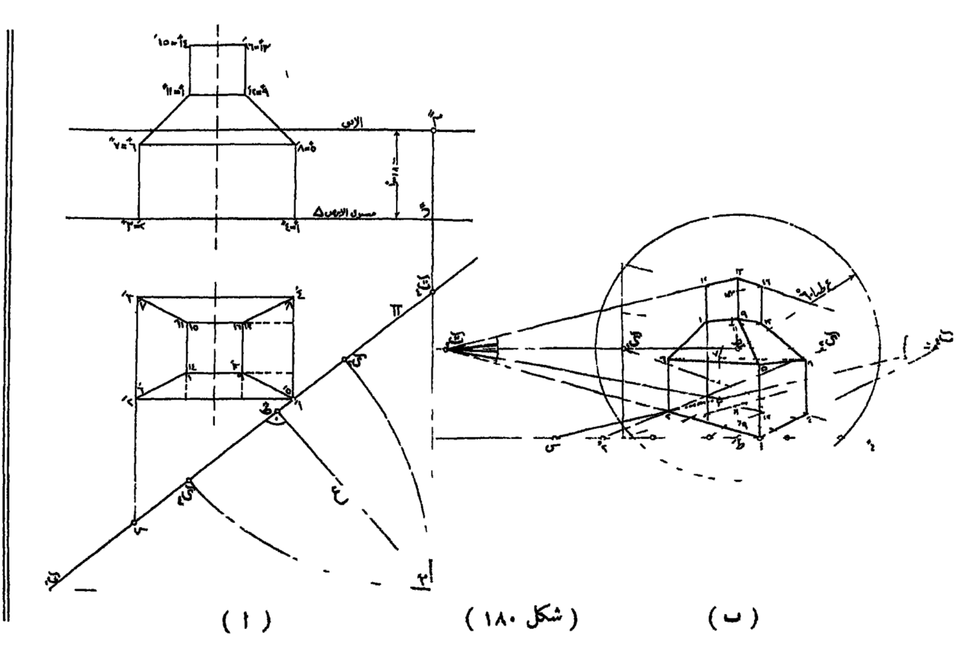
بند ١٩٥ : مثال تطبيقى على الطريقة العامة لرسم المنظور من الخارج .

يمثل (شكل ١٨٠ ا) جسماً معلوماً بمسقطيه الافقى والرأسى يراد رسم صورة منظورية له فالخطوات اللازمة لذلك يمكن تلخيصها كما يلى :

الخطوة الاولى : اختيار Π ، م

بما أن الجسم هنا فى وضع أمامى بالنسبة للمستوى الرأسى فانه اذا اختير أحد المستويات الموازية للمستوى الرأسى ليمثل Π حصلنا على صورة وجهية أو منظور متوازى

(١) اذا رسمت فى Π عدة مستقيمات عمودية على δ ومحصورة بالمستقيمين س١ تَ١ ، ء تَ١ فان هذه المستقيمات تمثل صور الاوضاع المختلفة التى يتخذها المستقيم ا′ ا اذا تحرك موازياً لنفسه فى الاتجاه الذى تحدده النقطة تَ١ وعند ما يصل ا′ ا الى Π ينطبق حينئذ على صورته س١ ء التى تحدد لذلك البعد الحقيقى بين ا′ ، ا .



(ا) (شكل ١٨٠) (ب)

للجسم (كما هو الحال فى شكل ١٨١) . أما اذا أريد أن تكون الصورة زاوية وجب أن يكون II مائلا على الاوجه الرئيسية فى الجسم وقد جرت العادة باختياره عمودياً على المستوى الافقى ويحسن أن يكون ماراً باحد الاحرف الرأسية للجسم إن أمكن (فهو يمر فى شكل ١٨٠ ا بالحرف ١ — ٥) .

أما مركز الاسقاط م فيجب أن يكون نقطة فى الفراغ يستطيع الناظر منها الى الجسم أن يراه فى صورة واضحة جلية . فاذا اختير مستوى القاعدة ١ ٢ ٣ ٤ ليمثل مستوى الارض Δ فانه لكى يتحدد م بالنسبة الى II يجب أن يُعلم :

أولا — وضع الشعاع الرئيسى م ط فى المسقط الافقى

ثانياً — ارتفاع هذا الشعاع عن Δ

ثالثاً — البعد ع لمركز الاسقاط عن II .

أما الشعاع الرئيسى م ط فيختار بحيث تكون النقطة الرئيسية ط فى منتصف الصورة بالتقريب ويكون ارتفاع هذا الشعاع عن Δ مساوياً فى الحالات العادية من ١,٦٠ — ٢,٠٠ مترا وهو الارتفاع الطبيعى للانسان باعتباره واقفاً على المستوى Δ (وهو فى الشكل ١,٨٠ متراً)[١] .

وأما البعد ع فقد وجد بالتجربة أنه يجب أن يكون بحيث يقع الجسم كله داخل مخروط دائرى قائم رأسه فى م ومحوره م ط وزاوية رأسه لا تزيد عن ٦٠° أى بحيث تقع الصورة كلها داخل دائرة مركزها ط ونصف قطرها س = ع ظتا ٦٠° وإلا كانت الصورة مشوسة وغيرطبيعية كالصورة المرسومة فى (شكل ١٧٨) وهو ما يحدث اذا كان البعد ع صغيراً . فاذا افترضنا ع

(١) فى الواقع ان هذا الارتفاع يتوقف على نوع الصورة التى يراد الحصول عليها فمثلا لو أريد رسم منظور للجسم كما يراه شخص مرتفع عنه (فى طائرة مثلا) وجب أن تفترض م على ارتفاع كبير من مستوى الارض .

تساوى بعداً معيناً ثم عينا صورة النقطة من الجسم التى يظن أنها ستكون أبعد ما يمكن عن ط (مثل النقطة ٤ فى الشكل) ورمزنا الى بعد هذه الصورة عن ط بالرمز ى فانه يجب أن تكون

ى < ع ظتا ٦٠° أو ع > $\frac{ى}{ظتا ٦٠}$ = ٢ ى تقريباً

فاذا اتفق هذا مع الفرض الاول كان البعد ع مناسباً وإلا غيرناه تكبيراً أو تصغيراً الى أن نحصل على البعد المناسب على أن شيئاً من التمرين يغنى غالباً عن تكرار التجربة (ويلاحظ أن ع = ٢,٥ ى تقريباً فى شكل ١٨٠). وفى كثير من الحالات يؤخذ ع مساوياً على الاقل لاكبر بعد فى الجسم المراد رسمه ويكون غالباً اختياراً موفقاً.

الخطوة الثانية : تعيين نقط الاتجاه الرئيسية ونقط البعد النسبى لها

لذلك نرسم فى (شكل ١٨٠ ا) من م′ موازيين الى الاتجاهين الرئيسيين ١′ ٢′، ١′ ٤′ ليقابلا II فى نقطتى الاتجاه $\bar{ت}_٢$، $\bar{ت}_٤$ على التوالى ثم نركز فى $\bar{ت}_٢$ وبفتحة تساوى $\bar{ت}_٢$م′ (طول شعاع الاتجاه) نقطع II فى نقطة القياس $\bar{ى}_٢$ للاتجاه $\bar{ت}_٢$ وبنفس الطريقة نعين نقطة القياس $\bar{ى}_٤$ للاتجاه $\bar{ت}_٤$.

الخطوة الثالثة : التمهيد لرسم المنظور فى شكل جديد

بعد الانتهاء من تحديد الاشياء المبينة فى الخطوتين الاولى والثانية حيث يستخدم لذلك شكل (١٨٠ ا) الذى يطلق عليه عادة اسم الشكل التمهيدى أو الشكل الاعدادى ننتقل الى شكل جديد (١٨٠ ب) يمثل المستوى II نفسه فنختار فيه مستقيماً ما ليمثل الافق ومستقيماً آخر δ موازياً اليه ويبعد عنه الى أسفل ببعد يساوى م″ د″ مقيساً من الشكل الاعدادى (مع جواز تغيير مقياس الرسم) ثم نختار على الافق النقطة الرئيسية ط ونقيس ابتداء منها على هذا الافق البعدين ط $\bar{ى}_٢$، ط $\bar{ت}_٤$ يميناً والبعدين

ط ىَ٤ ، ط تَ٢ يساراً مأخوذة جميعاً من الشكل الاعدادى ونعين أيضاً على ٥ النقطة ١ الى يمين ط' بحيث يكون البعد ط'١ مساوياً الى البعد ط'١ فى (شكل ١٨٠ ا) فتكون هذه النقطة صورة النقطة ١ من الجسم الواقعة فى II .

الخطوة الرابعة : رسم المنظور

نبدأ بتوصيل النقطة ١ بنقطتى الاتجاه تَ٢ ، تَ٤ فيكون الواصلان صورتى الضلعين ٢١ ، ٤١ من قاعدة الجسم ثم تقيس على ٥ البعد ١ ٢' (الى يسار ١) مساوياً للبعد ١' ٢' فى الشكل الاعدادى ونصل ٢' ىَ٢ ليقطع المستقيم ١ تَ٢ فى النقطة ٢ فتكون هى صورة النقطة ٢ من الجسم[1] وبالمثل نصل ٤' ى٤ (حيث ١ ٤' يساوى ١' ٤' فى الشكل الاعدادى) ليقطع ١ تَ٤ فى النقطة ٤ ثم نصل ٢ تَ٤ ، ٤ تَ٢ ليتقابلا فى النقطة ٣ فيكون الشكل الرباعى ١ ٢ ٣ ٤ منظور القاعدة وفى الوقت نفسه المسقط الافقى المنظورى للمستطيل ٥ ٦ ٧ ٨ من الجسم . ولما كان الحرف ١ ـــ ٥ واقعاً فى مستوى الصورة فهو يظهر بطوله الحقيقى فى شكل (١٨٠ ب) أى أن ١ ـــ ٥ فى هذا الشكل يساوى ١'' ٥'' مقيساً من الشكل الاعدادى . فاذا وصلت الصورة ٥ بنقطتى الاتجاه تَ٢ ، تَ٤ فان هذين الواصلين يلاقيان الحرفين الرأسيين المرسومين من ٢ ، ٤ فى الصورتين ٦ ، ٨ ويتقاطع حينئذ المستقيمان ٦ تَ٤ ، ٨ تَ٢ فى الصورة ٧ .

وللحصول على النقطة ٩' من المسقط الافقى المنظورى ٩' ١٠' ١١' ١٢' نمد المستقيمين ٩' ١٠' ، ٩' ١٢' فى الشكل الاعدادى ليقابلا ١' ٤' ، ١' ٢' فى نقطتين مثل ا' ، ب' (غير مبينتين بالشكل) على التناظر ثم نستخدم نقطتى القياس ىَ٤ ، ىَ٢

---

(١) نلفت النظر الى أن العلامات « ـ » التى تدل على صور النقط محذوفة من شكل (١٨٠ ب) بقصد التخفيف عنه .

فى تعـــيين الصورتين أ ، ب (على الضلعين ١ــ٤ ، ١ ــ ٢) فى شكل (١٨٠ ب) فتكون ٩' فى هذا الشكل هى نقطة تقاطع أ' ت٢ ، ب' ت٤ . فاذا أتممنا رسم المسقط الافقى المنظورى على هذا المنوال وقسنا الارتفاعات كما تقدم فى (بند ١٩٤) حصلنا على الصورة المبينة بالشكل .

ونوجه نظر القارىء الى أن تحديد النقط الاربع ت٢ ، ت٤ ، ى٢ ، ى٤ يجعل من الممكن الحصول على صورة أية نقطة فى Δ بطريقتين وإن اختلفتا فى الظاهر إلا أنهما يقومان معاً على الاساس الذى شرحناه فى (بند ١٩٤) :ــ

الطريقة الاولى ــ وتكون باستخـــدام نقطتى القياس ى٢ ، ى٤ كما تقدم فهذه الطريقة وإن كان ظاهرها تعيين الصور « بقياس » الابعاد الحقيقية ويطلق عليها أحياناً لهذا السبب اسم طريقة القياس لرسم المنظور ــ إلا أنها فى الواقع لا تخرج عن رسم مستقيمات فى Δ موازية للاتجاهين الافقيين م ى٢ ، م ى٤ ومارة بالنقط المطلوب تعيين صورها . فمثلا النقطتان ٢' ، ى٢ يمكن اعتبارهما الاثر ونقطة الاتجاه لمستقيم مثل α مرسوم فى ١ . ويمر بالنقطة ٢ صانعاً مع الضلع ٢ ــ ١ ومع أثر المستوى II زاويتين متساويتين [1] والمستقيم ٢' ى٢ فى (شكل ١٨٠ ب) يمكن اعتباره لذلك صورة α (بند ١٩٠) كما يمكن اعتبار الصورة ٢ فى هذه الحالة نقطة تقاطع الصورتين ١ ت٢ ، ٢' ى٢ لمستقيمين مارين بالنقطة ٢ .

الطريقة الثانية ــ وتكون برسم مستقيمات مارة بالنقط كما تقدم واستخدام آثار هذه المستقيمات على II فى رسم صورها ولهذا السبب يطلق على هذه

(١) فاذا رسم من ٢' فى الشكل الاعدادى مستقيم يوازى م' ى٢ فان هذا الموازى يكون المسقط الافقى α' للستقيم ويقابل II فى الاثر ٢' .

الطريقة أحيانا اسم طريقة الأوتار لرسم المنظور . فمثلا للحصول على الصورة ٢ بهذه الطريقة نعتبر الضلعين ٢ ـ ١ ، ٢ ـ ٣ المارين بالنقطة ٢ كمستقيمين اختيار يين مارين بها ثم نمد ٢′٣′ فى الشكل الاعدادى الى أن يقابل II فى س فتكون النقطتان ١ ، س أثرى هذين المستقيمين . فاذا قيس على ٥ فى شكل (١٨٠ب) البعد ١ س الى اليسار مساوياً ١′س من الشكل الاعدادى ووصل س تَ٤ فان هذا الواصل (صورة الضلع ٢ـ٣) يتقاطع حينئذ مع المستقيم ١ تَ٢ (صورة الضلع ٢ـ١) فى الصورة المطلوبة ٢ .

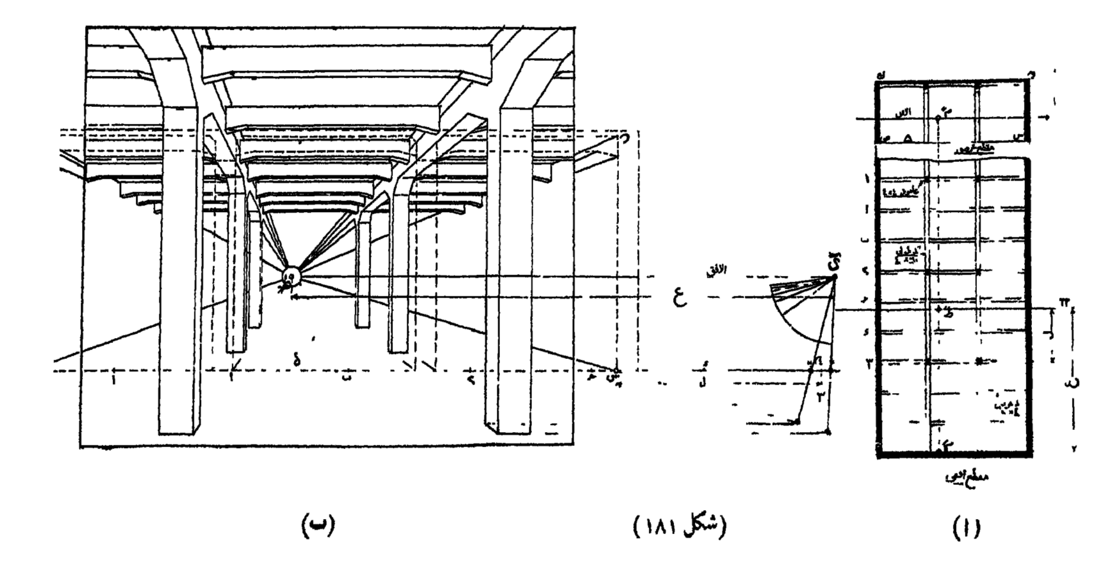
ملحوظة

كثيراً ما يحدث أن يكون البعد بين نقطتى الاتجاه تَ٢ ، تَ٤ كبيراً بحيث يتعذر الحصول عليهما معا داخل المساحة المحدودة لورقة الرسم . ففى مثل هذه الحالة تكون نقطة الاتجاه التى لايمكن الوصول اليها لوجودها خارج الورقة معلومة باعتبارها نقطة تقاطع مستقيمين معلومين فيستخدم الراسم حينئذ لتوصيلها بالنقط المختلفة آلات مخصوصة تعرف باسم « مساطر المنظور » أو يلجأ الى حلول هندسية تؤدى الى نفس الغرض [1] .

بند ١٩٦ : مثال على المنظور من الداخل

يبين (شكل ١٨١ ا) المسقطين الافقى والرأسى لصالة يراد رسمها من الداخل رسما منظورياً متوازياً . فالطريقة المستعملة لذلك لا تختلف فى الجوهر عن الطريقة التى شرحناها فى البند السابق على أنه لما كان يراد هنا رسم صورة وجهية للبناء فان

(١) تقوم مثل هذه الحلول على بعض النظريات المشهورة فى الهندسة المستوية مثل « الاعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الاضلاع المقابلة تتلاقى فى نقطة واحدة » ومثل « كل مستقيم يصل نهايتين متناظرتين لوترين متوازيين فى دائرتين يمر بمركز تشابه الدائرتين » .



(شكل ١٨١)

مستوى الصورة Π يؤخذ فى هذه الحالة موازياً للمستوى الرأسى أى منطبقاً على مستوى أحد المقاطع العرضية للبناء كما هو مبين فى الشكل الاعدادى . وتكون النقطة الرئيسية ط نقطة الاتجاه للمستقيمات العمودية على Π (راجع بند ١٨٠).

فاذا رسمنا فى (شكل ١٨١ ب) مستقيمين متوازيين ليمثلا الافق وخط الارض δ واخترنا على الافق النقطة الرئيسية ط وقسنا منها عليه (فى إحدى الجهتين) بعداً مساوياً لشعاع الاتجاه العمودى على Π أى أن ط ىَ = م ط = ع (مقيساً من الشكل الاعدادى)[1] كانت ىَ نقطة القياس للاتجاه العمودى على Π.

ثم نبدأ برسم المنظور فى (شكل ١٨١ ب) ويكون ذلك برسم مقطع عرضى كامل للصالة مبيناً عليه جميع التفاصيل وهذا المقطع هو س ص ك ه الواقع فى Π والمرسوم فى الشكل بخطوط متقطعة ثم نصل ط س ، ط ص ، ط ك ، ط ه فنحصل بذلك على صور الأحرف المحددة للحائطين الرأسيين من أعلا وأسفل ونصل بالمثل ط ببقية نقط المقطع العرضى التى تمثل مستقيمات عمودية على Π[2] للحصول على صور هذه المستقيمات. ولتحديد أوضاع العواميد والكمر العرضى (الموازى الى Π) نعين على δ فى شكل (١٨١ ب) النقط ح ، ٢ ، ب ، ا ، ١ ، ى ، ٢ ، ٣ ، ... بحيث تقاس أبعاد هذه النقط عن Π من شكل (١٨١ ا) ثم نصل ىَ الى هذه النقط بمستقيمات تتقاطع مع ط س فى نقط تحدد عليه هذه الابعاد كما تظهر فى الصورة (قارن مثلا كيفية رسم العامود ٣ فى الشكل) . وربما كان من المفيد

---

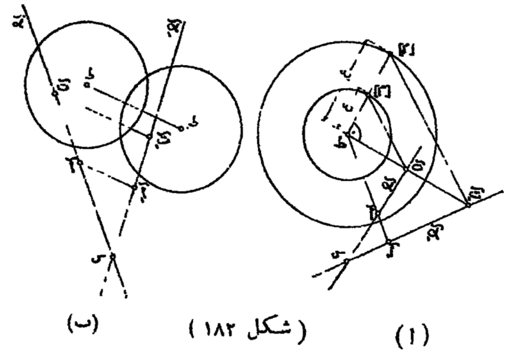
(١) يلاحظ أن شكل (١٨١ ب) مكبر أربع مرات عن شكل (١٨١ ا) لتظهر عليه التفاصيل بوضوح .

(٢) سواء فى ذلك أكانت مستقيمات متصلة كأحرف الكمر الطولى أو مستقيمات مجزأة كالاضلاع العمودية على Π من قواعد العواميد أو مستقيمات مساعدة صورية أى ليس لها وجود ولكنها ترسم فقط لتساعد على تحديد النقط ثم تحذف بعد ذلك .

أن يلاحظ الراسم عند رسم الاجزاء المائلة من أحرف الكمر الطولى فى الصورة أنها أجزاء من مستقيمات موازية لاتجاهين ثابتين (وماثلين على كل من Π ، Δ) فيحسن لذلك تعيين نقطتى الاتجاه لهذه المستقيمات وهما نقطتان (يمكن الحصول عليهما بسهولة برسم مقطع طولى للبناء فى الشكل الاعدادى) واقعتان على العمود النازل من النقطة الرئيسية ط على δ ومتماثلتان بالنسبة الى هذه النقطة .

بند ١٩٧ : تغير وضع مركز الاسقاط — التجسيم

اذا فرضنا (شكل ١٨٢ ا) أن مركز الاسقاط يتحرك عمودياً على مستوى الصورة الثابت Π فالنقطة الرئيسية ط لا تتغير بينما يتغير بالبداهة بعد المركز عن Π وبالتالى نصف قطر دائرة البعد . فاذا كان $\bar{\alpha} \equiv$ س $\bar{ت}$ هو منظور



(ب) (شكل ١٨٢) (ا)

مستقيم مثل α عندما يكون مركز الاسقاط م على بعد من Π يساوى ع وكان $\bar{\alpha}_1 \equiv$ س $\bar{ت}_1$ هو منظور نفس المستقيم α عندما يكون مركز الاسقاط فى $م_1$ التى تبعد عن Π بالبعد $ع_1$ فمن الواضح أن $\bar{\alpha}$ ، $\bar{\alpha}_1$ يتقابلان حينئذ

فى الأثر الثابت س للمستقيم α على Π كما أن النقط ط ، تَ ، تَ١ هى على استقامة واحدة بحيث يكون المستقيمان [م] تَ ، [م١] تَ١ متوازيين (لأن هذين المستقيمين هما الموقعان لشعاعى الاتجاه اللذان يمكن الحصول عليهما بتطبيق المستوى العمودى م١ م ط تَ تَ١ على Π) . ولما كانت الصورتان اَ ، اَ١ لاية نقطة مثل ا على المستقيم α لابد أن يقعا على استقامة واحدة مع ط لأن المستقيم ط اَ اَ١ يمثل أثر المستوى م م١ Π فيتضح من ذلك نه اذ رسمت ا شكلا سه واقعاً فى مستو P فإن الصورتين سَه ، سَه١ اللتين ترسمها اَ ، اَ١ يكونان شكلين مؤتلفين مركزياً حيث محور الائتلاف هو الأثر ع للمستوى P ومركز الائتلاف هو النقطة الرئيسية ط .

واذا تحرك مركز الاسقاط من م الى م١ فى مستوى الاختفاء الموازى لمستوى الصورة الثابت Π (شكل ١٨٢ ب) فان النقطة الرئيسية تتحرك فى Π من ط الى ط١ وفى هذه الحالة يبقى البعد ع وبالتالى نصف قطر دائرة البعد ثابتاً لا يتغير . فاذا كان $\bar{\alpha} \equiv$ س تَ صورة مستقيم α عند ما يكون مركز الاسقاط فى م وكان $\bar{\alpha}_1 \equiv$ س تَ١ صورة نفس المستقيم عندما يكون مركز الاسقاط فى م١ فمن الواضح أن $\bar{\alpha}$ ، $\bar{\alpha}_1$ يتقاطعان فى هذه الحالة أيضاً فى الأثر الثابت س للمستقيم α على Π وأن المستقيم تَ تَ١ يساوى ويوازى ط ط١ كما أن المستقيم اَ اَ١ الذى يصل صورتى أية نقطة ا على المستقيم يوازى ط ط١ . فاذا رسمت ا شكلا سه واقعاً فى مستو P فان الصورتين سَه ، سَه١ اللتين ترسمها اَ ، اَ١ فى هذه الحالة يكونان شكلين مؤتلفين ائتلافاً متوازياً حيث محور الائتلاف هو الاثر ع للمستوى P واتجاه الائتلاف ط ط١ .

واذا كان البعد م م١ فى شكل (١٨٢ ب) مساوياً للبعد الطبيعى بين عينى

إنسان (من ٦ — ٧ سم) واستخدمنا مركزى الاسقاط م ٢ م ١ فى رسم منظورى جسم واحد على المستوى II فان هذين المنظورين يؤلفان حينئذ ما يسمى بالصورة المجسمة للجسم بمعنى أنه اذا وضع الناظر الى الرسم عينيه فى مركزى الاسقاط م ٢ م ١ وجد أن صورتى الجسم يندمجان ويؤولان الى صورة واحدة مجسمة .

الباب الحادى عشر

المبادىء الاساسية لعلم الفوتوغرامتريا

الفصل الاول

كلمة عامـــة

بند ١٩٨ : تعاريف

عرفنا فى الفصل الاخير من الباب السابق كيفيـة الحصول على صورة منظورية لجسم معلوم بمساقطه العمودية (المسقطين الافقى والرأسى أو المسقط المرقوم) وسنخصص هذا الباب لشرح العملية العكسية لهذه العملية . وهذه العملية العكسية التى تقوم عليها أسس ذلك العلم الحديث الهام المسمى بالفوتوغرامتريا هى عملية تعيين جسم برسم مساقطه العمودية اذا علمت صورة فوتوغرافية له (صورة منظورية) أو اكثر .

فاذا علمت مثل هذه الصورة الفوتوغرافية فان العناصر التى تحدد مركز الاسقاط (أو مركز التصوير) م بالنسبة للصورة II وهى النقطة الرئيسية « ط » والبعد « ع » تسمى عناصر الاستيضاح الداخلى للصورة كما تسمى العناصر المحددة لمركز الاسقاط والشعاع الرئيسى م ط فى الفراغ بالنسبة للجسم المصوَّر بعناصر الاستيضاح الخارجى .

واذا كان الجسم المصوَّر جسماً هندسياً معلومة أبعاده وزواياه كما هو الحال فى فن العمارة فان صورة واحدة له تكفى للقيام بعملية الاستيضاح الداخلى ولرسم مسقط الجسم المرقوم (الفصل الثانى) .

أما إذا لم تكن أبعاد وزوايا الجسم المصور معلومة كأن كان الجسم سطحاً طبوغرافياً — وهذا هو الاستعمال الرئيسى للفوتوغرامتريا — فلا بد لرسم مسقطه المرقوم من صورتين فوتوغرافيتين له على الاقل ترسمان من مكانين مختلفين بواسطة آلة خاصة لذلك تسمى بالفوتوثيودوليت وهى آلة فوتوغرافية مصحوبة بثيودليت لقياس الزوايا ومزودة بعـــلامات خاصة على لوحة التصوير تسمح بتعيين النقطة الرئيسية ط (قارن شكل ١٨٥ ا) ومزودة أيضاً بمقياس خاص يسمح بقراءة البعد ع لمركز التصوير عن اللوحة . وهكذا تكفينا الفوتوثيودوليت مؤونة القيام بعملية الاستيضاح الداخلى لان هذه العملية فى حالة السطوح الطبوغرافية وعلى وجه العموم فى حالة الاجسام المجهولة زواياها وأبعادها غير ممكنة .

ونبرهن الآن على النظرية الاساسية الآتية :

اذا علمت عناصر الاستيضاحين الداخلى والخارجى لصورتين فوتوغرافيتين لجسم ما كانت هاتان الصورتان كافيتين لتحديد الجسم .

فنفرض لذلك أن الصورتين Π_1 ، Π_2 أخذتا لقطعة أرض من مكانين مختلفين م$_1$ ، م$_2$ بواسطة فوتوثيودوليت فتحددت بذلك عناصر الاستيضاح الداخلى للصورتين ثم استخدمت الآلة فى تحديد عناصر الاستيضاح الخارجى بقياس البعد الافقى بين م$_1$ ، م$_2$ وهو البعد الذى يطلق عليه اسم القاعدة وقياس الزاويتين φ_1 ، φ_2 المحصورتين بين القاعدة وبين الشعاعين الرئيسيين م$_1$ ط$_1$ ، م$_2$ ط$_2$ (اللذين هما محورا التصوير اذا كانت اللوحتان رأسيتين أو المسقطين الافقيين لهذين المحورين اذا كانت لوحتا التصوير مائلتين) . فاذا راعينا عـــند التصوير من م$_1$ أن تظهر (على اللوحة Π_1) الصورة م$_2'$ للمكان م$_2$ وعند التصوير من م$_2$ أن تظهر (على اللوحة Π_2) "صورة م$_1''$

للمكان م١ فانه يطلق على الصورتين [1] م٢ ′ ، م١ ″ اسم النقطتين الاساسيتين للوحتى التصوير Π١ ، Π٢ . واذا كانت ا′ ، ا″ صورتى نقطة واحدة من قطعة الارض مثل ا على Π١ ، Π٢ فمن الواضح أن م٢ ′ ا′ ، م١ ″ ا″ يتقابلان حينئذ على المستقيم ع٢١ (خط تقاطع Π١ ، Π٢) فى نقطة مثل س [2] وبعبارة أخرى اذا اعتبرنا ا′ ، ا″ نقطتين متناظرتين فى Π١ ، Π٢ وكذا ب′ ، ب″ ... الخ كانت الحزمتان م٢ ′ (ا′ ب′ ...) ، م١ ″ (ا″ ب″ ...) منظورتين (وتكون الحزمتان مؤتلفتين فقط فى حالة فصل اللوحتين Π١ ، Π٢) . فاذا كان Π٣ مستوياً جديداً يقطع Π١ ، Π٢ فى المستقيمين ع٣١ ، ع٣٢ على التوالى وكان م٣ هو المركز الجديد للاسقاط فى هذه الحالة وعلمت النقط الاساسية الست : م٢ ′ ، م٣ ′ فى Π١ ثم م١ ″ ، م٣ ″ فى Π٢ وأخيراً م١ ‴ ، م٢ ‴ فى Π٣ [3] — فان الصورة ا‴ فى Π٣ للنقطة ا يمكن حينئذ الحصول عليها بمعلومية الصورتين ا′ ، ا″ لنفس النقطة إذ يكفى لذلك أن نصل ص م١ ‴ ، ع م٢ ‴ (حيث ص هى نقطة تقاطع ع٣١ مع م٣ ′ ا′ وحيث ع نقطة تقاطع ع٣٢ مع م٣ ″ ا″) فيتقابلا فى الصورة المطلوبة ا‴ . فاذا كان Π٣ مستوياً أفقياً واختير المركز م٣ فى اللانهاية بحيث يحدد اتجاهاً عمودياً على Π٣ كان ا‴ هو المسقط الافقى للنقطة ا وبنفس الطريقة يمكن تعيين المسقط الرأسى للنقطة على مستو جديد عمودى على Π٣ وهكذا تتحدد قطعة الارض .

---

(١) يلاحظ أن العلامات « ′ » حلت فى هذا المكان فقط تسهيلا للطبع محل العلامات « ـــ » وسنعود الى استعمال العلامات الاخيرة فيما يلى من الفصول .

(٢) لان س فى هذه الحالة هى نقطة تقاطع المستويات الثلاثة Π١ ، Π٢ ، م١ م٢ ا .

(٣) متروك للقارىء عمل شكل يوضح البرهان وذلك برسم زاوية ثلاثية مجسمة محدودة بالمستويات الثلاثة Π١ ، Π٢ ، Π٣ المتلاقية فى نقطة واحدة .

هذا وتنقسم المساحة الفوتوغرامترية التى تبحث فى مسح الاراضى بواسطة التصوير الشمسى الى مساحة فوتوغرامترية أرضية حيث يكون غالباً تحديد عناصر الاستيضاح الخارجى ممكناً كما تقدم وتكفى حينئذ صورتان لقطعة الارض والى مساحة فوتوغرامترية جوية (التصوير من الطائرة) حيث يتعذر قياس عناصر الاستيضاح الخارجى وفى هذه الحالة لا تكفى صورتان وإنما يصبح من الضرورى لحساب هذه العناصر بادىء ذى بدء ثم استنباط المسقط المرقوم أن تعلم عدة صور للقطعة المراد تحديدها .

وسنقتصر فى الفصل الثالث على شرح الأسس الهندسية التى تقوم عليها الطرق البيانية لاستنباط المساقط المرقومة فى حالة المساحة الفوتوغرامترية الارضية . على أنه تجب ملاحظة أن استعمال هذه الطرق البيانية غير جائز فى الامثلة العملية التى تقتضى الدقة وإنما يتجه الانسان فى مثل هذه الاحوال الى الطرق الحسابية أو الى استخدام آلات خاصة لذلك .

الفصل الثانى

تعيين الاجسام الهندسية من صورة واحدة

بند ١٩٩ : لوحة التصوير رأسية

مثال — اذا علم أن الشكل الرباعى $\bar{ا}\ \bar{ب}\ \bar{ح}\ \bar{ء}$ فى مستوى الصورة Π هو صورة مربع ا ب ح ء مرسوم فى مستوى أفقى Φ فالمطلوب ايجاد عناصر الاستيضاح الداخلى وكذا رسم المسقط المرقوم للمربع على مستوى الافق مع العلم بأن الآلة كانت رأسية عند تصوير المربع.

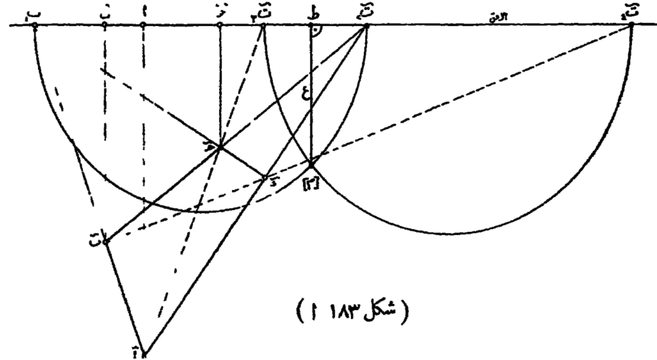
أولا : عملية الاستيضاح الداخلى

لتعيين ط ، ع فى هذه الحالة نمد $\bar{ا}\ \bar{ب}$ ، $\bar{ء}\ \bar{ح}$ ليتقابلا فى $\bar{ت}_1$ ونمد كذلك $\bar{ا}\ \bar{ء}$ ، $\bar{ب}\ \bar{ح}$ ليتقابلا فى $\bar{ت}_2$ (شكل ١٨٣ ا) فتكون $\bar{ت}_1$ نقطة اتجاه المستقيمين المتوازيين ا ب ، ء ح كما تكون $\bar{ت}_2$ نقطة الاتجاه للمستقيمين المتوازيين ا ء ، ب ح . أما المستقيم $\bar{ت}_1$ $\bar{ت}_2$ فهو خط الاتجاه لمستوى المربع أى الافق الذى تقع عليه ط .

ولما كان الضلعان ا ب ، ا ء متعامدين (وكذا ء ح ، ب ح) فاننا اذا طبقنا مستوى الافق (الذى هو مستوى الاتجاه للمستوى Φ) على Π وفرضنا أن [م] الموقع المجهول لمركز الاسقاط م وجب أن تكون الزاوية $\bar{ت}_1$ [م] $\bar{ت}_2$ قائمة (حيث [م] $\bar{ت}_1$ ، [م] $\bar{ت}_2$ موقعا شعاعى الاتجاه للضلعين ا ب ، ا ء) وينتج من ذلك أن المحل الهندسى للموقع [م] هو دائرة قطرها $\bar{ت}_1$ $\bar{ت}_2$. وبالمثل لما كان القطران ا ح ، ب ء متعامدين وجب أن تكون الزاوية $\bar{ت}_3$ [م] $\bar{ت}_4$ قائمة (حيث $\bar{ت}_3$ ، $\bar{ت}_4$ نقطتا الاتجاه للقطرين

ا حـ م ب ى) أى أن [م] يجب أن تقع أيضاً على محيط دائرة أخرى قطرها تَ٣ تَ٤ .

فاذا كانت [م] إحدى نقطتى تقاطع الدائرتين السالفتى الذكر وأسقطنا منها عموداً على الافق ليقابله فى ط كانت ط هى النقطة الرئيسية للصورة وكان ع = ط [م] بعد مركز الاسقاط عن Π .

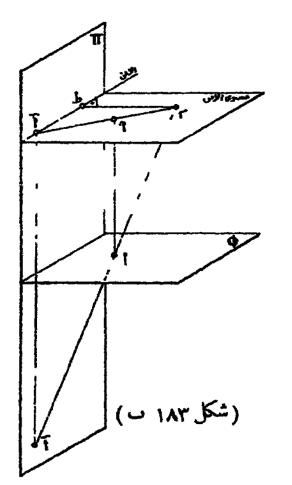


(شكل ١٨٣ ا)

ويتعين الأثر ع للمستوى Φ اذا علم الطول الحقيقى « ل » لضلع المربع وذلك بالطريقة الآتية (وهى غير مبينة فى الشكل) : نعين على الافق نقطة القياس ىَ٣ للاتجاه تَ٣ مثلا بجعل تَ٣ ىَ٣ مساوياً الى تَ٣ [م] ثم نعين على الافق نقطة مثل و بحيث يكون البعد ىَ٣ و مساوياً الى الطول المعلوم ل ونصل ىَ٣ و ، ىَ٣ آ ونرسم من و موازياً الى ىَ٣ آ ليقابل ىَ٣ ى فى س فتكون س إحدى نقط ع الموازى للافق ونترك للقارىء إثبات ذلك بمقتضى (بند ١٩٠) .

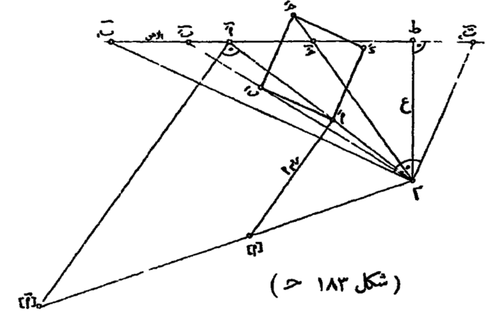
ثانياً : المسقط المرقوم

يؤخذ من شكل (١٨٣ ب) أن المسقط الافقى ا′ لنقطة مثل ا (فى المستوى Φ) يوجد على المسقط الافقى م آ للشعاع ° ا (حيث آ المسقط الافقى


(شكل ١٨٣ ب)

المنظورى للنقطة ا أو المسقط الافقى للصورة آ) . ويمكن الحصول على اَ فى شكل (١٨٣ ا) باسقاط عمود من آ على الافق فيقابله فى اَ .

فاذا فرضنا فى شكل (١٨٣ حـ) أن سطح الورقة يمثل مستوى الافق ورسمنا مستقيماً حيثما اتفق ليمثل الافق وأخذنا عليه نقطة ما ط هى النقطة الرئيسية فان اَ يمكن تعيينها على هذا المستقيم بقياس البعد ط اَ مساوياً لنظيره فى (شكل ١٨٣ ا) . وبالمثل


(شكل ١٨٣ حـ)

نعين على الافق أيضاً النقط تَ١ ، تَ٢ ، بَ ، حـَ ، . . . بقياس الابعاد المختلفة من شكل (١٨٣ ا) . وأخيراً نعين فى (شكل ١٨٣ حـ) مركز الاسقاط م على العمود المقام من ط على الافق وعلى بعد منه يساوى ع التى سبق ايجادها .

فاذا وصل م آ فان المسقط الافقى ا′ للنقطة ا يتحدد على هذا الواصل اذا تحدد المستوى Φ بمعلومية طول ضلع المربع كما تقدم [1]. غير أن ا′ تؤخذ عادة حيثما اتفق على المستقيم م آ ويكون هذا الاختيار محدداً حينئذ لمقياس الرسم فى الشكل . ومتى تم اختيار ا′ تعينت المساقط الافقية لبقية النقط فالمستقيمان المرسومان من ا′ موازيين الى م ت١ ، م ت٢ يقابلان م ب ، م ى فى ب′، ى′ وبنفس الطريقة تتحدد حـ′ ويكون ا′ ب′ حـ′ ى′ المسقط الافقى المطلوب للمربع .

أما رقم النقطة ا أى بعدها عن مستوى الافق فيمكن الحصول عليه كما يؤخذ من شكل (١٨٣ ب) بتطبيق المستوى م ا′ آ′ آ ا على مستوى الافق حول م ا′ آ′ إذ لما كان البعد آ′ آ يظهر فى مستوى الصورة بطوله الحقيقى (ويلاحظ أن هذا البعد ثابت ولا يتوقف الا على الصورة آ وحدها) فانه يمكن قياسه من شكل (١٨٣ ا) وجعل العمود ا′ [آ] فى شكل (١٨٣ حـ) مساوياً له وبذا يكون ا′ [ا] هو الرقم المطلوب .

بعض أمثلة أخرى

نذكر فيما يلى بعض أمثلة أخرى على عملية الاستيضاح الداخلى لصور مأخوذة بآلات رأسية لاشكال هندسية واقعة فى مستويات أفقية :

(١) اذا كان الشكل الرباعى آ ب حـ ى فى (شكل ١٨٣ ا) صورة لمستطيل (بدلا من مربع) وعلمت النسبة بين ضلعيه فان معنى هذا أن

(١) لانه اذا تعين فى شكل (١٨٣ ا) أثر هذا المستوى كان البعد بينه و بين الافق مساوياً الى ا ا′ فى شكل (١٨٣ ب) فبتطبيق المستوى م ا′ آ′ آ ا على مستوى الافق فى شكل (١٨٣ حـ) تتحدد حينئذ ا′ .

تكون الزاوية ب ا حـ مثلا معلومة وتكون [م] فى هذه الحالة هى نقطة تقاطع نصف الدائرة المرسومة على تَ١ تَ٢ مع قوس الدائرة المرسومة على تَ١ تَ٣ كوتر فيها بحيث تقبل زاوية تساوى الزاوية المعلومة ب ا حـ . وبذا تتعين ط ، ع .

(٢) اذا كان آ بَ حَ صورة لمثلث (فى مستو أفقى) معلومة زواياه الحقيقية وعلمت نقط الاتجاه تَ١ ، تَ٢ ، تَ٣ لاضلاعه ا ب ، ب حـ ، حـ ا بحيث كانت هذه النقط واقعة على مستقيم واحد يمثل الافق فان [م] يمكن الحصول عليها فى هذه الحالة كنقطة تقاطع قوسى دائرتين مرسومة إحداهما على الوتر تَ١ تَ٣ مثلا وتقبل الزاوية ا والاخرى على الوتر تَ٢ تَ٣ وتقبل الزاوية حـ .

(٣) اذا علم أن المقطع المخروطى الذى تعينه النقط الخمس آ ، بَ ، حَ ، ءَ ، هَ فى مستوى الصورة هو صورة لدائرة مارة بالنقط ا، ب، حـ، ء، هـ بحيث يكون ا ب حـ ء مستطيلا مرسوماً داخلها فالمطلوب تعيين ط ، ع .

لحل هذه المسألة نوجه نظر القارىء الى نظرية معروفة وهى أنه اذا مرت دائرة برؤوس مستطيل ا ب حـ ء فالشرط اللازم والكافى لان تمر هذه الدائرة نفسها بنقطة خامسة مثل هـ هو أن يكون المستقيمان هـ ب ، هـ ء أو المستقيمان هـ ا ، هـ حـ اللذان يصلان هـ برأسين متقابلين من رؤوس المستطيل متعامدين (مركز الدائرة هو مركز المستطيل) .

فاذا فرضنا فى شكل (١٨٣ ا) أن تَ١ نقطة اتجاه ا ب ، ء حـ وأن تَ٢ نقطة اتجاه ب حـ ، ا ء بحيث كان المستقيم تَ١ تَ٢ هو الافق ورسمنا الدائرة التى قطرها تَ١ تَ٢ (والتى هى المحل الهندسى للموقع [م] لمركز الاسقاط الذى يجعل آ بَ حَ ءَ صورة لمستطيل) ثم وصلنا هَ بَ ، هَ ءَ ليقابلا الافق

فى ت٥ ، ت٦ ورسمنا الدائرة التى قطرها ت٥ ت٦ (والتى هى المحل الهندسى للموقع [م] الذى يجعل الزاوية المحصورة بين هـ ب ، هـ ء قائمة) فان [م] تكون فى هذه الحالة إحدى نقطتى تقاطع هاتين الدائرتين وبذا تتعين ط ، ع .

واذا كان ع مستقيماً حيثما اتفق رسم موازياً للافق ليمثل أثر المستوى الافقى المرسومة فيه الدائرة ويمثل فى الوقت نفسه محور الانطباق الذى يدور حوله هذا المستوى عند تطبيقه على Π فان [م] تكون فى هذه الحالة مركزاً للائتلاف بين الدائرة والمقطع المخروطى كما يكون ع محوراً لهذا الائتلاف المركزى ويكون الافق هو المستقيم المحدد المرسوم فى مجموعة المقطع المخروطى مناظراً للمستقيم الذى فى اللانهاية باعتباره مرسوماً فى مجموعة الدائرة وبذا يتعين الائتلاف المذكور . فاذا رسمت الدائرة التى تمر بالنقط المناظرة [ا] ، [ب] ، [حـ] ، [ء] ، [هـ] فى هذا الائتلاف فاننا نكون قد وصلنا بهذه الطريقة الى رسم دائرة مؤتلفة مركزياً مع مقطع مخروطى معلوم بخمس نقط مختلفة ليس بينها نقط متتالية (راجع بند ٧٧) .

(٤) اذا علم أن المقطع المخروطى الذى تعينه المماسات الخمسة $\bar{\alpha}$ ، $\bar{\beta}$ ، $\bar{\gamma}$ ، $\bar{\delta}$ ، $\bar{\varepsilon}$ فى مستوى الصورة هو صورة دائرة تمس المستقيمات α ، β ، γ ، δ ، ε بحيث تكوّن الاربعة الاولى معيناً مرسوماً خارجها فالمطلوب تعيين ط ، ع .

هذه المسألة مزاوجة للمسألة السابقة (٣) ولحلها نوجه نظر القارىء الى النظرية الآتية : اذا رسمت دائرة تمس أضلاع معين ورمزنا لهذه الاضلاع بالرموز α ، β ، γ ، δ فالشرط اللازم والكافى لان تمس الدائرة مستقيماً خامساً ε هو أن يكون المستقيمان و ا ، و ب متعامدين حيث و مركز الدائرة (ومركز المعين فى الوقت نفسه) وحيث ا ، ب نقطتا تقاطع ε مع ضلعين متقابلين (غير متجاورين) مثل α ، γ أو β ، δ من أضلاع المعين .

ونترك للقارىء حل هذا المثل على منوال المثال السابق ورسم دائرة مؤتلفة مركزياً مع المقطع المخروطى المشار اليه والمعلوم بخمسة مماسات مختلفة ليس بينها مماسات متتالية .

بند ٢٠٠ : لوحة التصوير مائلة

كثيراً ما يحدث أن تكون آلة التصوير مائلة عند تصوير شكل هندسى واقع فى مستو أفقى . ففى هذه الحالة يمكن اعتبار الآلة رأسية والشكل واقعاً فى مستو مائل مثل P . وتتعين حينئذ ط ، ع بمجرد معرفة الزاوية ω التى يميل بها P على Π . فاذا فرضنا فى (شكل ١٨٣ ا) أن الشكل الرباعى المبين هو صورة مربع أفقى أخذت بآلة مائلة فان الافق $\bar{ت}_١ \bar{ت}_٤$ يمثل حينئذ خط الاتجاه $\bar{ط}$ للستوى P وتكون نقطة تقاطع نصفى الدائرتين المرسومتين على $\bar{ت}_١ \bar{ت}_٢$ ، $\bar{ت}_٣ \bar{ت}_٤$ هى الموقع (م) لمركز الاسقاط عند تطبيق P على Π غير أن ط لا تكون واقعة فى هذه الحالة على $\bar{ط}$ وإنما يمكن الحصول عليها وعلى البعد ع بالكيفية المبينة فى (شكل ١٧١) مثلا .

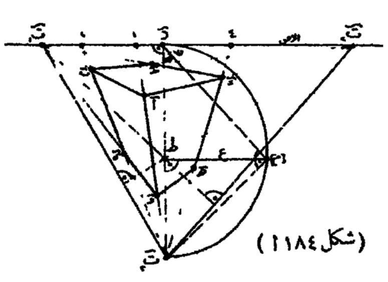
وتستخدم النظرية الآتية لتعيين عناصر الاستيضاح الداخلى للصورة عند ما تكون لوحة التصوير مائلة :

اذا علمت نقط الاتجاه $\bar{ت}_١$ ، $\bar{ت}_٢$ ، $\bar{ت}_٣$ لثلاثة مستقيمات متعامدة بعضها على بعض فان ط تكون نقطة تلاقى الاعمدة النازلة من رؤوس المثلث $\bar{ت}_١ \bar{ت}_٢ \bar{ت}_٣$ على الاضلاع المقابلة لها . ويمكن الحصول على البعد ع فى هذه الحالة بتطبيق مستوى المثلث $\bar{ت}_٣$ ، $\bar{ق}$ مثلا على مستوى الصورة كما هو مبين فى (شكل ١٨٤ ا) . فهذا المثلث يجب أن يكون قائم الزاوية فى م لان م $\bar{ت}_٣$ هو شعاع الاتجاه لأحد المستقيمات الثلاثة كما أن م $\bar{ق}$ هو شعاع الاتجاه

للمستقيمات ذوات الميل الاعظم فى المستويات العمودية على هذا المستقيم .

وتتضح صحة النظرية السابقة بالرجوع الى (بند ١٩١) لان كل ضلع من أضلاع المثلث تَ١ تَ٢ تَ٣ فى شكل (١٨٤ ا) هو خط اتجاه المستويات العمودية على الاتجاه الذى يحدده الرأس المقابلة لهذا الضلع فى المثلث .

ويكون استخدام هذه النظرية عملياً بالطريقة الآتية :



(شكل ١٨٤ ا)

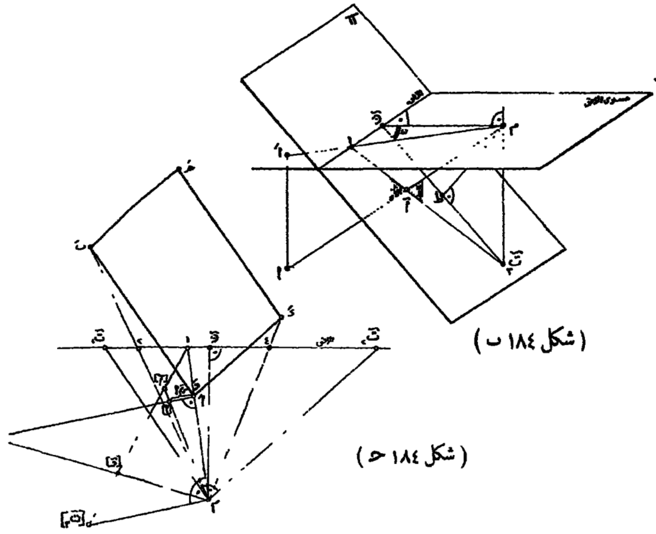
اذا كان اَ بَ ىَ وَ ... (شكل ١٨٤ ا) صورة متوازى مستطيلات لا يوجد بين أحرفه حرف واحد مواز الى مستوى الصورة المائل فالمطلوب تعيين ط ، ع ورسم المسقط المرقوم لمتوازى المستطيلات على المستوى الافقى المار بمركز الاسقاط .

فالمستقيم تَ١ تَ٢ يمثل فى هذه الحالة الافق أى خط اتجاه المستوى الافقى المرسوم فيه المستطيل ا ب حـ ى والنقطة تَ٣ هى نقطة اتجاه الاحرف الرأسية . وتكون ط نقطة تلاقى الاعمدة النازلة من رؤوس المثلث تَ١ تَ٢ تَ٣ على الاضلاع المقابلة كما تقدم فاذا رسم من ط عمود على تَ٣ ة لیقابل الدائرة المرسومة على تَ٣ ة كقطر — فى النقطة [م] كان ط [م] = ع .

ولرسم المسقط الافقى لمتوازى المستطيلات نفرض فى شكل (١٨٤ ب) أن ا إحدى نقط السطح فيكون مسقطها الافقى ا' واقعاً على المسقط الافقى م ا' للشعاع م ا المار بها ولكن م ا' يقابل تَ٣ اَ كما يؤخذ من شكل

فى النقطة ١ الواقعة على الافق (خط الاتجاه للمستويات الافقية) والتى تبعد عن ﻫَ يبعد يظهر فى شكل (١٨٤ ا) بطوله الحقيقى لوقوعه فى مستوى الصورة.

فاذا فرضنا فى شكل (١٨٤ حـ) أن سطح الورقة يمثل مستوى الافق ورسمنا مستقيماً ما يمثل الافق ثم أخذنا عليه نقطة ما ﻫَ فان النقطة ١ يمكن حينئذ تعيينها على الافق بقياس البعد ﻫَ ١ فى الاتجاه المبين مساوياً لنظيره فى شكل (١٨٤ ا) وبالمثل يمكن تعيين النقط الاخرى تَ١ ، تَ٢ ، ٢ ، ٤ ، . . .



(شكل ١٨٤ ب)

(شكل ١٨٤ حـ)

على الافق بقياس الابعاد المناظرة من شكل (١٨٤ ا) . وأخيراً نعين فى شكل (١٨٤ حـ) مركز الاسقاط م على العمود المقام من ﻫَ على الافق وعلى بعد منه مساو الى [م] ﻫَ الذى يمكن قياسه من شكل (١٨٤ ا).

فاذا وصل م ١ وأخذت عليه أية نقطة مثل ا′ أمكن اعتبار هذه النقطة المسقط الافقى للنقطة ا حيث يحدد هذا الوضع الاختيارى مقياس الرسم للشكل كما تقدم فى (بند ١٩٩) . ومتى تم اختيار ا′ يتحدد حينئذ المسقط الافقى لبقية النقط فالمستقيم المرسوم من ا′ موازيا الى م تَ٣ يقابل المستقيم م ٤ فى المسقط الافقى ى′ للنقطة ى وبالمثل يتلاقى المستقيم المرسوم من ا′ موازياً الى م تَ١ مع المستقيم م ٢ فى ب′ .

ولتعيين رقم نقطة مثل ا أى بعدها عن مستوى الافق نطبق المستوى م تَ٣ آ ا ا′ كما يؤخذ من (شكل ١٨٤ ب) على مستوى الافق حول م ا′ . فنقيس لذلك على العمود المقام من م على م ا′ فى شكل (١٨٤ حـ) البعد م [تَ٣] مساوياً للبعد [م] تَ٣ فى شكل (١٨٤ ا) ثم نصل [تَ٣] بالنقطة ا ونعين على هذا الواصل النقطة [آ] بحيث يكون البعد [تَ٣] [آ] مساوياً للبعد تَ٣ آ الذى يظهر فى شكل (١٨٤ ا) بطوله الحقيقى لوقوعه فى مستوى الصورة ثم نصل م [آ] فيكون هذا الواصل موقع الشعاع م ا ويقابل لذلك العمود المقام من ا′ على م ا′ فى الموقع [ا] للنقطة ا وبذا يكون رقم ا مساوياً الى ا′ [ا] . وبنفس الطريقة يمكن تعيين الرقم و′ [و] للنقطة « و » ويكون ارتفاع متوازى المستطيلات على هذا مساوياً الى البعد [ا] [و] مع مراعاة مقياس الرسم .

الفصل الثالث

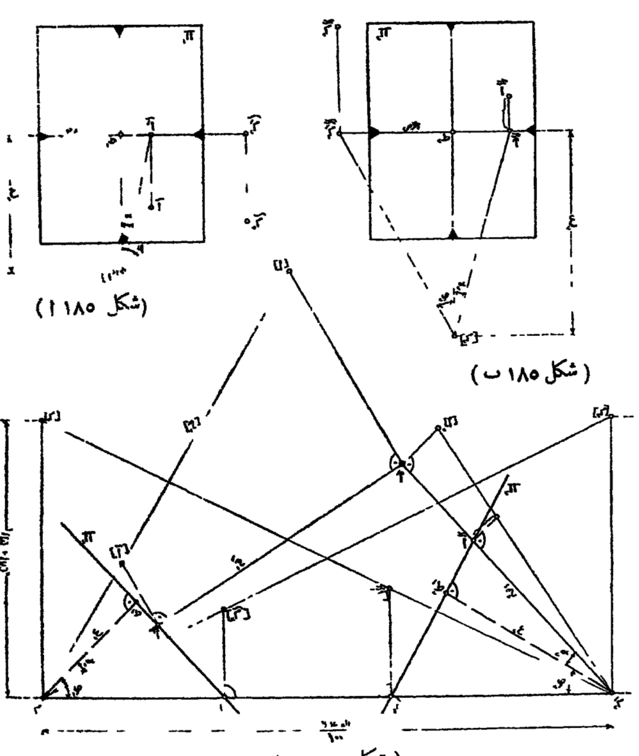
القواعد الهندسية للمساحة الفوتوغرامترية الأرضية

بند ٢٠١ : استنباط المسقط المرقوم من صورتين رأسيتين

لنفرض فى شكلى (١٨٥ ا ، ب) أن لوحتى تصوير $\Pi_١$ ، $\Pi_٢$ قد أمكن الحصول عليهما باستخدام فوتوثيودوليت عند التصوير من مكانين مختلفين م١ ، م٢ فالعلامات المبينة على اللوحتين تحدد فى هذه الحالة النقطتين الرئيسيتين ط١ ، ط٢ كما أن البعدين ع١ ، ع٢ يمكن قراءتها مباشرة من آلة التصوير فى كل مرة وتمثيلهما كما هو مبين فى الشكلين (بتطبيق مستوى الافق على كل من $\Pi_١$ ، $\Pi_٢$) وبذا تتحدد عناصر الاستيضاح الداخلى . فاذا فرضنا أن اَ ، اً صورتان لنقطة واحدة ا وكان الفوتوثيودوليت رأسياً عند تصوير هذه النقطة من م١ ومن م٢ وعلمت عناصر الاستيضاح الخارجى وهى كما قدمنا (بند١٩٨) القاعدة أو البعد الافقى بين م١ ، م٢ والزاويتان $\varphi_١$ ، $\varphi_٢$ المحصورتان بين القاعدة والشعاعين الرئيسين م١ ط١ ، م٢ ط٢ — فانه يراد تعيين المسقط المرقوم ا′ للنقطة ا على أى مستو أفقى مثل H .

لذلك نستخدم عناصر الاستيضاح الخارجى فى رسم شكل جديد (١٨٥ حـ) حيث يمثل سطح الورقة المستوى الافقى H ونبين على هذا الشكل المساقط الافقية م١′ ، م٢′ ، م١′ ط١′ ، م٢′ ط٢′ لمركزى الاسقاط ومحورى التصوير . فاذا كان م١′ ط١′ مساوياً ع١ وكان م٢′ ط٢′ مساوياً ع٢ فان العمود المقام من ط١′ على م١′ ط١′ يمثل حينئذ أثر لوحة التصوير $\Pi_١$ على المستوى H وكذلك العمود المقام من ط٢′ على م٢′ ط٢′ يمثل أثر اللوحة $\Pi_٢$.

واذا قيس على أثر II١ البعد ط١َ آ مساوياً الى ط١ آ في (شكل ١٨٥ ا) وقيس على أثر II٢ البعد ط٢َ آ مساوياً الى ط٢ آ في (شكل ١٨٥ ب) ثم وصل م١َ آ ، م٢َ آ فان هذين الواصلين يمثلان حينئذ المسطقين الافقيين



(شكل ١٨٥ ا)

(شكل ١٨٥ ب)

(شكل ١٨٥ حـ)

η_1' و η_2' لشعاعى الاسقاط $\eta_1 \equiv$ م$_1$ ا و $\eta_2 \equiv$ م$_2$ ا المارين بالنقطة ا ويتقاطعان لذلك فى المسقط الافقى المطلوب ا' للنقطة ا [1] .

ويلاحظ أننا فرضنا مقياس الرسم للشكل ١/١٠٠ (وجعلنا لذلك البعد م$_1'$ م$_2'$ مساوياً الى $\frac{\text{القاعدة}}{١٠٠}$) ومع ذلك قيست الابعاد ع$_1$ و ط$_1'$ ا' و ع$_2$ و ط$_2'$ ا' من شكلى (١٨٥ ا و ب) ووضعت كما هى بدون تصغير فى (شكل ١٨٥ حـ) والسبب فى ذلك هو أن المسقطين الافقيين η_1' و η_2' للشعاعين لا يتوقفان الا على الزاويتين الافقيتين α_1 و α_2 المحصورتين بين كل واحد من هذين المسقطين ومحور التصوير المناظر له .

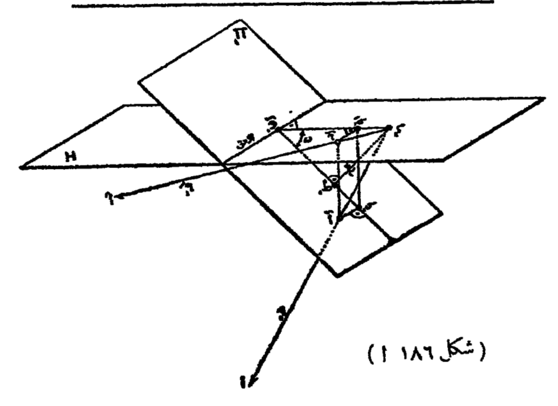
ولتعيين رقم ا نطبق المستوى م$_1$ ا' ا ا (راجع لذلك شكل ١٨٣ ب) على مستوى الافق المار بالمركز م$_1$ فنقيم لذلك من ا' عموداً على م$_1'$ ا' ونعين على هذا العمود النقطة [ا] بحيث يكون ا' [ا] مساوياً الى ا' ا فى شكل (١٨٥ ا) ثم نصل م$_1'$ [ا] فيكون الواصل هو الموقع [η_1] للشعاع η_1 ويقابل العمود المقام من ا' على م$_1'$ ا' فى الموقع [ا]$_1$ للنقطة ا ويكون ا' [ا]$_1$ مساوياً الى الفرق بين ارتفاعى م$_1$ و ا عن H مقسوماً على ١٠٠ فاذا علم ارتفاع م$_1$ عن H (أى رقم م$_1$) تعين رقم النقطة ا . وبنفس الطريقة يمكن الحصول على ا' [ا]$_2$ الذى يساوى الفرق بين ارتفاعى ا و م$_2$ عن H مقسوماً على ١٠٠ . ولما كانت ا فى هذه الحالة أوطى من م$_1$ بما مقداره ا' [ا]$_1$ × ١٠٠ وأعلا من م$_2$ بما مقداره ا' [ا]$_2$ × ١٠٠ لذا كان الفرق بين ارتفاعى أو منسوبى م$_1$ و م$_2$ هو {ا' [ا]$_1$ + ا' [ا]$_2$} × ١٠٠ .

---

(١) لان ا' و ا' فى شكلى (١٨٥ ا و ب) يمثلان المسقطين الافقيين المطورين للنقطة ا على مستويى الافق المارين بالمركزين م$_1$ و م$_2$ على التوالى (راجع بند ١٩٩ وشكل ١٨٣ ب) .

واذا كان البعد ط١ م٢َ المقيس على الافق فى شكل (١٨٥ ا) مساوياً الى ط١ َ م٢َ فى شكل (١٨٥ حـ) وكان البعد م٢َ م٢َ (العمودى على الافق) فى الشكل الاول مساوياً الى البعد م٢َ [م٢َ] فى الشكل الثانى (وهذا البعد الاخير يمكن الحصول عليه من شكل ١٨٥ حـ بتطبيق المستوى المسقط أفقياً للشعاع م١ م٢ على مستوى الافق المار بالمركز م١ ويكون ذلك بجعل م٢َ [م٢] مساوياً الى الفرق بين منسوبى م١ ، م٢) كانت م٢َ صورة م٢ على اللوحة II١ فى (شكل ١٨٥ ا) أو النقطة الاساسية فى هذه اللوحة . وبنفس الطريقة يمكن تعيين الصورة م١َ للمركز م١ على اللوحة II٢ فى (شكل ١٨٥ ب) .

بند ٢٠٢ : استنباط المسقط المرقوم من صورتين مائلتين

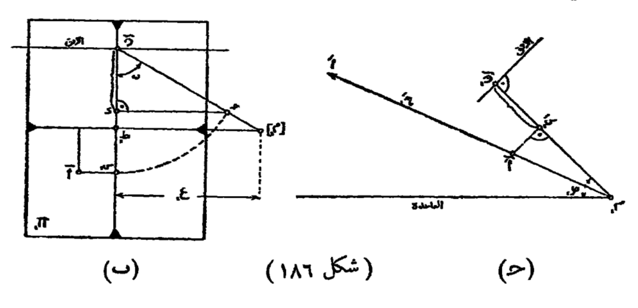


(شكل ١٨٦ ا)

يبين شكل (١٨٦ ا) الحل الفراغى للحصول على المسقط الافقى ا١َ للشعاع ا١ ≡ م١ ا المار بنقطة ما مثل ا . اذا كانت هذه النقطة قد صورت بآلة مائلة من المركز م١ وعلمت فوق عناصر الاستيضاحين الداخلى والخارجى

الزاوية ω التى تميل بها لوحة التصوير Π_1 على مستوى الاسقاط H (مستوى الافق المار بالمركز م١) .

فالمستوى المار بالمركز م١ عمودياً على الافق (خط تقاطع Π_1 ، H) يقطع H ، Π_1 فى المستقيمين م١ ﻫَ١ ، ط١ ﻫَ١ اللذين يحصران بينهما الزاوية المعلومة ω ويمكن حينئذ تعيين البعد م١ ﻫَ١ بمعلومية ط١ ، ع١ ، ω (ويلاحظ أن م١ ﻫَ١ هو المسقط الافقى لمحور التصوير م١ ط١) . فاذا كانت آ صورة النقطة ا وأنزل منها العمود آ س١ على ط١ ﻫَ١ فقابله فى س١ وكانت النقطتان آ' ، س١' المسقطين الافقيين للنقطتين آ ، س١ فمن الواضح أن η_1' يكون حينئذ المستقيم الذى يصل م١ ، آ' فللحصول على آ' نلاحظ أن س١' تقع على م١ ﻫَ١ بحيث يكون البعد ﻫَ١ س١' مساوياً (ﻫَ١ س١ × جتا ω) وهو بعد يمكن تحديده من الصورة كما أن س١' آ' عمودى على م١ ﻫَ١ ويساوى س١ آ الذى يمكن أيضاً قياسه مباشرة من الصورة .



(ب) (شكل ١٨٦) (ﺣ)

والمثلث [م١] ط١ ﻫَ١ فى شكل (١٨٦ ب) يمثل عملية تطبيق المستوى م١ ط١ ﻫَ١ على لوحة التصوير Π_1 وبذا يتحدد الافق على هذه اللوحة وكذا النقطة ﻫَ١

والبعد [م١] ه١ . فاذا قيس على هذا الاخير البعد ه١ حـ مساوياً ه١ س١ (حيث ا س١ هو العمود النازل من ا على ط١ ه١) وأنزل من حـ عمود على ط١ ه١ ليقابله فى ء كان ه١ ء مساوياً الى (ه١ س١ × جتا ω) .

فاذا كان سطح الورقة فى شكل (١٨٦ حـ) يمثل المستوى H ورسم م١ ه١ صانعاً مع القاعدة الزاوية φ_1 (المعلومة من الاستيضاح الخارجى) ومساوياً [م١] ه١ فى شكل (١٨٦ ب) ثم عينت عليه النقطة س١' بحيث كان ه١ س١' مساوياً الى ه١ ء فى شكل (١٨٦ ب) وأقيم من س١' على م١ ه١ العمود س١' ا' الذى يساوى س١ ا مقيساً أيضاً من شكل (١٨٦ ب) كان المستقيم الذى يصل م١ ا' هو المسقط الافقى ν'_1 للشعاع ν_1 . واذا صورت نفس النقطة ا من مركز جديد م٢ وعين كما تقدم فى شكل (١٨٦ حـ) بواسطة الصورة الفوتوغرافية الجديدة Π_2 — المسقط الافقى ν'_2 للشعاع الجديد $\nu_2 =$ ٠٢ ، كان المسقط الافقى ا' للنقطة ا هو نقطة تقاطع $\nu'_1 \cap \nu'_2$. وبتطبيق المستوى ٠١ ا ا' ا' على H حول م١ ا' يمكن حينئذ تعيين رقم النقطة ا ويلاحظ عند القيام بهذه العملية أن ا ا' (وهو بعد الصورة عن H) يساوى (كما يؤخذ من شكل ١٨٦ ا) س١ س١' أى يساوى (ه١ س١ × جا ω) وهذا الاخير بعد معلوم ويساوى حـ ء فى شكل (١٨٦ ب) .

الباب الثانى عشر

الخرائط الجغرافية

الفصل الاول

كلمة عامـــة

بند ٢٠٣ : تعاريف

معلوم أن الخرائط الجغرافية هى أشكال مستوية الغرض منها تمثيل سطح الارض (باعتباره كرة على وجه التقريب) بحيث توجد بين نقط السطح وبين نقط الخريطة مناظرة الفرد للفرد أى بحيث تحدد أية نقطة على الخريطة مكاناً واحداً على سطح الكرة الارضية وبالعكس ويكون التمثيل بواسطة رسم خطوط منحنية أو مستقيمة على الخريطة تمثل خطوط الطول والعرض .

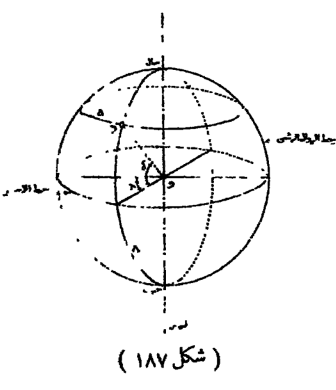
ومعلوم أيضاً أن خطوط الطول هى (أنصاف) الدوائر العظمى الواقعة فى مستويات الزوال المختلفة وهى المستويات المارة بمحور الكرة الارضية الذى يصل القطبين الشمالى والجنوبى . أما خطوط العرض فهى الدوائر الواقعة فى المستويات العمودية على المحور المذكور وخط الاستواء هو خط العرض المار بمركز الكرة.

ويتخذ عادة أحد خطوط الطول مبدأ لقياس زاوية الطول ويسمى فى هذه الحالة بخط الطول الرئيسى أو خط الزوال الرئيسى .

فاذا كان م (شكل ١٨٧) مكاناً ما على الكرة الارضية فالزاوية λ التى يصنعها خط الطول λ المار بهذا المكان مع خط الطول الرئيسى تسمى بطول المكان .

فاذا كانت الزاوية λ مقيسة من الغرب للشرق قيل إن طول المكان م

هو λ° شرقاً واذا كانت مقيسة من الشرق للغرب قيل إنه λ° غرباً [١] . ويطلق على الزاوية δ التى يميل بها نصف القطر و ه (حيث و مركز الكرة) على مستوى خط الاستواء اسم عرض المكان ويقاس العرض إما شمال خط الاستواء أو جنوبه فاذا علمت الزاوية δ وعلم اتجاه العرض (شمالا أو جنوباً) تحدد خط العرض Δ المار بالمكان ه .



(شكل ١٨٧)

بند ٢٠٤ : أنواع الخرائط الجغرافية

لتمثيل سطح الكرة الارضية توجد طرق مختلفة وأسهل هذه الطرق هى الاسقاط . فاذا أسقطت الكرة إسقاطاً عمودياً على مستوى خط الاستواء حصلنا على عدة دوائر (متحدة المركز مع الدائرة العظمى التى تمثل خط الاستواء) تمثل خطوط العرض وتكون أقطار هذه الدوائر ممثلة لخطوط الطول المختلفة واذا كان إسقاط الكرة عمودياً على أحد مستويات الزوال فان هذا المستوى يقطع حينئذ الكرة فى دائرة عظمى (تمثل خط الزوال) يكون محور الكرة الارضية قطراً فيها هو

(١) وفى بعض الاحايين تقاس λ فى اتجاه ثابت دائما هو الاتجاه من الغرب للشرق وفى هذه الحالة تكون λ أقل من ١٨٠° اذا كان خط طول المكان واقعاً شرق خط الزوال الرئيسى وأكبر من ١٨٠° اذا كان خط طول المكان واقعاً غرب خط الطول الرئيسى أى أن خط الطول ٣٠° غرباً يكون بهذه الطريقة ٣٦٠ — ٣٠ = ٣٣٠° .

القطر سـ حـ الذى يصل القطبين الشمالى والجنوبى كما تكون مساقط خطوط العرض فى هذه الحالة هى الاوتار المختلفة العمودية على سـ حـ ومساقط خطوط الطول قطاعات ناقصة متحدة فى القطر سـ حـ كمحور أكبر لها جميعاً وتسمى الخرائط التى يمكن الحصول عليها فى الحالتين السابقتين **بالخرائط الارثوغرافية**. واذا أسقطت الكرة إسقاطاً مركزياً من مركز الكرة نفسه على أحد المستويات المماسة كمستو للصورة حصلنا على ما يسمى **بالخريطة الجنومية** (حيث تظهر خطوط الطول كمستقيمات وخطوط العرض كمقاطع مخروطية على وجه العموم) . كذلك يمكن الحصول على خرائط جغرافية ذات خواص هامة بواسطة ما يسمى **بالاسقاط الاستريوغرافى** (الفصل الثانى) .

وكثيراً ما يستخدم الانسان لتمثيل الكرة سطحاً أسطوانياً أو مخروطياً يمكن بسطه على المستوى الذى يراد رسم الخريطة عليه وذلك بالطريقة الآتية : اذا فرضنا أسطوانة دورانية تمس الكرة فى خط الاستواء فمن السهل أن يرى أن مستويات الزوال المختلفة تتقاطع حينئذ مع هذه الاسطوانة فى رواسم يمكن اعتبارها مناظرة لخطوط الطول كما أن مستويات خطوط العرض تتقاطع معها فى دوائر يمكن اعتبارها مناظرة لهذه الخطوط فاذا بسطت الاسطوانة على المستوى حصلنا على مجموعتين من المستقيمات المتعامدة فى الخريطة تمثل إحداهما خطوط الطول وتمثل الاخرى خطوط العرض . كذلك يمكن تمثيل الكرة باستخدام مخروط دورانى (بدلا من الاسطوانة) يمس الكرة فى إحدى دوائر العرض .

ولما كانت الكرة سطحاً غير قابل للاستواء وكان من المستحيل لذلك الحصول على صورة أوخريطة بحيث تكون مطابقة تماماً للكرة أى بحيث تكون المساحات والزوايا على سطح الكرة ممثلةمعاً على حقيقتها فى الخريطة ويمكن قياسها أو قراءتها من هذه الخريطة مباشرة — فالخرائط الجغرافية يمكن لهذا السبب تقسيمها على وجه العموم الى قسمين رئيسيين :—

(ا) قسم يسمح بقياس المساحات وحدها على حقيقتها فخرائط هذا القسم تكون صادقة فى التعبير عن المساحات أما الزوايا فلا . مثال ذلك الخريطة المعروفة باسم خريطة لامبير وهى خريطة يمكن الحصول عليها كما يلى : لنفرض أن ∆ خط عرض المكان ه على سطح الكرة الارضية وأن سه هو القطب الشمالى فاذا رسمت فى الخريطة دائرة ∆' مركزها النقطة سه' (التى تمثل سه) ونصف قطرها مساو الى البعد سه ه واعتبرنا هذه الدائرة ممثلة لخط العرض ∆ فانه يمكن البرهنة بسهولة على أن مساحة الدائره ∆' تكون مساوية لمساحة الطاقية الكروية المحصورة بين القطب الشمالى سه وبين خط العرض ∆ .

(ب) وقسم يسمح بقياس الزوايا وحدها على حقيقتها فالخرائط فى هذه الحالة تكون صادقة فى التعبير عن هذه الزوايا أما المساحات فلا . ومن الامثلة على هذا النوع الخرائط الاستريوغرافية التى سنشرحها فى الفصل التالى والخريطة المعروفة باسم خريطة مركاتور وهى خريطة يمكن الحصول عليها باستخدام أسطوانة دورانية تمس الكرة فى خط الاستواء ثم بسط هذه الاسطوانة على المستوى كما تقدم مع ملاحظة أن تكون الابعاد بين المستقيمات الممثلة لدوائر العرض فى هذه الحالة هى بحيث تبقى الزوايا محفوظة على الخريطة .

الفصل الثانى

الخـــرائط الاســـتريوغرافية

بند ٢٠٥ : تعريف

الاسقاط الاستريوغرافى لكرة مركزها « و » هو اسقاط مركزى من أية نقطة على سطح الكرة مثل « م » على مستو عمودى على المستقيم م و .

ويؤخذ عادة مستوى الصورة Π ماراً بمركز الكرة وهو ماسنفترضه فيمايلى .

فاذا كانت الكرة تمثل الكرة الارضية فان الخرائط التى يمكن الحصول عليها بهذه الطريقة تسمى *بالخرائط الاستريوغرافية* .

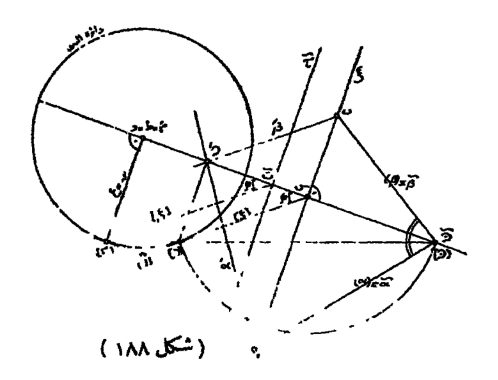
بند ٢٠٦ : خواص الاسقاط الاستريوغرافى

اذا فرضنا فى (شكل ١٨٨) أن الدائرة المبينة هى الدائرة العظمى التى يقطعها Π من الكرة والتى تعرف باسم *الدائرة الرئيسية* للخريطة فمن الواضح أن هذه الدائرة تمثل فى هذه الحالة دائرة البعد كما أن مركزها الذى هو فى نفس الوقت مركز الكرة هو النقطة الرئيسية ط (بند ١٧٧) .

ولتكن ﻫ' المسقط العمودى على Π لنقطة مثل ﻫ على سطح الكرة يراد تعيين مسقطها الاستريوغرافى ﻫ' أى نقطة تقابل الشعاع م ﻫ المار بها مع Π فنعتبر لذلك المستوى العمودى م ﻫ ﻫ' م' ونطبقه على Π حول م' ﻫ' فهذا المستوى يقطع الكرة فى دائرة عظمى يمكن اعتبار الدائرة الرئيسية موقعاً لها بعد تطبيق المستوى وبذا تقع [م] ، [ﻫ] على هذه الدائرة ويتقاطع حينئذ المستقيمان [م] [ﻫ] ، م' ﻫ' فى المسقط الاستريوغرافى المطلوب ﻫ̄ للنقطة ﻫ .

واذا كان [ئ] المماس لدائرة البعد فى [ﻫ] وتقابل مع م' ﻫ̄ فى س ثم رسم

من س المستقيم ع عمودياً على م' ﻫ فمن الواضح أن ع يكون أثر المستوى N المماس للكرة فى ﻫ على II كما أن الزاوية φ المحصورة بين [ﻫ] وبين م' ﻫ هى فى هذه الحالة زاوية ميل المستقيمات ذوات الميل الاعظم فى المستوى N أى زاوية ميل هذا المستوى نفسه على II . ويمكن الحصول على خط الاتجاه ت للمستوى N بتعيين نقطة الاتجاه ت للمستقيم ع كما هو مبين بالشكل .



(شكل ١٨٨)

ويتضح بسهولة من تشابه المثلثين [ل] [ﻫ] [م] ، س [ﻫ] ﻫ (حيث [ل] [م] هو مماس دائرة البعد فى [م]) ومن تساوى الضلعين [ل] [م] ، [ل] [ﻫ] فى المثلث الاول أن س ﻫ يساوى س [ﻫ] أى يساوى وتر المثلث القائم الزاوية الذى أحد أضلاعه ﻫ' س وضلعه الآخر ارتفاع ﻫ عن II ومعنى هذا أن الموقع (ﻫ) للنقطة ﻫ (وهو الموقع الذى يمكن الحصول عليه بتطبيق المستوى N على II) ينطبق فى هذه الحالة على مسقطها الاستريوغرافى ﻫ أى أن (ﻫ) ≡ ﻫ وهذه النتيجة يمكن وضعها على الصورة الآتية :

المسقط الاستريوغرافى لنقطة مثل ى على سطح الكرة يمكن الحصول عليه بتطبيق المستوى N المماس للكرة فى هذه النقطة على مستوى الصورة II .

وينتج من هذه النظرية مباشرة الخاصيتان الشهيرتان الآتيتان للاسقاط الاستريوغرافى وهما :

الخاصية الاولى : الزاوية المحصورة بين أى منحنيين مرسومين على سطح الكرة لا تتغير بالاسقاط الاستريوغرافى أى أنه مثل هذه الزاوية يمكن قياسها مباشرة من الخريطة الاستريوغرافية الممثلة للكرة .

الخاصية الثانية : المسقط الاستريوغرافى لاية دائرة مرسومة على سطح الكرة هو نفسه دائرة على وجه العموم [1] .

لانه اذا فرض فى (شكل ١٨٨) أن α' ؟ β' هما المسقطان العموديان على II لمستقيمين α ؟ β مارين بالنقطة ى وواقعين فى المستوى N (ويمسان لذلك الكرة فى ى) فان المسقطين الاستريوغرافيين $\bar{\alpha}$ ؟ $\bar{\beta}$ لهذين المستقيمين ينطبقان بمقتضى النظرية السابقة على موقعيهما (α) ؟ (β) اللذين يمكن الحصول عليهما بتطبيق N على II فالزاوية المحصورة بين $\bar{\alpha}$ ؟ $\bar{\beta}$ هى إذن المقدار الحقيقى للزاوية المحصورة بين المماسين α ؟ β نفسيهما وهى الزاوية المحصورة بين أى منحنيين مرسومين على سطح الكرة ويمسان α ؟ β فى ى أى أن الخاصية الاولى صحيحة .

واذا رمزنا الى رأس المخروط الدورانى الذى يمس الكرة فى دائرة ما مرسومة على سطحها (وغير مارة بمركز الاسقاط م) بالرمز ر أو بعبارة أخرى اذا

---

(١) اذا مر مستوى الدائرة بمركز الاسقاط فمن الواضح أن المسقط الاستريوغرافى للدائرة يكون فى هذه الحالة خطاً مستقيماً هو أثر المستوى على II .

كانت ر قطب مستوى الدائرة بالنسبة الى الكرة فمن حيث إن رواسم المخروط هى مستقيمات متعامدة مع دائرة التماس فى جميع نقطها لذا كان المسقط الاستريوغرافى للدائرة بناء على الخاصية الاولى منحنياً متعامداً مع المساقط الاستريوغرافية للرواسم فى نقط التقاطع ولما كانت هذه المساقط الاخيرة تؤلف حزمة من المستقيمات رأسها المسقط الاستريوغرافى رَ للنقطة ر وجب أن يكون المنحنى المذكور أى المسقط الاستريوغرافى للدائرة دائرة مركزها رَ وهذا يثبت صحة الخاصية الثانية .

بند ٢٠٧ : رسم المسقط الاستريوغرافى لدائرة على سطح الكرة

اذا علمت دائرة على سطح الكرة بواسطة الاثر ع للمستوى Σ المرسومة فيه والزاوية φ التى يميل بها هذا المستوى على Π (أو بواسطة الاثر ع وخط الاتجاه τ للمستوى Σ) فالمطلوب رسم المسقط الاستريوغرافى لهذه الدائرة .

لذلك نسقط من مَ عموداً على ع ليقابله فى س (شكل ١٨٩) فيكون هذا العمود أثر مستو P يمر بمركز الاسقاط م عمودياً على كل من Π ، Σ ويقطع الكرة فى دائرة عظمى ρ كما يقطع Σ فى المستقيم ذى الميل الاعظم . فاذا رمزنا الى رأس المخروط الدورانى ... الد ... فى

(شكل ١٨٩)

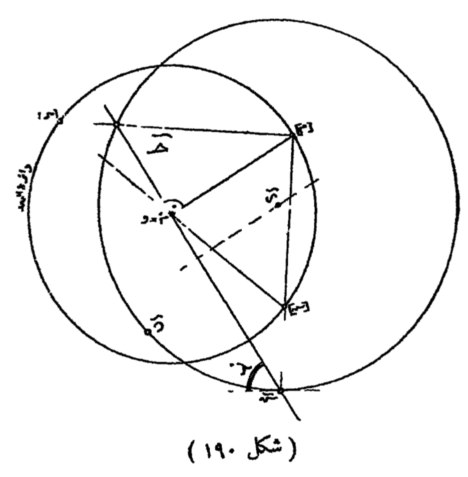
الدائرة المعلومة بالرمز م (قطب Σ بالنسبة للكرة) فان م تكون واقعة فى المستوى P الذى يقطع لذلك المخروط المذكور فى راسمين م ا ، م ب . وبتطبيق P على Π تنطبق الدائرة العظمى ρ على دائرة البعد ويكون الموقع [ع] للمستقيم ذى الميل الاعظم ع هو المستقيم المرسوم من س صانعاً مع أثر P الزاوية المعلومة φ كما يكون الموقع [م] لمركز الاسقاط م هو نقطة تقاطع دائرة البعد مع العمود المقام من مَ على أثر P . فاذا تقاطع [ع] مع دائرة البعد فى النقطتين [ا] ، [ب] ورسم منهما المماسان [م] [ا] ، [م] [ب] اللذان يتقابلان فى الموقع [م] لرأس المخروط ووصلت المستقيمات [م] [ا] ، [م] [ب] ، [م] [م] لتقطع أثر P فى اَ ، بَ ، مَ على التوالى ثم رسمت الدائرة التى مركزها مَ وتمر بالنقطتين اَ ، بَ كانت هذه الدائرة المسقط الاستريوغرافى المطلوب للدائرة المعلومة .

وبالعكس اذا علم المسقط الاستريوغرافى لدائرة على سطح الكرة أمكن تعيين الاثر ع للمستوى Σ المرسومة فيه هذه الدائرة وكذا الزاوية φ التى يميل بها هذا المستوى على Π ويمكن اعتبار شكل ١٨٩ نفسه موضحاً لهذه العملية العكسية اذا عكسنا خطوات الحل المشروحة آنفاً .

ويلاحظ أننا فرضنا فى (شكل ١٨٩) أن الدائرة المعلومة مرسومة على نصف الكرة الموجود فى الجهة المقابلة الى م بالنسبة الى Π ولهذا السبب رسمنا [ع] فى الجهة المقابلة الى [م] بالنسبة الى أثر المستوى P وفى حالة وقوع م مع الدائرة على نصف واحد من الكرة يجب أن تكون النقط [م] ، [ا] ، [ب] واقعة على نصف واحد من دائرة البعد بالنسبة الى P وفى هذه الحالة يقع المسقط الاستريوغرافى للدائرة المعلومة خارج المساحة المحدودة بدائرة البعد . ومعنى هذا كما هو واضح أنه اذا علم المستوى Σ بأثره ع وبالزاوية φ وجب لكى تتحدد الدائرة أن يعلم أيضاً اتجاه المستوى بالنسبة لمركز الاسقاط .

بند ٢٠٨ : مثال

اذا علم فى (شكل ١٩٠) المسقطان الاستريوغرافيان سَ ، ص َ لنقطتين س ، ص على سطح الكرة فالمطلوب رسم المسقط الاستريوغرافى للدائرة العظمى التى تمر بهاتين النقطتين .



(شكل ١٩٠)

لذلك نبحث عن المسقط الاستريوغرافى حَ لنقطة تقاطع القطر س و (أو ص و) مع الكرة حيث و مركز الكرة فنصل سَ م' فيكون هذا الواصل أثر المستوى م م' س ح العمودى على مستوى الصورة II ثم نطبق هذا المستوى على II حول م' سَ . فاذا وصل [م] سَ ليقطع دائرة البعد (التى تمثل فى نفس الوقت موقع الدائرة العظمى التى يقطعها المستوى م م' س ح من الكرة) فى النقطة [س] ووصل [س] م' ليقطع الدائرة نفسها فى النقطة [ح] كانت هذه النقطة

موقع ح ويتقاطع حينئذ المستقيمان [م] [ح] ، م' سه في المسقط الاستريوغرافى حَ للنقطة ح . وتكون الدائرة المارة بالنقط الثلاث سَه ، ءَ ، حَ هى المسقط الاستريوغرافى المطلوب للدائرة العظمى .

بند ٢٠٩ : تقسيم الخرائط الاستريوغرافية

اذا فرضنا فى المثال السابق (بند ٢٠٨) أن سه القطب الشمالى للكرة الارضية فان ح تكون القطب الجنوبى وفى هذه الحالة تكون الدائرة سَه حَ ءَ المسقط الاستريوغرافى لخط الطول المار بالمكان ء والذى يصنع مع خط الطول سَه م' حَ المار بالنقطة م زاوية تظهر فى الشكل على حقيقتها ومقدارها λ° . فاذا اتخذنا خط طول المار بالنقطة م مبدأ لقياس زاوية الطول (أى خط الطول الرئيسى) أمكن رسم أى خط من خطوط الطول بمجرد معرفة الزاوية λ التى يصنعها مع خط الطول الرئيسى وذلك بالكيفية المبينة بالشكل فالدوائر التى تمر جميعاً بالنقطتين سَه ، حَ تمثل فى هذه الحالة خطوط الطول المختلفة على الكرة الارضية . أما خطـــوط العرض فيمكن الحصول عليها بتطبيق المستوى م م' سه ح على Π كما تقدم حيث تظهر هذه الخطوط فى الموقع كأوتار عمودية على القطر [سه] [ح] وتتألف مساقطها حينئذ من الدوائر المختلفة التى تقع مراكزها جميعاً على سَه حَ والمتعامدة مع الدوائر الممثلة لخطوط الطول فى نقط التقاطع . وهكذا يمكن الحصول على شكل يمثل خريطة استريوغرافية للكرة الارضية مرسومة من مركز الاسقاط م .

غير أن مثل هذه الخرائط التى تكون فيها م نقطة حيثما اتفق على سطح الكرة الارضية قليلة الاستعمال فقد جرت العادة بان تؤخذ م :

(١) — إما منطبقة على أحد القطبين الشمالى والجنوبى وفى هذه الحالة يكون مستوى الصورة هو مستوى خط الاستواء نفسه وتسمى الخريطة حينئذ بالخريطة القطبية .

(٢) — أو تكون م إحدى نقط خط الاستواء بحيث يكون مستوى الصورة هو مستوى خط الزوال الرئيسي وتسمى الخريطة فى هذه الحالة بالخريطة الاستوائية .

بند ٢١٠ : الخريطة القطبية

المساقط الاستريوغرافية لخطوط الطول على هذه الخريطة هى أقطار فى الدئرة الرئيسية التى تمثل خط الاستواء أما خطوط العرض فتمثلها مجموعة من الدوائر المتحدة المركز مع الدائرة الرئيسية .

وعلى حسب ما اذا كان المطلوب تمثيل نصف الكرة الشمالى أو الجنوبى يختار مركز الاسقاط م منطبقاً على القطب الجنوبى أو الشمالى على التوالى .

ولنفرض الآن (شكل ١٩١) أن المطلوب تعيين المسقط الاستريوغرافى لمكان ه على الكرة الارضية طوله ٣٠° شرقاً وعرضه ٤٥° جنوباً على خريطة قطبية . لذلك نختار القطب الشمالى مركزاً للاسقاط ونرسم من م' المستقيم $\overline{\lambda}$ صانعاً مع خط الزوال الرئيسي زاوية تساوى ٣٠° شرقاً فيكون $\overline{\lambda}$ المسقط الاستريوغرافى لخط الطول المـار بالمكان ه .

(شكل ١٩١)

ولتعيين المسقط الاستريوغرافى $\overline{\Delta}$ لخط العرض ٤٥° جنوباً نطبق مستوى

الزوال الرئيسى على II فنرسم لذلك المستقيمين م' [ى] ، م' [هـ] اللذين يميل كل منهما على خط الزوال الرئيسى بزاوية قدرها ٤٥° ليقابلا الدائرة الرئيسية فى [ى] ، [هـ] ثم نصل [م] [ى] ، [م] [هـ] فاذا قابل هذان الواصلان خط الزوال الرئيسى فى ىَ ، هَ كان $\bar{\Lambda}$ هو الدائرة المرسومة على ىَ ، هَ . واذا تقاطع $\bar{\Lambda}$ ، $\bar{\Delta}$ فى النقطة ضَ كانت هى المسقط الاستريوغرافى المطلوب للمكان ض[1] .

ويستطيع القارىء أن يستنتج بسهولة من (شكل ١٩١) العملية العكسية للحصول على طول وعرض أى مكان على الكرة الارضية اذا علم مسقطه الاستريوغرافى على خريطة قطبية .

بند ٢١١ : الخريطة الاستوائية

تؤلف خطوط الطول والعرض على هذه الخريطة مجموعتين من الدوائر المتعامدة فى نقط التقاطع فدوائر المجمـــوعة الاولى تشترك فى محور الكرة الارضية الواقع فى مستوى الصورة كمحور رئيسى لها جميعاً أما دوائر المجموعة الثانية فتقع مراكزها على هذا المحور[2] .

ولنفرض الآن (شكل ١٩٢) أن المطلوب تعيين المسقط الاستريوغرافى ضَ لمكان مثل ض على الكرة الارضية طوله ٣٠° شرقاً وعرضه ٤٥° شمالا على خريطة استوائية .

---

(١) نصف القطر $\bar{\Lambda}_1$ المرسوم فى الشكل بخطوط متقطعة هو المسقط الاستريوغرافى لخط الطول ١٥٠° غرباً فالنقطة ضَ١ تمثل فى هذه الحالة المكان ض١ الذى طوله ١٥٠° غرباً وعرضه ٤٥° جنوباً .

(٢) إذ من الواضح أن قطب أى مستو من مستويات خطوط العرض بالنسبة للكرة يقع على محور الكرة الارضية .

لذلك نفرض أن مستوى الصورة هو مستوى خط الطول الرئيسى فتكون الدائرة التى تمر بالقطبين الشمالى والجنوبى بحيث تصنع مع الدائرة الرئيسية زاوية مقدارها ٣٠° شرقاً (وهى الدائرة التى يقع مركزها ن̄١ على ا ب) هى المسقط الاستريوغرافى $\bar{\lambda}$ لخط الطول المار بالمكان ﻫ كما تكون الدائرة المتعامدة مع الدائرة الرئيسية عند النقطة ى (حيث م ى هو المستقيم الذى يصنع مع ا ب زاوية مقدارها ٤٥° شمالا) والتى يقع مركزها ن̄٢ على محور الكرة هى المسقط الاستريوغرافى $\bar{\Delta}$ لخط العرض المار بهذا المكان . فاذا تقاطع $\bar{\lambda}$ ، $\bar{\Delta}$ فى النقطة ﻫ̄ كانت هذه النقطة المسقط الاستريوغرافى المطلوب للمكان ﻫ .

(شكل ١٩٢)

واذا علم بالعكس المسقط الاستريوغرافى ﻫ̄ على خريطة استوائية لمكان مثل ﻫ فانه يمكن بسهولة تعيين طول المكان ﻫ وعرضه وذلك بواسطة رسم الدائرتين $\bar{\lambda}$ ، $\bar{\Delta}$ السالفتى الذكر والمتعامدتين فى ﻫ̄ .

تمارين عامة

الائتلاف المتوازى وطريقة مونج للاسقاط

١ — اذا علم محور الائتلاف واتجاهه وعلمت نقطتان ا ، ب فالمطلوب تعيين نقطتين ا١ ، ب١ مناظرتين لهما بحيث يكون البعد ا١ ب١ مساوياً طولا معلوماً .

٢ — اذا علم محور الائتلاف ومتوازى أضلاع فالمطلوب رسم شكل مؤتلف معه ائتلافاً متوازياً بحيث يكون هذا الشكل : (ا) متوازى أضلاع فيه القطران يساويان طولين معلومين (ب) مربعاً (حـ) معيناً مساحته مساوية لمساحة متوازى الاضلاع المعلوم (ى) مستطيلا مساحته مساوية لمساحة متوازى الاضلاع المعلوم.

٣ — اذا علم محور الائتلاف ومثلث ا ب حـ وكانت ۵ نقطة داخله فالمطلوب رسم المثلث ا١ ب١ حـ١ المؤتلف معه بحيث تكون ۵١ (المناظرة الى ۵) : (ا) مركز الدائرة الخارجة (ب) مركز الدائرة الداخلة (حـ) ملتقى الارتفاعات .

٤ — اذا علم قطران مترافقان من قطع ناقص وعلم مستقيم حيثما اتفق كمحور للائتلاف فالمطلوب رسم دائرة مؤتلفة مع القطع الناقص ثم استخدام الائتلاف فى رسم هذا المنحنى .

٥ — المطلوب تعيين نقطتى تقاطع مستقيم مع قطع ناقص اذا كان هذا المنحنى معلوماً : (ا) بالمحور الاكبر وإحدى نقطه (ب) بأحد أقطاره واتجاه القطر المرافق له وإحدى نقطه .

٦ — المسقط الافقى لقطع ناقص هو دائرة معلومة والمطلوب رسم مسقطه الرأسى اذا كان هذا المسقط مساوياً فى المساحة لمساحة الدائرة وعلم المسقطان الافقى والرأسى لاحد أقطار القطع الناقص .

٧ — اذا كان المسقط الافقى لمربع هو مستطيل معلوم وعلم المسقط الرأسى لمركزه فأوجد المسقط الرأسى للمربع .

٨ — اذا علم المسقط الافقى لمستقيمين متقاطعين ولاحد منصفى الزاوية المحصورة بينهما وعلم أيضاً أثرا المستقيمين على أحد المستويات الافقية فالمطلوب رسم المسقطين الرأسيين للمستقيمين .

٩ — اذا علم قطران مترافقان من المسقط الافقى لدائرة وعلم أيضاً المسقط الرأسى لمركزها فالمطلوب رسم مسقطى الدائرة وتعيين شكلها الحقيقى .

١٠ — ا′ ب′ حـ′ ء′ المسقط الافقى لمربع أوجد مسقطه الرأسى اذا علمت ا″ .

١١ — ا′ ب′ حـ′ المسقط الافقى لمثلث أوجد مسقطه الرأسى اذا علم المسقطان الافقى والرأسى لنقطة تلاقى الارتفاعات فى هذا المثلث .

١٢ — أوجد المسقط الرأسى لمستقيم اذا علمتَ مسقطه الافقى وعلمتَ أن المستقيم يوازى مستوياً معلوماً ويبعد عنه ببعد معلوم .

١٣ — α ، β مستقيمان متوازيان ، حـ نقطة خارج مستويهما والمطلوب تعيين النقطة ا على α والنقطة ب على β بحيث يكون ا ب قاعدة ذات طول معلوم لمثلث متساوى الساقين رأسه فى حـ .

١٤ — المطلوب رسم المسقطين الرأسيين لمستقيمين غير متقاطعين اذا علم مسقطاهما الافقيان وعلم (فى المسقطين) العمود المشترك لهما .

١٥ — المطلوب رسم مسقطى مثلث اذا علم أحد أضلاعه (فى المسقطين) وعلم المسقط الافقى لمركز الدائرة المارة برؤوسه .

١٦ — ا ب حـ مثلث معلوم منه (ا′ ، ا″) ، (ه′ ، ه″) حيث ه مركز الدائرة المرسومة داخله والمطلوب رسم مسقطى المثلث اذا علم اتجاها المسقطين الافقيين للضلعين ا ب ، ا حـ .

١٧ — معلوم نقطتان ا ، ب وكذلك مستقيمان غير متقاطعين λ ، μ والمطلوب تعيين مستقيم σ يوازى λ ويقطع μ بحيث يكون متساوى البعد عن ا ، ب .

١٨ — المطلوب تعيين نقطة فى مستو معلوم بحيث تبعد عن ثلاثة مستقيمات متوازية معلومة بابعاد متساوية .

١٩ — α ، β ، γ ثلاثة مستقيمات الاولان منها متوازيان والمطلوب تعيين مستقيم μ متساوى البعد عن المستقيمات الثلاثة اذا كان μ : (ا) موازياً الى α أو (ب) موازياً الى γ .

٢٠ — المطلوب تعيين مستقيم يكون على أبعاد متساوية عن ثلاثة مستقيمات معلومة غير متقاطعة ومتساوى الميل على هذه المستقيمات .

٢١ — المطلوب رسم عمود على مستو معلوم بحيث يلاقى مستقيماً معلوماً ويبعد عن مستقيم آخر ببعد معلوم .

٢٢ — اذا علم المركز ومماس لقطع ناقص مسقطه الرأسى دائرة فالمطلوب رسم المسقط الافقى للقطع الناقص والظل الذى يلقيه هذا المنحنى على مستو أفقى وآخر رأسى (اتجاه الاضاءة معلوم) .

٢٣ — اذا كان و′ ، و″ المسقطين الافقى والرأسى لمركز دائرة نصف قطرها ى وعلم خط تقاطع مستويها مع مستو أفقى Φ فالمطلوب تعيين اتجاه الاضاءة التى يترتب عليها أن يكون الظل الذى تلقيه الدائرة على Φ منحنياً مساحته تساوى ضعف مساحة الدائرة ويمس مستقيماً معلوماً واقعاً فى Φ ثم رسم هذا الظل .

٢٤ — ارسم الظل الذى يلقيه مثلث على مستو معلوم وبين أن المسقط الافقى للمثلث مؤتلف ائتلافاً متوازياً مع المسقط الافقى للظل مع تحديد محور الائتلاف وطريقة الحصول عليه .

٢٥ — المطلوب تعيين المستوى الذى يمر بمستقيم معلوم ويقطع منشوراً قائماً (قاعدته واقعة فى مستو أفقى) فى شكل مساحته تساوى $\frac{٣}{٢}$ مساحة القاعدة .

٢٦ — المطلوب تمثيل أسطوانة دورانية اذا علم أحد رواسمها وعلم أيضاً :
(ا) مماسان لها أو (ب) مماس ونقطة على سطحها .

٢٧ — α ، β مستقيمان متوازيان والمطلوب تعيين نقطة على مستقيم مثل γ (خارج المستوى) بحيث تكون النسبة بين بعديها عن α ، β مساوية الى ٣ : ٥ .

٢٨ — المطلوب تعيين نقطة فى مستو معلوم بحيث تكون النسبة بين أبعادها عن ثلاثة مستقيمات متوازية كالنسبة بين ٥ : ٢ : ٣ .

٢٩ — المطلوب تمثيل مستو يقطع مخروطاً دورانياً معلوماً فى قطع زائد قائم . متى يكون هذا غير ممكن ؟

الخواص البؤرية للمقاطع المخروطية

٣٠ — المطلوب رسم قطع ناقص اذا علم منه : (ا) بؤرتان ومماس (ب) بؤرة ونقطتان وطول المحور الاكبر (حـ) بؤرة وثلاثة مماسات (ى) بؤرة ومماسان ونقطة تماس أحدهما (هـ) بؤرة والدليل المناظر وإحدى نقطه (و) بؤرة والدليل المناظر ومماس (ز) بؤرة وثلاث نقط .

٣١ — اذا علمت ثلاث نقط ب ، ب١ ، ب٢ فالمطلوب تعيين نقط تقاطع القطع الناقص الذى بؤرتاه ب ، ب١ مع القطع الناقص الذى بؤرتاه ب ، ب٢ اذا كان المحوران الاكبران للمنحنيين متساويين ويساويان طولا معلوماً .

٣٢ — اذا علم قطعان ناقصان بالبؤرتين وطول المحور الاكبر لكل منهما واشترك المنحنيان فى بؤرة واحدة فالمطلوب رسم المماسات المشتركة لهما .

٣٣ — المطلوب رسم قطع زائد اذا علم منه : (ا) بؤرة وثلاثة مماسات (ب) بؤرة ونقطة وأحد خطيه التقريبين (حـ) دليل ومماس فى الرأس وخط تقربى واحد .

٣٤ — المطلوب رسم قطع مكافىء اذا علم منه : (ا) بؤرة ومماس ونقطة (ب) ثلاثه مماسات أحدها المماس فى الرأس (حـ) بؤرة ونقطتان (ى) بؤرة ومماسان (هـ) مماسان ونقطتا التماس عليهما .

٣٥ — أثبت أن الدائرة التى تمر برؤوس المثلث المتكون بثلاثة مماسات لقطع مكافىء — تمر بالبؤرة ثم استخدم هذه الخاصية فى تعيين البؤرة والدليل للقطع المكافىء المعلوم باربعة مماسات .

الائتلاف المركزى

٣٦ — استخدم الائتلاف المركزى فى رسم دائرة الانحناء فى أحد رأسى قطع زائد اذا علمت هذه الرأس والخطان التقريبان للمنحنى .

٣٧ — اذا علم من قطع زائد اتجاه أحد الخطين التقريبين ونقطتان بالمماسين فيهما فالمطلوب رسم دائرة الانحناء فى إحدى النقطتين .

٣٨ — اذا علم من قطع مكافىء نقطة مع دائرة الانحناء للقطع فيها وكذا اتجاه المحور فالمطلوب تعيين المماس فى الرأس والرأس وكذا تعيين نقطتى تقاطع المنحنى مع مستقيم معلوم .

٣٩ — اذا علم من قطع ناقص أربع نقط والمماس فى إحداها فالمطلوب استخدام الائتلاف المركزى فى تعيين مركز المنحنى .

٤٠ — المطلوب رسم قطع مكافىء يمس دائرة معلومة فى نقطة معينة اذا كان محوره يمس نفس الدائرة فى نقطة أخرى معلومة .

الخواص الاسقاطية للمقاطع المخروطية

٤١ — استخدم الحزم المؤتلفة فى تعيين الخطين التقريبين لقطع زائد اذا علم منه اتجاها الخطين وثلاث نقط .

٤٢ — اذا كانت ﻫ ملتقى ارتفاعات المثلث المتكون من الخطين التقريبين ومماس متغير لقطع زائد فبرهن (بمقتضى نظرية الحزم المؤتلفة) على أن المحل الهندسى للنقطة ﻫ هو مقطع مخروطى وعين نوع المنحنى .

٤٣ — اذا كان ل ، ل' مستقيمين ثابتين وكانت ﻫ رأساً لزاوية قائمة تدور فى المستوى حول ﻫ ويقابل ضلعاها المستقيمين فى أزواج النقط ا ، ا' ، ب ، ب' ، ... فالمطلوب رسم غلاف المستقيمات ا ا' ، ب ب' ، ... أذكر نوع هذا الغلاف اذا كان ل هو المستقيم الذى فى اللانهاية .

٤٤ — المطلوب تعيين مركز المقطع المخروطى المعلوم : (ا) بخمس نقط (ب) بخمسة مماسات (ح) باربع نقط والمماس فى إحداها .

٤٥ — المطلوب رسم الخطين التقريبين للقطع الزائد اذا علم منه ثلاث نقط والمماس فى إحداها واتجاه أحد الخطين التقريبين .

٤٦ — المطلوب رسم الخط التقربى المجهول للقطع الزائد اذا علم منه : (ا) خط تقربى وثلاثة مماسات (ب) خط تقربى وثلاث نقط .

٤٧ — المطلوب تعيين الرأس والمحور للقطع المكافىء اذا علم منه : (ا) نقطتان والمماس فى إحداهما واتجاه المحور (ب) ثلاث نقط واتجاه المحور (حـ) مماسان ونقطتا التماس عليهما .

٤٨ — المطلوب تعيين رأسى قطع زائد معلوم بالخطين التقريبين وإحدى نقطه وذلك بواسطة نظرية شتاينر .

٤٩ — اوجد اتجاهى الخطين التقربين لقطع زائد معلوم بثلاث نقط والمماسين له فى اثنتين من هذه النقط .

٥٠ — اذا علمت ثلاثة مستقيمات ونقطة مثل ﻫ فالمطلوب تعيين اتجاه المحور لقطع مكافىء يمس المستقيمات الثلاثة بحيث تكون ﻫ واقعة على دليله .

٥١ — برهن على أن جميع المقاطع المخروطية التى تمر باربع نقط إحداها نقطة ملتقى الارتفاعات فى المثلث الذى رؤوسه الثلاثة الاخرى هى قطاعات زائدة قائمة .

٥٢ — المطلوب تعيين نقطتى تقاطع دائرة ومقطع مخروطى معلوم بخمس نقط منها أثنتان واقعتان على الدائرة .

٥٣ — المطلوب تعيين اتجاهى المحورين للقطعين المكافئين اللذين يمران باربع نقط معلومة .

المنحنيات والسطوح

٥٤ — المعلوم مستقيمان غير متقاطعين ϱ ، μ والمطلوب تمثيل منحن لولبى يمس μ ويكون ϱ محوراً له (إفرض ϱ موازياً للمستوى الرأسى) .

٥٥ — المطلوب تعيين الرواسم الموازية لمستو معلوم فى سطح مسطر اذا كان هذا السطح : (ا) سطحاً زائدياً دورانياً (ذا طية واحدة) معلوماً بالمحور والمستقيم الراسم (ب) سطحاً لولبياً قابلا للاستواء معلوماً بحرف الرجوع .

٥٦ — اذا علم منحنيان لولبيان فالمطلوب تعيين نقطتين على المنحنيين (إن أمكن) يكون المماسان لهما فيهما متوازيين .

٥٧ — المطلوب رسم منحنى التقاطع لازواج السطوح الآتية : (ا) سطحان دورانيان محوراهما متوازيان وأحدهما سطح زائدى ذوطية واحدة (ب) سطح كعكى وسطح أسطوانى محوراهما متقاطعان (حـ) سطح زائدى ذوطية محوره رأسي وآخر أسطوانى محوره موازللمستوى الافقى .

الاسقاط الرقمى والسطوح الطبوغرافية

٥٨ — المطلوب حل المسائل من ١٧ — ٢١ ومن ٢٥ — ٢٩ بطريقة الاسقاط الرقمى .

٥٩ — المطلوب تمثيل الكرة التى تمر بثلاث نقط معلومة وتمس المستوى الرقمى .

٦٠ — المطلوب رسم المسقط المرقوم لمربع اذا علم مقياس الميل لمستويه وعلم طول أحد قطريه والزاوية التى يميل بها على المستوى الرقمى .

٦١ — اذا علم مقياس الميل لخط تقاطع مستويين فالمطلوب تمثيل هذين المستويين اذا علم أنهما متعامدان وأن أحدهما يميل على مستوى المقارنة بزاوية معلومة .

٦٢ — اذا علم مستقيم ونقطتان ا ، ب فالمطلوب تعيين نقطة على المستقيم مثل ء بحيث تكون الزاوية اءب قائمة .

٦٣ — المطلوب إنشاء طريق ذى ميل ثابت (زاوية الميل = ٣٠°) على قطعة من الارض معلومة بخريطتها الطبوغرافية .

٦٤ — المطلوب تمثيل سطوح الميل الجانبية لطريق مستقيم يميل ميلا طوليا قدره ٥٠٪ وذلك فى حالتى الحفر والردم (الميل الجانبى للسطوح ٢ : ٣) .

٦٥ — اذا أريد إنشاء شارع أفقى دائرى (المسقط الافقى لحرفه قوس دائرة) على قطعة أرض معلومة فالمطلوب تمثيل سطوح الميل ورسم تقاطعها مع سطح الارض باستخدام طريقة المقاطع العرضية (بروفيلات) .

الاسقاط المركزى أو المنظور

٦٦ — اذا علم مستقيمان متقاطعان α ، β فيهما α عمودى على مستوى

الصورة Π فالمطلوب إدارة β حول α حتى يتخذ وضعاً موازياً لمستو معلوم.

٦٧ — اذا علم مستقيمان غير متقاطعين α ، β فيهما α عمودى على Π وعلم مستو Σ فالمطلوب تعيين مستقيم يلاقى α، β بحيث يوازى Σ ويميل على α بزاوية قدرها ٣٠°.

٦٨ — المطلوب حل المسألة ٢٩ فى الاسقاط المركزى اذا كان محور المخروط عمودياً على Π.

٦٩ — المطلوب اختيار قطع زائد فى مستو معلوم بحيث يكون منظوره قطعاً ناقصاً ورسم المنحنى الاخير.

٧٠ — المطلوب رسم خط الظل لكرة معلومة مركزها واقع فى Π اذا علم اتجاه الاضاءة المتوازية.

٧١ — المطلوب تمثيل منحن لولبى محوره واقع فى Π اذا علمت الخطوة ونصف قطر الاسطوانة المرسوم عليها.

٧٢ — المطلوب رسم منحنى تقاطع مستو معلوم مع سطح زائدى دورانى اذا كان محوره عمودياً على Π وعلم هذا المحور وأحد أوضاع المستقيم الراسم.

قاموس المصطلحات

صفحات I-XI.

قاموس

نثبت فيما يلى المعانى الانجليزية والفرنسية والالمانية لاهم المصطلحات المستعملة مرتبة ترتيباً أبجدياً .

اتجاه الائتلاف	direction of affinity	direction d'affinité	Affinitätsrichtung
أثر	trace	trace	Spur
اختفاء (أنظر خط ، مستوى ،نقطة)			
استكمال (خطوط المنسوب)	interpolation of	interpolatoin de	Interpolieren von
إسقاط استريوغرافى	stereographic projection	projection stéréographique	stereographische Projektion
» أكسنمترى	axonometric projection	axonométrie	Achsonometrie
» رقمى	indexed projection, figured plan	projection cotée	kotierte Projektion
» عمودى	orthogonal projection	projection orthogonale	Normalprojektion
» على مستويين متعامدين	biorthogonal projection	méthode de Monge	Grund- und Aufrissverfahren
» مركزى أو منظور	central or conical projection or perspective	projection centrale ou perspective	Zentralprojektion oder Perspektive
أشعة ضوئية	rays of light	rayons lumineux	Lichtstrahlen
أفق (المنظور)	horizon	ligne d'horizon	Horizont
أفقيات المستوى	level lines	horizontales	Schichtenlinien
انحلال منحن	degeneration	dégénération	Zerfallen

Krümmung	courbure	curvature	انحناء
Torsion	torsion	torsion	الانحناء الثانى لمنحن فراغى
Kollineation	collinéation (projective), homographie	(projective) collineation, homography	ائتلاف (إسقاطى عام)
(perspektive) Affinität	affinité (perspective)	(perspective) affinity	» متوازى (مباشر)
allgemeine Affinität	affinité générale	general affinity	» متوازى مطلق
Zentralkollineation	collinéation centrale, homologie	perspective collineation, homology	» مركزى
involutorische Kollineation	collinéation involutive	involutric homology	» مركزى تضامنى
Brennpunkt	foyer	focus	بؤرة
			تجسيم (أنظر صورة مجسمة)
graduieren	graduer	graduate	تدريج مستقيم
Dualität	dualité	duality	تزاوج
Involution	involution	involution	تضامن
Umklappung, Umlegung	rabattement	rabatment	تطبيق المستويات
Träger	support	support	حامل (صف من النقط)
Büschel	faisceau	pencil	حزمة
Abtrag	déblai	cutting	حفر

Fluchtlinie	droite de fuite	vanishing trace	خط اتجاه (صورة مستقيم فى ∞)
Verschwindungslinie	droite évanouissante	a line which projects to infinity	« اختفاء (صورته هى مستقيم فى ∞)
Projektionsachse	ligne de terre	ground line	« الارض
Asymptote	asymptote	asymptote	« تقربي
Ordnungslinie	ligne de rappel	line of correspondance	« تناظر
Meridian	méridien	meridian	« زوال
Eigenschattengrenze	courbe d'ombre propre	boundary of true shadow	« ظل
Parallelkreis	parallèle	parallel	« عرض أو دائرة عرض
Polare	polaire	polar	« قطبي
Ganghöhe	pas	pitch	خطوة
Höhenkurven	courbes de niveau	contour lines	خطوط المنسوب
projective Eigenschaften	propriétés projectives	projective properties	خواص إسقاطية
Äquator	équateur	equator	دائرة استواء
Distanzkreis	cercle de distance	distance circle	« البعد
Kehlkreis	cercle de gorge	throat circle	« حلق
Freiheitsgrade	degres de liberté	degrees of freedom	درجات الاطلاق
Ordnung	degré	degree	درجة (المنحنى)

Leitlinie	directrice	directrix	دليل
Träger	sommet	vertex	رأس (لحزمة من المستقيمات)
Erzeugende	génératrice	generatrix, generating line	راسم
Klasse	classe	class	رتبة (المنحنى)
Auftrag	remblai	embankment	ردم
Kote	cote	index	رقم
Rotationsflache	surface de revolution	surface of revolution	سطح دوراني
einschaliges Hyperboloid	hyperboloïde à une nappe	hyperboloid of one sheet	» زائدى ذو طية
zweischaliges Hyperboloid	hyperboloïde à deux nappes	hyperboloid of two sheets	» » ذو طيتين
topographische Fläche	surface topographique	topographic	» طبوغرافى
abwickelbare Fläche	surface développable	developable surface	» قابل للاستواء أو للبسط
Kreisringfläche, Torus	tore	torus	» كعكى
Schraubfläche	helicoide	helicoid	» لولبى
Regelschraubfläche	helicoïde réglé	ruled helicoid	» » مسطر
Regelfläche	surface reglée	ruled surface	» مسطر
windschiefe Fläche	surface gauche	skew surface	» معوج أو أعوج

hyperbolisches Paraboloid	paraboloïde hyperbolique	hyperbolic paraboloid	سطح مكافئ زائدى
elliptisches Paraboloid	paraboloïde elliptique	elliptic paraboloid	» » ناقصى
Böschungsfläche	surface de talus	slope surface	» ميل
(dreiachsiges) Ellipsoid	ellipsoïde	ellipsoid	» ناقصى
Drehellipsoid	ellipsoide de revolution	spheroid	» » دورانى
Flächen zweiten Grades	quadriques	quadrics, quadric surfaces	سطوح الدرجة الثانية
singulär	singulier	singular	شاذ (نقط ومماسات)
Fluchtstrahl	rayon de fuite	visual ray parallel to a given line	شعاع اتجاه
Punktreihe	ponctuelle	set, range	صف (من النقط)
stereoskopisches Bild	image stéréoscopique	stereoscopic picture	صورة مجسمة
Rückkehrkante	arête de rebroussement	edge of regression	ضلع الرجوع (لسطح قابل للاستواء)
Topographie	topographie	topography	طبوغرافيا
geogr. Länge	longitude	longitude	طول المكان
Eigenschatten	ombre propre	true shadow	ظل حقيقى
Schlagschatten	ombre portée	cast shadow	» ظاهرى أو ساقط
Breite	latitude	latitude	عرض المكان

Projektivität	projectivité	projectivity	علاقة إسقاطية أو ائتلافية
innere Orientierung	première orientation		عملية الاستيضاح الداخلى
äussere Orientierung	deuxième orientation		« « الخارجى
Hauptnormale	normale principale	principal normal	عمودى أول لمنحن فراغى
Binormale	binormale	binormal	عمودى ثانى « «
Einhüllende	enveloppe	envelope	غموف غلاف العموديات لمنحن مستو (انظر منحن مبسوط أو مفرود)
Phototheodolit	photothéodolite	phototheodolite	فوتوثيودوليث
Photogrammetrie	photogrammétrie	photogrammetry	فوتوغرامتريا
Pol	pôle	pole	قطب
Hyperbel	hyperbole	hyperbola	قطع زائد
Parabel	parabole	parabola	قطع مكافىء
Ellipse	ellipse	ellipse	« ناقص
Schraubbewegung	mouvement hélicoïdal	helicoidal motion	لولبية — حركة
konjugiert	conjugués	conjugate	مترافقان

ähnlich und ähnlich gelegen	homothétiques	homothetic	متشابهان شكلا ووضعاً
involutorisch liegend	en involution	in involution	متضامن ــ صف أو حزمة
Umklappungsachse	charnière	axis of rabatment	محور الانطباق
Affinitatsachse	axe d'affinité	axis of affinity	» الائتلاف المتوازى
Kollineationsachse	axe de collinéation	axis of homology	» » المركزى
Perspektivachse	axe perspectif	axis of perspectivity	» المنظورية
wahrer Umriss	contour vrai	true contour	محيط حقيقى
scheinbarer Umriss	contour apparent	apparent contour	» ظاهرى
Richtungskegel	cône directeur		مخروط توجيه
Projektionszentrum, Sehpunkt	centre de proj., œil	centre of proj., point of sight	مركز الاسقاط أو العين
Kollineationszentrum	centre de collinéation	centre of homology	» الائتلاف
Zentralpunkt d. Involution	centre de l'involution	centre of involution	مركز التضامن
Perspektivzentrum	centre perspectif	centre of perspectivity	» المنظورية
			مزاوجة (انظر تزاوج)
Massaufgaben	problèmes métriques	metric problems	مسائل قياس
Lagenaufgaben	problèmes de position	problems of position	» وضع
erste Hauptgerade	droite horizontale	horizontal line	مستقيم أفقى

zweite Hauptgerade	droite frontale	frontal line	مستقيم أمامى
			« تقربى (انظر خط تقربي)
Fallgerade	ligne de plus grande pente	line of greatest slope	« ذو ميل أعظم فى المستوى
Gegenachsen	droites limites	vanishing lines	مستقيان محددان لائتلاف مركزى
Grundebene	sol	ground plane	مستوى أرض
Verschwindungsebene	plan évanouissant	visual plane parallel to picture plane	« اختفاء
Grundrissebene	plan horizontal	horizontal plane	« أفقى (مونج)
Horizontebene	plan d'horizon	horizon plane	« الافق (منظور)
Profil	profil	profile	« الشكل الجانبي
Bildebene	tableau	picture plane	« الصورة
Koinzidenzebene	2ème bissecteur	2nd octant plane	مستوى أئتلاف (مونج)
asymptotische Ebene	plan asymptotique	asymptotic plane	« تقربى
Richtungsebene	plan directeur		« توجيه (سطوح مسطرة)
Aufrissebene	plan vertical	vertical plane	« رأسى (مونج)
projizierende Ebene	plan projetant	projecting plane	« مُسقط
Vergleichsebene	plan de comparaison	datum plane	« مقارنة
Schmiegungsebene	plan osculateur	osculating plane	« ملاصق

Tangentialebene	plan tangent	tangent plane	مستوى مماس
Grundriss	projection horizontale	plan	مسقط أفقي
perspektivischer Grundriss	perspective de la proj. horiz.	perspective plan	» » منظورى
Aufriss	projection verticale	elevation	» رأسي
Seintenriss	nouvelle projection	auxiliary projection	» مساعد
Intervall	intervalle	interval	معدل المستقيم
			معامد المماسات لمنحن مستو (أنظر
			منحن باسط أو فارد)
Kegelschnitt	conique	conic	مقطع مخروطي
Boschungsmasstab	échelle de pente	scale of slope	مقياس الميل
			ملاصق (أنظر مستوى)
Zuordnung, Entsprechen	correspondance	correspondence	مناظرة
projektive Verwandtschaft	transfor. homographique	projective transformation	» إسقاطية
Korrelation	transformation corrélative	correlation	» تزاوجية
eindeutige Verwandtschaft	correspondance univoque	one-to-one correspondence	مناظرة الفرد للفرد
Vertauschbares Entsprechen	correspondance [illegible]	[illegible] correspondence	» تبادلية
Perspektivität	perspective	[illegible]	» منظورة

Evolvente	développante	involute	منحن باسط
Sinuslinie	sinusoïde	sinusoid	» جيبي
Spirale	spirale	spiral	» حلزوني
Linie des stärksten Falls	ligne de plus grande pente	line of greatest slope	» ذو ميل أعظم
Böschungslinie	ligne d'égale pente	line of constant slope	» ذو ميل ثابت
Erzeugende	génératrice	generating curve	» راسم
Raumkurve	courbe gauche	twisted, tortuous curve	» فراغي
Schraublinie	hélice	helix	» لولبي
Evolute	développée	evolute	» مبسوط أو مفرود
ebene Kurve	courbe plan	plane curve	» مستو
umgeklappte Lage	rabattement	rabatment	موقع (بعد تطبيق مسو)
projektiv	homographique, projectif	homographic, projective	مؤتلف إسقاطياً (صفان أو حزمتان)
affin	affine	affine	» ائتلافاً متوازياً
perspektiv-kollinear	homologique	homologeous	» مركزياً
Affinitätsverhältnis	rapport	rapport	نسبة الائتلاف المتوازى
Charakteristik	caractéristique	caracteristic	» » المركزى
harmonisch	rapport harmonique	harmonic ratio	» توافقية

Doppelverhältnis	rapport anharmonique	cross ratio	نسبة مضاعفة
Fluchtpunkt	point de fuite	vanishing point	نقطة اتجاه
Verschwindungspunkt	point évanouissant	a point which projects to infinity	« اختفاء
Kernpunkt	point fondamental	fundamental point	« أساسية للوحة تصوير
Teilungspunkt	point de distance relatif	measuring point	« القياس أو البعد النسبي
Wendepunkt	point d'inflexion	point of inflexion	« انقلاب
Hauptpunkt	point principal	centre of vision	« رئيسية (المنظور)
Ruckkehrpunkt	point de rebroussement	cusp	« رجوع
Doppelpunkt	point double	double point	« مزدوجة
isolierter Punkt	point isolé	isolated point	« منعزلة
Doppelpunkte	points doubles	double points	نقطتان مضاعفتان